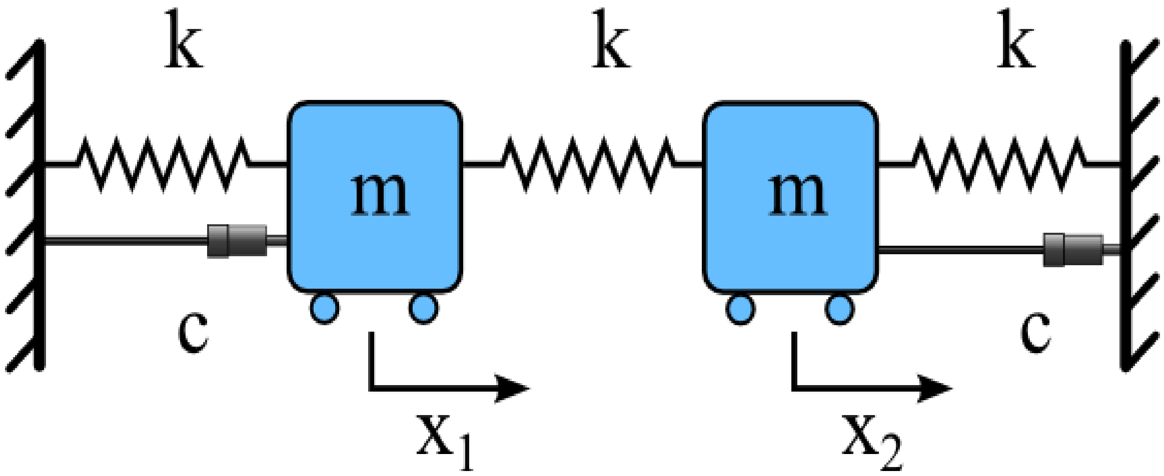
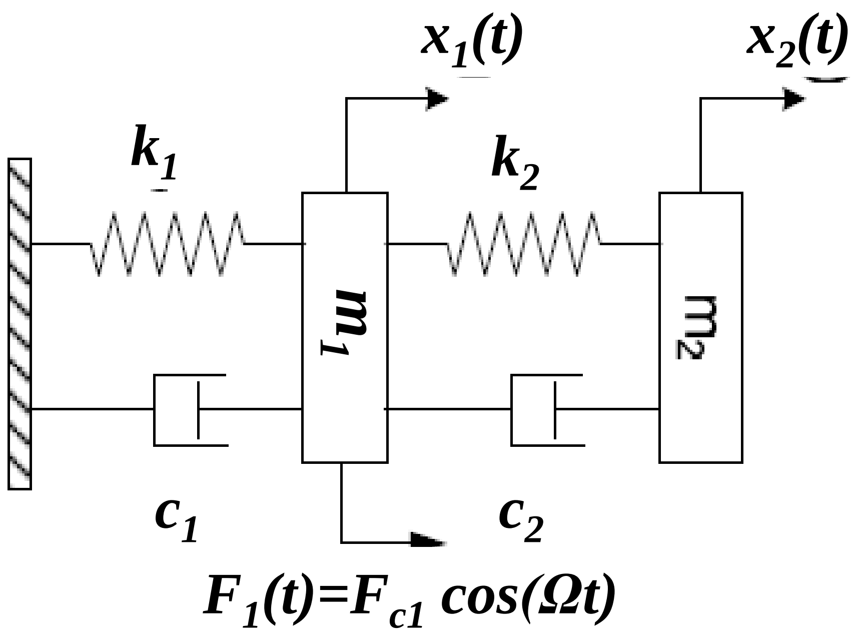
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 10



έκδοση **DYNI-EXC10-2016b**

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332



έστω …

διβάθμιο δυναμικό σύστημα **m-k**

αμελητέα βαρυτική επίδραση …

$$m_1 = 4m \text{ και } m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k$$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{0}$$ *… αμελητέα απόσβεση*

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_C \cos\left(\Omega t\right)$$ *… διεγείρουσα δύναμη*

⬇

$$F_1\left(t\right) = F_{C1}\cos\left(\Omega t\right)$$ *… και* $\underset{\sim}{F}_{C2}=0$, $\underset{\sim}{F}_S=0$

? *συνάρτηση μεταφοράς συστήματος*

Άσκηση 10: ΛΥΣΗ

συνάρτηση μεταφοράς ...

$$H_{ij}(\Omega) = \left(\frac{X_i}{F_{C,j}} \right) \left[\frac{m}{N} \right]$$

πλάτος απόκρισης

πλάτος διέγερσης

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_C \cos(\Omega t)$$

διεγείρουσα δύναμη

εξίσωση ισορροπίας ...

$$\boxed{\underline{M}}\, \ddot{\underset{\sim}{x}} + \boxed{\underline{K}}\, \underset{\sim}{x} + = \boxed{\underset{\sim}{F}}$$

υπολογισμός μητρώων [M], [K] & [C] του δυναμικού συστήματος με την ενεργειακή αρχή Lagrange

❑ *υπολογισμός μητρώων [M], [K] & [C] του δυναμικού συστήματος*

κινητική ενέργεια που συσσωρεύεται στις μάζες m_1 **&** m_2

$$T=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2$$

δυναμική ενέργεια που συσσωρεύεται στα ελατήρια k_1 **&** k_2

$$U=\frac{1}{2}k_1\left(\Delta x_1\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(\Delta x_2\right)^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}k_1 x_1{}^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2$$

η ισχύς λόγω εφαρμογής της δύναμης F_1

$$P_t=F_1\dot{x}_1$$

η ενέργεια που διαχέεται

$P_C=0$ ***... το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία απόσβεσης***

και ... $$L=T-U=\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2-\left(\frac{1}{2}k_1 x_1{}^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2\right)$$

η μαθηματική έκφραση της ενεργειακής αρχής Lagrange …

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \qquad (1)$$

για την κινηματική μεταβλητή q = x_1 …

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2-\left(\frac{1}{2}k_1 x_1{}^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2\right)\right)\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m_1\,\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(m_1\,\dot{x}_1\right)=m_1\,\ddot{x}_1$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2-\left(\frac{1}{2}k_1 x_1{}^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2\right)\right)\right)=k_1x_1+k_2\left(x_1-x_2\right)=\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1}=0 \quad \textbf{\textit{και …}} \quad \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1}=F_1$$

οπότε… ❶ → $m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1$ ❷

για την κινηματική μεταβλητή q = x_2 …

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}k_1x_1{}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1-x_2)^2\right)\right) = m_2\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) = m_2\ddot{x}_2$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}k_1x_1{}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1-x_2)^2\right)\right)\right) = k_2(x_1-x_2)(-1) = -k_2x_1 + k_2x_2$$

$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = 0$ *και …* $\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = 0$

οπότε… ❶ → $m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0$ ❸

μητρωϊκή μορφή των ❷ και ❸ ...

$$\begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = F_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{\ddot{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}}$$

αντικαθιστώντας τα δεδομένα ...

$$\begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

οπότε τα μητρώα ...

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

εξίσωση ισορροπίας ... $\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}} + \underline{K}\,\underset{\sim}{x} + = \underset{\sim}{F}$

όπου ...

η διεγείρουσα δύναμη είναι: $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_C \cos(\Omega t)$

η μόνιμη απόκριση είναι: $\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_P(t) = \underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) + \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t)$

1η χρονική παράγωγος: $\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \dot{\underset{\sim}{x}}_P(t) = -\Omega \underset{\sim}{X}_C \sin(\Omega t) + \Omega \underset{\sim}{X}_S \cos(\Omega t)$

2η χρονική παράγωγος: $\ddot{\underset{\sim}{x}}(t) = \ddot{\underset{\sim}{x}}_P(t) = -\Omega^2 \underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) - \Omega^2 \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t)$

$\Rightarrow$ ...

$\Rightarrow$ ...

$$\underline{M}\left(-\Omega^2 \underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) - \Omega^2 \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t)\right) + \underline{K}\left(\underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) + \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t)\right) = \underset{\sim}{F}_C \cos(\Omega t)$$

$\vdots$

$\Downarrow$ *ομαδοποίηση συν- & ημι- τονικών όρων*

$$\left(-\Omega^2 \underline{M} \underset{\sim}{X}_C + \underline{K} \underset{\sim}{X}_C - \underset{\sim}{F}_C\right)\cos(\Omega t) + \left(-\Omega^2 \underline{M} \underset{\sim}{X}_S + \underline{K} \underset{\sim}{X}_S\right)\sin(\Omega t) = 0$$

$\Downarrow$

ΠΡΕΠΕΙ να ισχύει για κάθε t

$\Downarrow$

$\vdots$

$$\left\{\begin{aligned} &\left(-\Omega^2 \underline{M} \underset{\sim}{X}_C + \underline{K} \underset{\sim}{X}_C - \underset{\sim}{F}_C\right) = \underset{\sim}{0} \\ &\left(-\Omega^2 \underline{M} \underset{\sim}{X}_S + \underline{K} \underset{\sim}{X}_S\right) = \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) \underset{\sim}{X}_C = \underset{\sim}{F}_C \\ &\left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) \underset{\sim}{X}_S = \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right\}$$

για τα πλάτη των ημιτονικών όρων X_c και αντικαθιστώντας τα δεδομένα ...

$$\left(-\Omega^2\begin{bmatrix}4m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\right)\underset{\sim}{X}_s=\underset{\sim}{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{S1}\\ X_{S2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad ❶$$

η ❶ είναι ομογενές σύστημα, οπότε ...

$$D=\det\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}=\left(-4\Omega^2 m+2k\right)\left(-\Omega^2 m+k\right)-\left(-k\right)\left(-k\right)=$$

$$=\left(4\Omega^4 m^2-4\Omega^2 km-2\Omega^2 km+2k^2\right)-k^2=\left(4\Omega^4 m^2-6\Omega^2 km+2k^2\right)-k^2=$$

$$=4\Omega^4 m^2-6\Omega^2 km+k^2 \quad ❷$$

για $\lambda=\Omega^2$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ...

$$4\Omega^4 m^2-6\Omega^2 km+k^2=0\xrightarrow{\Omega^2=\lambda}\underbrace{\left(4m^2\right)}_{\alpha}\lambda^2+\underbrace{\left(-6km\right)}_{\beta}\lambda+\underbrace{k^2}_{\gamma}=0$$

οπότε ...

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6km)^2 - 4(4m^2)(k^2) = 36k^2m^2 - 16k^2m^2 = 20k^2m^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6k\cancel{m} \pm \sqrt{20}k\cancel{m}}{2(4m^{\cancel{2}})} = \frac{6k \pm \sqrt{4\times 5}k}{8m} = \frac{6k \pm 2\sqrt{5}k}{8m} = \frac{3k \pm \sqrt{5}k}{4m}$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

υπάρχουν τιμές λ & Ω → D = 0

ΑΛΛΑ και ...

D ≠ 0 → τετριμμένη λύση

$$\Downarrow$$

$$\underset{\sim}{X}_S = \begin{bmatrix} X_{S1} \\ X_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

για τα πλάτη των συνημιτονικών όρων X_S και αντικαθιστώντας τα δεδομένα ...

$$\left(-\Omega^2\begin{bmatrix}4m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}X_{C1}\\ X_{C2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{C1}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{C1}\\ X_{C2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{C1}\\ 0\end{bmatrix}$$

ομοίως με προηγούμενο βήμα ... η ΛΥΣΗ είναι:

$$X_{C1}=\frac{\begin{vmatrix}F_{C1} & -k\\ 0 & -\Omega^2 m+k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{vmatrix}}\xrightarrow[D=\det\left(\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}\right)]{}X_{C1}=\left(\frac{\left(-\Omega^2 m+k\right)}{D}\right)F_{C1}$$

και ...

$$X_{C_2} = \frac{\begin{vmatrix} -4\Omega^2 m + 2k & F_{C1} \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4\Omega^2 m + 2k & -k \\ -k & -\Omega^2 m + k \end{vmatrix}} \xrightarrow[D=\det\left(\begin{bmatrix} -4\Omega^2 m+2k & -k \\ -k & -\Omega^2 m+k \end{bmatrix}\right)]{} X_{C_2} = \left(\frac{k}{D}\right) F_{C1}$$

για τον υπολογισμό των πλατών $\underset{\sim}{X}_C$ ***χρειάζεται η συχνότητα Ω του διεγέρτη ...***

θεωρείται δεδομένη ...

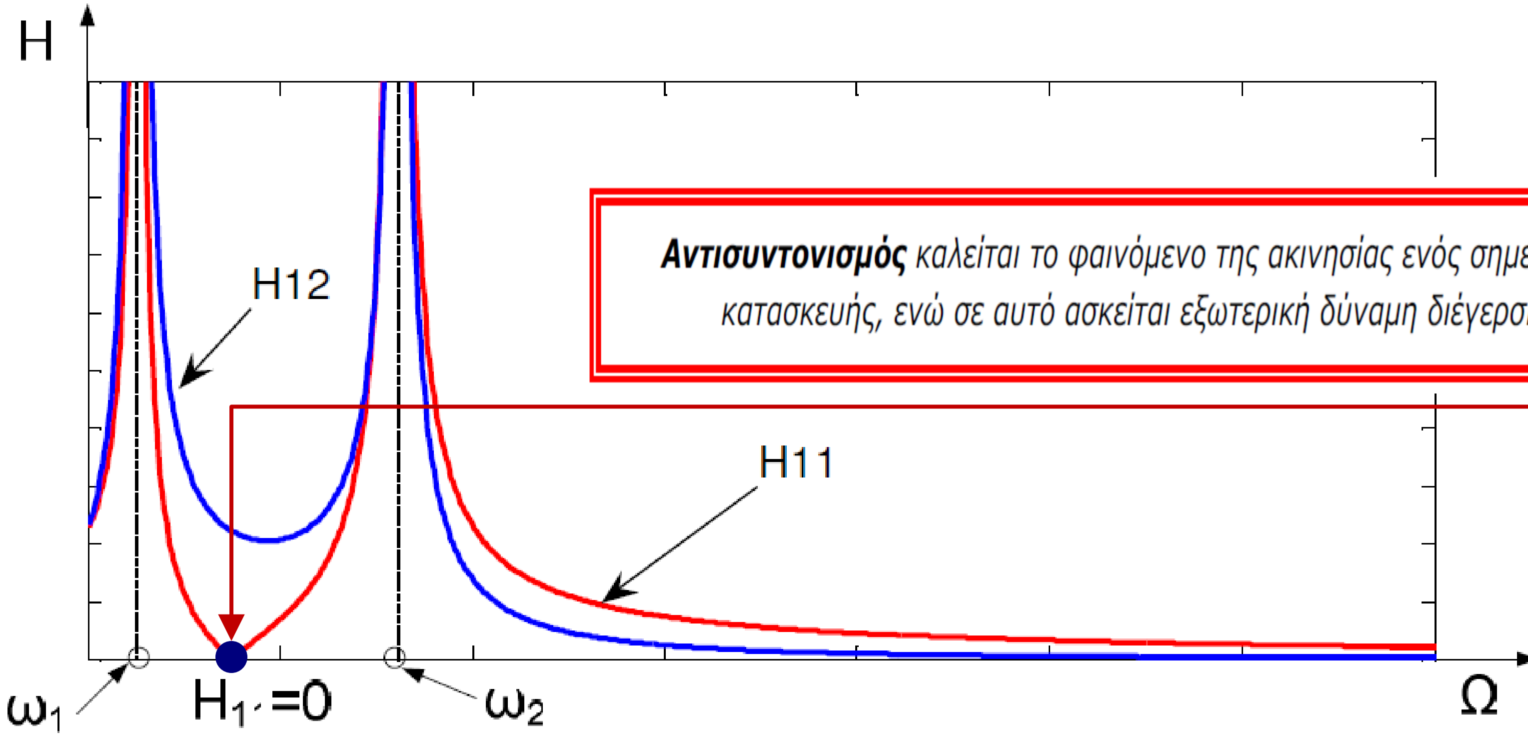
επομένως, οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι ...

$$H_{11} = \left(\frac{X_{C_1}}{F_{C_1}}\right) = \left(\frac{\left(\frac{-\Omega^2 m + k}{D}\right) F_{C_1}}{F_{C_1}}\right) \Rightarrow H_{11} = \left(\frac{-\Omega^2 m + k}{D}\right)$$

$$H_{12} = H_{21} = \left(\frac{X_{C_2}}{F_{C_1}}\right) = \left(\frac{\left(\frac{k}{D}\right) F_{C_1}}{F_{C_1}}\right) \Rightarrow H_{12} = \left(\frac{k}{D}\right)$$

η συνάρτηση μεταφοράς H_{22} ***δεν ορίζεται επειδή η δύναμη διέγερσης*** $\boldsymbol{F_{c2} = 0}$

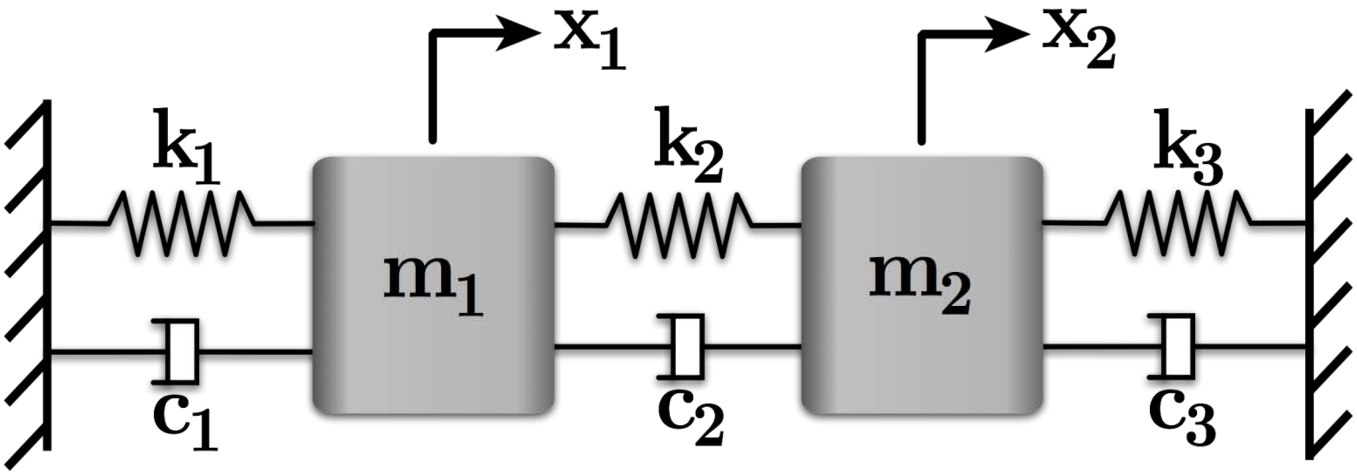
γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων μεταφοράς ...



Αντισυντονισμός καλείται το φαινόμενο της ακινησίας ενός σημείου της κατασκευής, ενώ σε αυτό ασκείται εξωτερική δύναμη διέγερσης.

- ***για $\Omega=\omega_1$ ή $\Omega=\omega_2 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow H_{11} \rightarrow +\infty$ και $H_{12} \rightarrow +\infty$***
- ***ισχύει ...*** $H_{11} = \left(\dfrac{-\Omega_1^2 m + k}{D}\right) = 0 \Rightarrow -\Omega_1^2 m + k = 0 \Rightarrow \Omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr