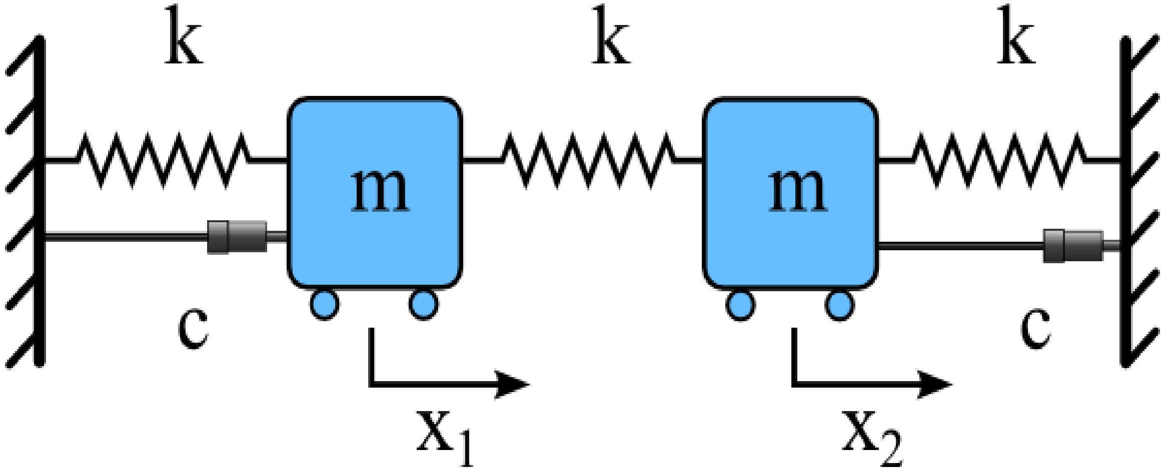
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 12

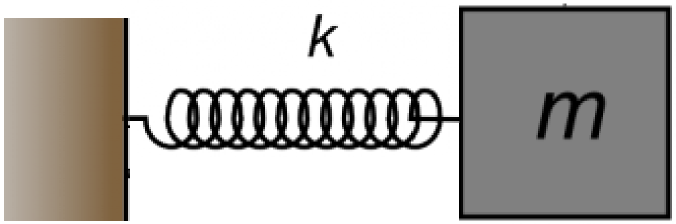


έκδοση **DYNI-EXC12-2016b**

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

έστω …

μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα **m-k**



- *μηδενικές αρχικές συνθήκες*

$$x_o = \dot{x}_o = 0$$

- *μηδενικό λόγο απόσβεσης*

$$\zeta = 0$$

- *βηματική διέγερση Heaviside*

$$F(t) = F_o\, H^*(t)$$

? *Απόκριση δυναμικού συστήματος*
(με μετασχηματισμό Laplace)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{εξίσωση ισορροπίας ...} \quad m\ddot{x}+kx=F_o\,H^*(t) \\[2em] \zeta=\dfrac{c}{c_{critical}} \xrightarrow{c_{critical}=2m\omega} \zeta=\dfrac{c}{2m\omega} \Rightarrow \left(\dfrac{c}{m}\right)=2\zeta\omega \\[2em] \omega^2=\left(\dfrac{k}{m}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{m}\right)=\left(\dfrac{\omega^2}{k}\right) \\[2em] \left(\dfrac{F_o}{m}\right)=F_o\left(\dfrac{1}{m}\right) \xrightarrow{\text{Eξ.}(A.4)} \left(\dfrac{F_o}{m}\right)=F_o\left(\dfrac{\omega^2}{k}\right)=\omega^2\underbrace{\left(\dfrac{F_o}{k}\right)}_{X_s} \Rightarrow \left(\dfrac{F_o}{m}\right)=\omega^2 X_s \end{array}\right\} \overset{/m}{\Rightarrow} \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=\omega^2 X_s H^*(t)$$

μετασχηματισμός Laplace

$$\ldots$$

μετασχηματισμός Laplace ...

αρχικές συνθήκες ... $x_o = \dot{x}_o = 0$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX - \cancelto{0}{x_o} \Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} \xrightarrow[\text{Εξ.}(B.3)]{\chi=\dot{x}} \mathcal{L}\{\dot{\chi}\} = s\mathcal{L}\{\chi\} - \chi_o = s\mathcal{L}\{\dot{x}\} - \dot{x}_o =$$

$$= s\underbrace{\left(sX - x_o\right)}_{\mathcal{L}\{\dot{x}\}} - \dot{x}_o = s^2X - \cancelto{0}{sx_o} - \cancelto{0}{\dot{x}_o}$$

$$\mathcal{L}\{H^*(t)\} = \left(\frac{1}{s}\right)$$

ιδιότητα γραμμικότητας ...

$$\mathcal{L}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1\underbrace{\mathcal{L}\{x_1(t)\}}_{X_1(s)} + a_2\underbrace{\mathcal{L}\{x_2(t)\}}_{X_2(s)} = X_1(s) + X_2(s)$$

$$\ldots \Rightarrow \quad s^2 X + \omega^2 X = \omega^2 X_s \left(\frac{1}{s}\right)$$

ομαδοποιώντας τους όρους

$$X = \omega^2 X_s \left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\left(\frac{1}{s}\right)$$

τεχνική των μερικών κλασμάτων

$$X = \left[\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2+\omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right)\right] \Rightarrow \ldots$$

1

$$\Rightarrow$$

$$\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2+\omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right) = \left(\frac{(A_o s + A_1)s + B_o(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)s}\right) = \left(\frac{A_o s^2 + A_1 s + B_o s^2 + B_o\omega^2}{(s^2+\omega^2)s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_o s + A_1}{s^2+\omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right) = \left(\frac{(A_o + B_o)s^2 + A_1 s + B_o\omega^2}{(s^2+\omega^2)s}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\omega^2 X_s}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right)=\left(\frac{\left(A_o+B_o\right)s^2+A_1 s+B_o\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} A_o+B_o=0 \\ A_1=0 \\ B_o\cancel{\omega^2}=\cancel{\omega^2}X_s \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_o\\A_1\\B_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\X_s\end{bmatrix}$$

ορίζουσα D του γραμμικού συστήματος

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

άρα ...

$$A_o=\frac{\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\X_s&0&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{X_s\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}}{1}=X_s\left(0-1\right)\Rightarrow A_o=-X_s$$

και ...

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_s & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ X_s & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 - 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

και ...

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X_s \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_s \end{vmatrix}}{1} = X_s - 0 \Rightarrow B_1 = X_s$$

οπότε από ... 1 για A_o, A_1 & B_1 ⇒

$$X = \left[\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2 + \omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right)\right] = \left[\left(\frac{-X_s s}{s^2 + \omega^2}\right) + \left(\frac{X_s}{s}\right)\right] \Rightarrow X = X_s \left[\underbrace{\left(\frac{1}{s}\right)}_{x_p} - \underbrace{\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)}_{x_h}\right]$$

επιβολή της εξωτερικής βηματικής διέγερσης Heaviside

ελεύθερη ταλάντωση του δυναμικού συστήματος

επιστρέφοντας από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο του χρόνου, δηλαδή εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{X_s\left[\left(\frac{1}{s}\right)-\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right]\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{X_s\left(\frac{1}{s}\right)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{X_s\left(\frac{-s}{s^2+\omega^2}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{X\} = X_s\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\right\} - X_s\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right\} = X_s\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right\}\right) \Rightarrow$$

μετασχηματισμός συνάρτησης Heaviside

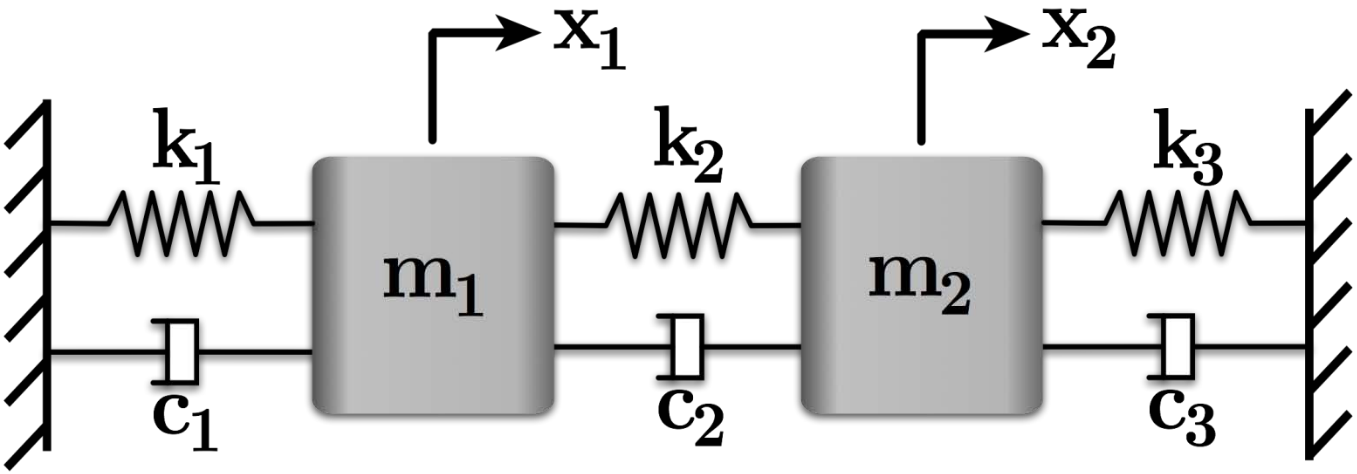
$$\mathcal{L}\{H^*(t)\} = \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = X_s\left[H^*(t) - \cos(\omega t)\right]}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\} = \left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right)$$

μετασχηματισμός συνάρτησης συνημιτόνου

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr