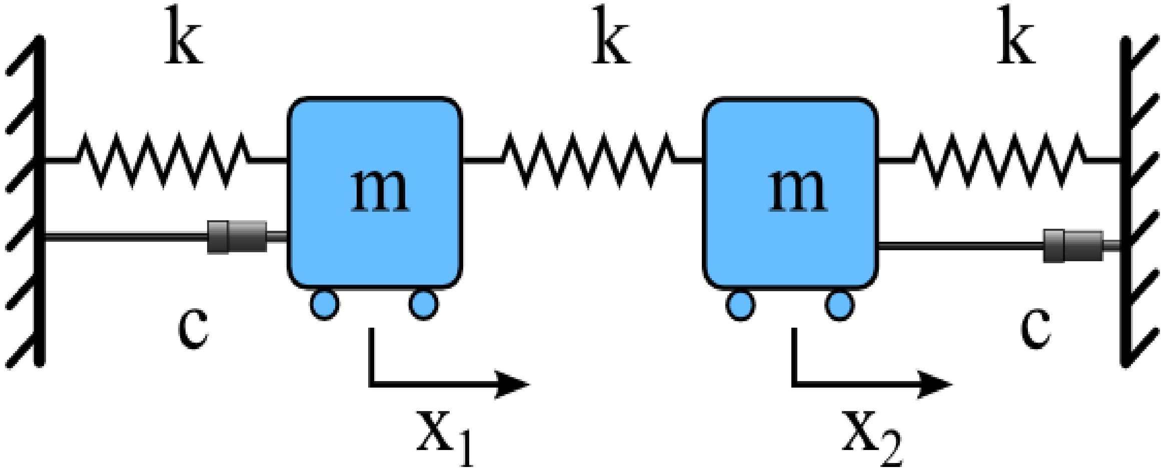
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 15

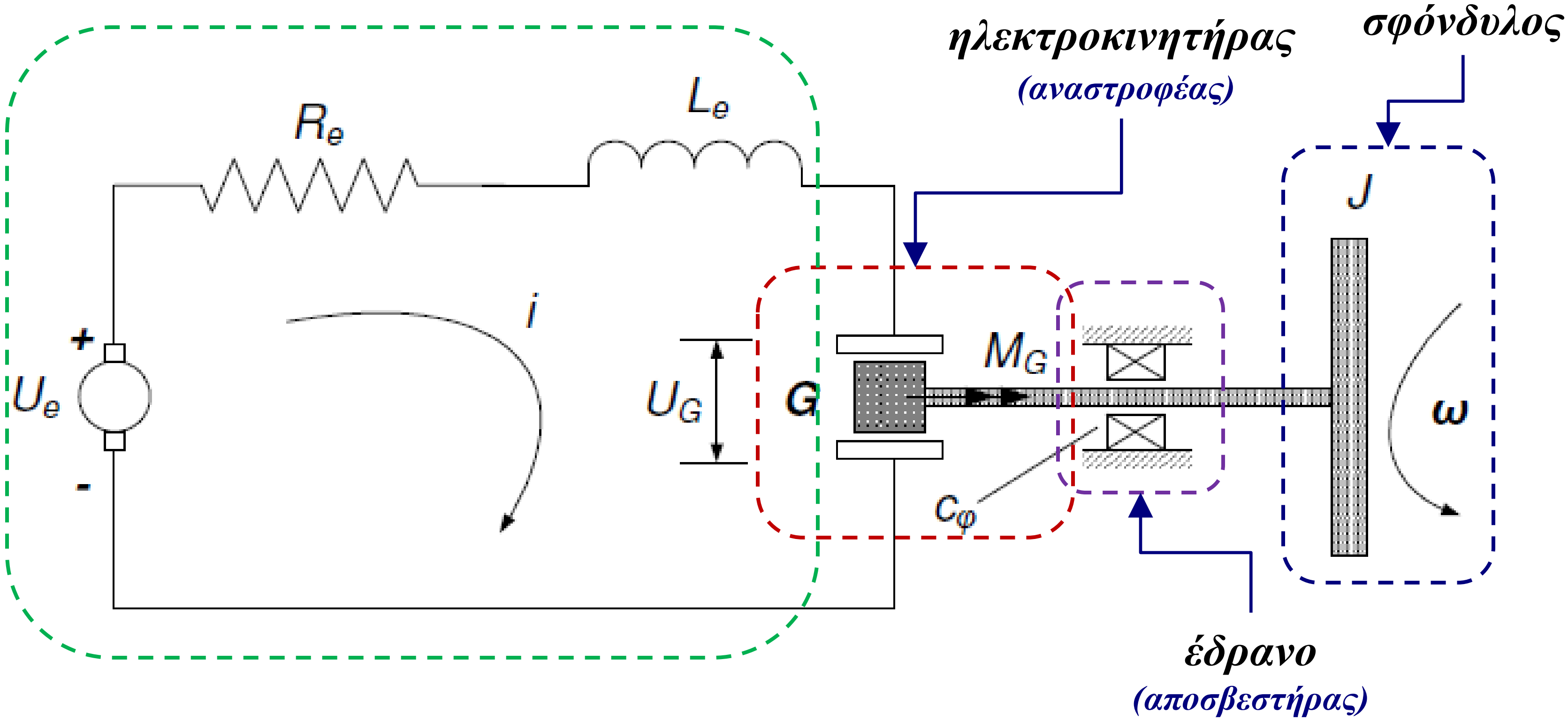


έκδοση ***DYNI-EXC15-2016b***

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

έστω …

… ηλεκτρομηχανικό σύστημα (σύνθετο σύστημα)



? *εξισώσεις κίνησης συστήματος*

U_e
- *συνεχής ≡ βηματική συνάρτηση*
- *εναλλασσόμενη ≡ αρμονική διέγερση*

υπολογισμός ενεργειακών όρων μηχανικού υποσυστήματος

- η κινητική ενέργεια συσσωρεύεται στη ροπή αδράνειας του περιστρεφόμενου άξονα

$$T_{\varphi} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

- η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική ← δεν υπάρχει στροφικό ελατήριο συσσώρευσης δυναμικής ενέργειας

$$U_{\varphi} = 0$$

- η ενέργεια διαχέεται στην αντίσταση (απόσβεση) του εδράνου $P_{C,\varphi} = \frac{1}{2} c_{\varphi} \omega^2$

- δεν προσφέρεται εξωτερικά ισχύς $P_{t,\varphi} = 0$

❑ *υπολογισμός ενεργειακών όρων ηλεκτρικού υποσυστήματος*

- *η κινητική ενέργεια συσσωρεύεται στο στοιχείο αυτεπαγωγής* $T_e = \frac{1}{2} L_e \, i^2$

- *η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική ← δεν υπάρχει πυκνωτής* $U_e = 0$

- *η ενέργεια διαχέεται στην αντίσταση* $P_{C,e} = \frac{1}{2} R_e \, i^2$

- *η ισχύς προσφέρεται εξωτερικά από την πηγή τάσης* $P_{t,e} = U_S \, i$

υπολογισμός συνολικών ενεργειακών όρων σύνθετου συστήματος

- η κινητική ενέργεια $T = T_\varphi + T_e \Rightarrow T = \frac{1}{2} J\ \omega^2 + \frac{1}{2} L_e\ i^2$

- η δυναμική ενέργεια $U = U_\varphi + U_e = 0 + 0 \Rightarrow U = 0$

- η ενέργεια που διαχέεται $P_C = P_{C,\varphi} + P_{C,e} \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} c_\varphi\ \omega^2 + \frac{1}{2} R_e\ i^2$

- η εξωτερικά προσφερόμενη ισχύς $P_t = P_{t,\varphi} + P_{t,e} = 0 + U_S\ i \Rightarrow P_t = U_S\ i$ ❶

Άσκηση 15: ΛΥΣΗ

❑ σύζευξη υποσυστημάτων

κίνηση (περιστροφή) άξονα λόγω λειτουργίας ΗΚ

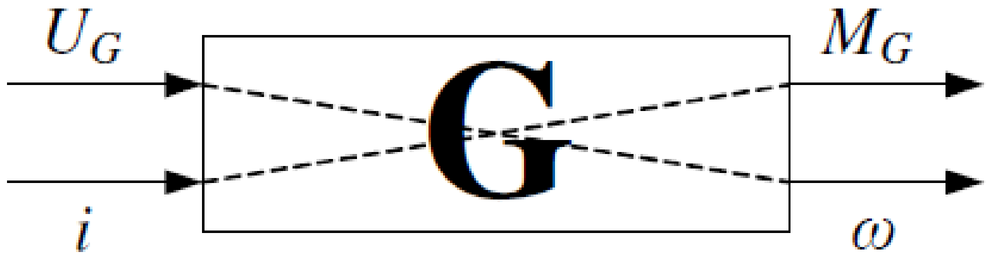
⬇

σύζευξη ηλεκτρικού & μηχανικού υποσυστήματος

⬇

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

αντι-ηλεκτρεγερτική δύναμη (σθένος) **ροπή που μεταφέρεται μέσω άξονα (σθένος)**



ένταση ρεύματος που διαρρέει ΗΚ (ροή) **γωνιακή ταχύτητα περιστροφής άξονα (ροή)**

⬇

$$U_G = G\,\omega \quad \text{και} \quad i = \left(\frac{1}{G}\right) M_G$$

❷

διατήρηση ισχύος (μηδενική απώλεια ισχύος) …

$$U_G\, i = M_G\, \omega = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$-U_G\, i + M_G\, \omega = 0$$

φυσική ερμηνεία

ΙΣΧΥΣ που παρέχεται στο μηχανικό υποσύστημα από το ηλεκτρικό υποσύστημα μέσω του αναστροφέα

σύζευξη μεγεθών

❶

εσωτερικές μεταβλητές συστήματος

$$P_t = U_S\, i - U_G\, i + M_G\, \omega \Rightarrow P_t = (U_S - U_G)\, i + M_G\, \omega$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ …

Προσθέτουμε την ισχύ, η οποία ανταλλάσεται μέσω του αναστροφέα, στην ισχύ, η οποία προσφέρεται από τις εξωτερικές δυνάμεις.

❑ επιλογή ανεξάρτητων κινηματικών μεταβλητών (Β.Ε.)

<u>ανεξάρτητη μεταβλητή (Β.Ε.)</u>

- ❑ ηλεκτρικό υποσύστημα — ηλεκτρικό φορτίο ή ένταση ρεύματος
- ❑ μηχανικό υποσύστημα — γωνία στροφής ή γωνιακή ταχύτητα

$\Rightarrow$ q & φ

❑ ενεργειακή αρχή Lagrange

μαθηματική έκφραση

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \qquad ❸$$

- **για ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή q**

  - **αδρανειακός όρος**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial L}{\partial i} = \frac{\partial (T-U)}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\left\{\frac{1}{2}J\,\omega^2 + \frac{1}{2}L_e\,i^2 - 0\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial i} = L_e\,i$$

$$\Downarrow \quad \textit{παραγώγιση ...}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_e\,i\right) = L_e\left(\frac{di}{dt}\right)$$

  - **όρος ελαστικότητας**

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=q} -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{1}{2}J\,\omega^2 + \frac{1}{2}L_e\,i^2 - 0\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

- **_όρος διάχυσης_**

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial P_C}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{1}{2} c_\varphi \, \omega^2 + \frac{1}{2} R_e \, i^2\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial i} = R_e \, i$$

- **_όρος διέγερσης_**

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial P_t}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\left((U_S - U_G) i + M_G \, \omega\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial i} = (U_S - U_G)$$

οπότε από ... ❸ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial i} = \frac{\partial P_t}{\partial i} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \ldots \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial i}=\frac{\partial P_t}{\partial i} \Rightarrow L_e\left(\frac{di}{dt}\right)+0+R_e\, i=\left(U_S-U_G\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L_e\left(\frac{di}{dt}\right)+R_e\, i=\left(U_S-U_G\right)} \qquad ❹$$

- ***για ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή φ***

  - ***αδρανειακός όρος***

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega]{q=\varphi} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\frac{1}{2} J\ \omega^2 + \frac{1}{2} L_e\ i^2 - 0\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \omega} = J\ \omega$$

$$\Downarrow \quad \textit{παραγώγιση ...}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) = \frac{d}{dt}(J\ \omega) = J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$$

  - ***όρος ελαστικότητας***

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=\varphi} -\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\frac{1}{2} J\ \omega^2 + \frac{1}{2} L_e\ i^2 - 0\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

- **όρος διάχυσης**

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot q} \xrightarrow[\dot q=\dot\varphi=\omega]{q=\varphi} \frac{\partial P_C}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{2} c_\varphi\, \omega^2 + \frac{1}{2} R_e\, i^2\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \omega} = c_\varphi\, \omega$$

- **όρος διέγερσης**

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot q} \xrightarrow[\dot q=i]{q=x} \frac{\partial P_t}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\left((U_S - U_G)i + M_G\, \omega\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial i} = M_G$$

οπότε από ... ❸ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot q} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot q} \xrightarrow[\dot q=i]{q=q} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial i} = \frac{\partial P_t}{\partial i} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \dots \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_C}{\partial \omega} = \frac{\partial P_t}{\partial \omega} \Rightarrow J\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + 0 + c_\varphi\, \omega = M_G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{J\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + c_\varphi\, \omega = M_G} \quad ❺$$

οπότε από ❹ και ❺ ⇒ … εξισώσεις αρχής Lagrange

$$L_e\left(\frac{di}{dt}\right) + R_e\, i = \left(U_S - U_G\right)$$

$$J\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + c_\varphi\, \omega = M_G$$

από ❹ *και* ❺ ❷ $\Rightarrow$ *… εξισώσεις κίνησης συζευγμένου συστήματος*

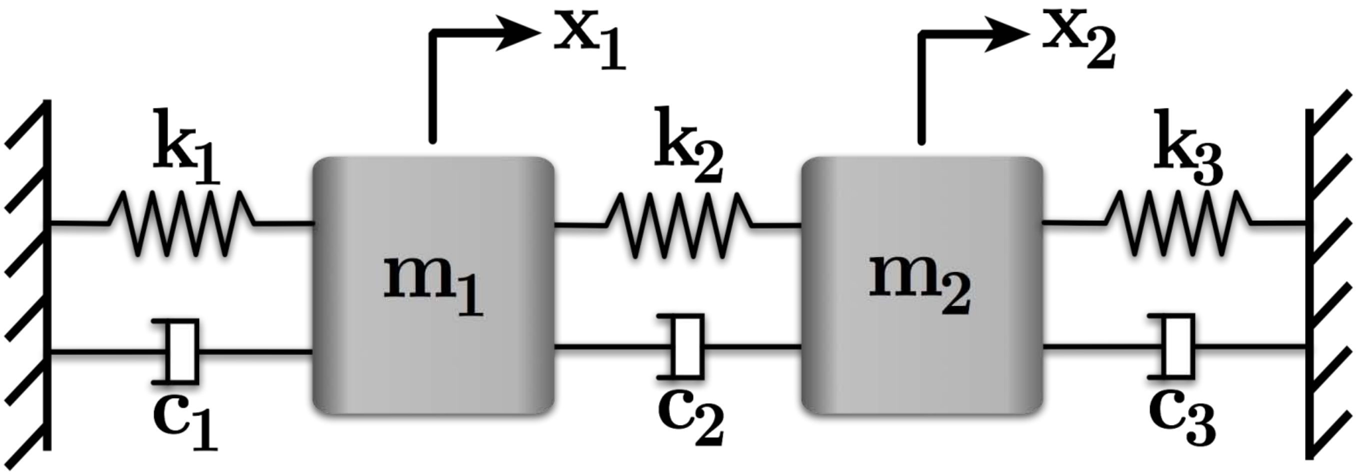
νόμος πτώσης τάσης του Kirchhoff στο ηλεκτρικό κύκλωμα

$$\left\{\begin{array}{l} L_e\left(\dfrac{di}{dt}\right)+R_e\, i=\left(U_S-G\,\omega\right)\Rightarrow \boxed{L_e\left(\dfrac{di}{dt}\right)+R_e\, i+\boxed{G}\,\omega=U_S} \\ J\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)+c_\varphi\,\omega=G\,i\Rightarrow \boxed{J\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)+c_\varphi\,\omega-\boxed{G}\,i=0} \end{array}\right.$$

ισορροπία ροπών στο μηχανικό σύστημα

δήλωση σύζευξης συστημάτων

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr