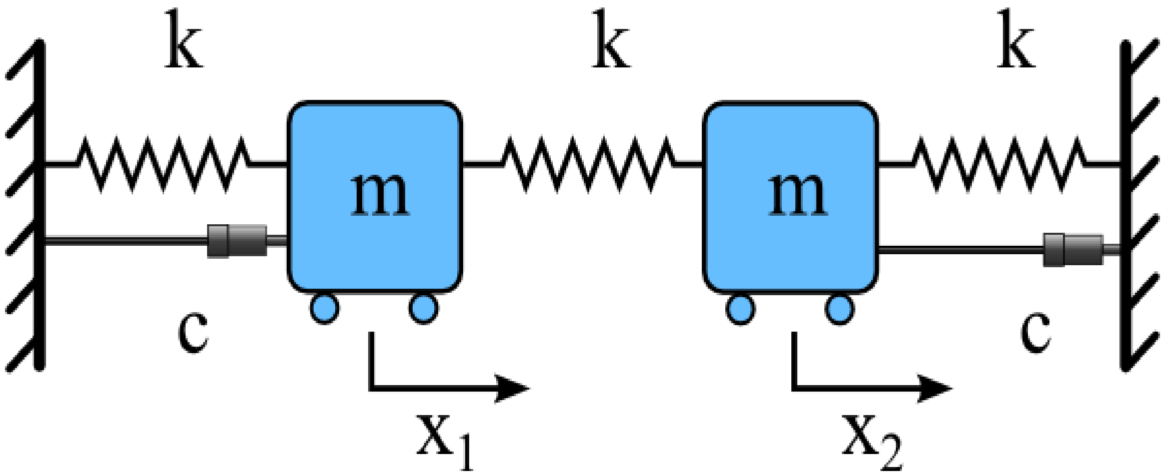
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 18

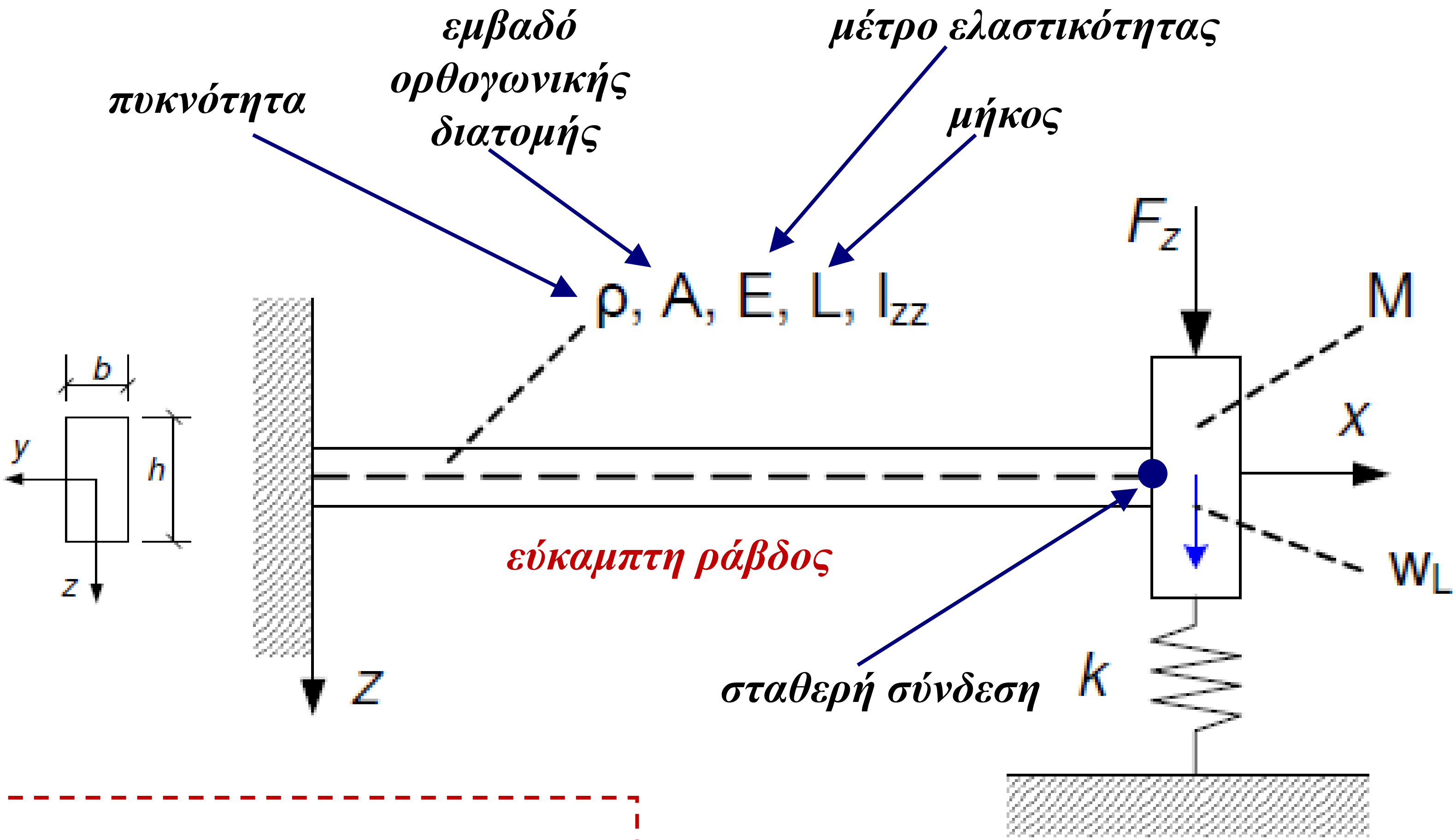


έκδοση **DYNI-EXC18-2016b**

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

έστω ...

.... δυναμικό σύστημα σε κάμψη υπό τη δράση συγκεντρωμένου φορτίου



? ***εξίσωση κίνησης συστήματος***

❑ ενεργειακή αρχή Lagrange

➢ *υπολογισμός κινητικής ενέργειας του δυναμικού συστήματος ...*

- *η κινητική ενέργεια της δοκού* $T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2\, dx$ ❶A
- *η κινητική ενέργεια της συγκεντρωμένης μάζας* $T_1 = \left(\frac{1}{2}\right) M \dot{w}_L^2$
- *η κινητική ενέργεια του ελατηρίου* $T_2 = 0$

$+ \Rightarrow$ ...

$$\ldots \Rightarrow \quad T = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2\, dx + \left(\frac{1}{2}\right) M \dot{w}_L^2$$

... η κινητική ενέργεια του συστήματος

❶B

➢ *υπολογισμός δυναμικής ενέργειας του δυναμικού συστήματος ...*

- *η δυναμική ενέργεια της δοκού* $U_L = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} E\,I_{yy}\left(w''\right)^2 dx$ ❷A
- *η δυναμική ενέργεια της συγκεντρωμένης μάζας* $U_1 = 0$
- *η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου* $U_2 = \left(\frac{1}{2}\right)k w_L^2$

➕ $\Rightarrow$ ...

... $\Rightarrow$ $U = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} E\,I_{yy}\left(w''\right)^2 dx + \left(\frac{1}{2}\right)k w_L^2$ *... η δυναμική ενέργεια του συστήματος*

❷B

➢ *υπολογισμός ενέργειας διάχυσης του δυναμικού συστήματος ...* $P_c = 0$

➢ *υπολογισμός προσφερόμενης ενέργειας του δυναμικού συστήματος ...* $P_t = F\dot{w}_L$

➢ ***περιγραφή βέλους κάμψης ...***

- ***χρησιμοποίηση της παρεμβολής*** $$w(x,t)=\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)w_L$$ ❸

- ***1η χρονική παράγωγος*** $$\dot{w}=\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\dot{w}_L$$ ❹

- ***1η χωρική παράγωγος*** $$w'=\left(\frac{\pi}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)w_L$$

- ***2η χωρική παράγωγος*** $$w''=\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)w_L$$ ❺

- ***ΠΡΕΠΕΙ να ικανοποιεί τις κινηματικές συνθήκες στο σημείο στήριξης της δοκού ...***

  - ***μηδενική κομβική μετατόπιση*** $x=0: \quad w(0,t)=0$
  - ***μηδενική γωνία κάμψης*** $x=0: \quad \dfrac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$

❸ $\Rightarrow$ ***το κατακόρυφο βέλος κάμψης της δοκού είναι συνάρτηση του βέλους κάμψης w_L του ελεύθερου άκρου της δοκού***

$\Downarrow$

1 ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή

$\Downarrow$

σύστημα 1 Β.Ε.

➢ ***αναλυτικός υπολογισμός κινητικής ενέργειας του δυναμικού συστήματος ...***

από ❶ ***A και*** ❹ $\Rightarrow$ ...

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} \rho A \left(\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\dot{w}_L\right)^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A\int_{x=0}^{x=L}\left(\left(1-2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\dot{w}_L\right)dx \Rightarrow$$

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A\dot{w}_L\int_{x=0}^{x=L}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)dx \Rightarrow$$

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A\dot{w}_L\left\{\int_{x=0}^{x=L} dx - 2\int_{x=0}^{x=L}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \int_{x=0}^{x=L}\left(\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)dx\right\} \quad ❻$$

- *υπολογισμός ολοκληρωμάτων* ❻

$$I_1 = \int_{x=0}^{x=L} dx = \left[x\right]_{x=0}^{x=L} = (L-0) \Rightarrow I_1 = L \qquad ❼$$

αλλαγή μεταβλητής ... $\theta = \left(\dfrac{\pi x}{2L}\right) \Rightarrow d\theta = \left(\dfrac{\pi}{2L}\right) dx \Rightarrow dx = d\theta \left(\dfrac{2L}{\pi}\right)$

$$\Downarrow$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{x=L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \left(\frac{2L}{\pi}\right) \cos(\theta)\, d\theta = \left(\frac{2L}{\pi}\right) \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \cos(\theta)\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \left(\frac{2L}{\pi}\right) \left[\sin(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} = \left(\frac{2L}{\pi}\right)(1-0) \Rightarrow I_2 = \left(\frac{2L}{\pi}\right) \qquad ❽$$

αλλαγή μεταβλητής ... $\theta = \left(\frac{\pi x}{2L}\right) \Rightarrow d\theta = \left(\frac{\pi}{2L}\right) dx \Rightarrow dx = d\theta \left(\frac{2L}{\pi}\right)$

$$\Downarrow$$

$$I_3 = \int_{x=0}^{x=L} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx = \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \left(\cos^2\theta\right)\left(\frac{2L}{\pi}\right) d\theta = \left(\frac{2L}{\pi}\right)\int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \left(\cos^2\theta\right) d\theta$$

ισχύει ...

$$\int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \left(\cos^2\theta\right) d\theta = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\theta + \cos\theta \sin\theta\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) - \cancel{\left(0 + \cos(0)\sin(0)\right)}\right] = \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\ldots \Rightarrow \quad I_3 = \left(\frac{2L}{\cancel{\pi}}\right)\left(\frac{\cancel{\pi}}{4}\right) \Rightarrow I_3 = \left(\frac{L}{2}\right) \quad \text{❾}$$

οπότε από ... ❻ ❼ ❽ ❾ $\Rightarrow$ ...

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A \dot{w}_L^2 \left\{L - 2\left(\frac{2L}{\pi}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A \dot{w}_L^2 \left(\left(\frac{3L}{2}\right) - \left(\frac{4L}{\pi}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A \dot{w}_L^2 \left(\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{4}{\pi}\right)\right) L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A \dot{w}_L^2 \left(\frac{3\pi - 8}{2\pi}\right) L \Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A \dot{w}_L^2 (0.22676) L$$

όμως από ... ❶B $\Rightarrow$ ... $$T = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2\, dx}_{T_L} + \left(\frac{1}{2}\right) M \dot{w}_L^2$$

$\Rightarrow$ ...

$$\ldots \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)\rho A \dot{w}_L^2 (0.22676) L + \left(\frac{1}{2}\right) M \dot{w}_L^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)\underbrace{(0.22676\rho A L + M)}_{\text{ισοδύναμη μάζα}} \dot{w}_L^2 \quad \text{➓A}$$

ισοδύναμη μάζα

οπότε από … ➓A $\ldots \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{M}\,\dot{w}_L^2$ ➓B

➢ ***αναλυτικός υπολογισμός δυναμικής ενέργειας του δυναμικού συστήματος ...***

από ❷Α και ❺ $\Rightarrow$ **...**

$$U_L = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} E\,I_{yy}\,(w'')^2\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} E\,I_{yy}\left(\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)w_L\right)^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_L = \left(\frac{1}{2}\right)E\,I_{yy}w_L^2\int_{x=0}^{x=L}\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_L = \left(\frac{1}{2}\right)E\,I_{yy}w_L^2\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \boxed{\int_{x=0}^{x=L}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx} = ❾$$

οπότε ...

$$U_L = \left(\frac{1}{2}\right) E\,I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) E\,I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{2^4 L^4}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) E\,I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{2^5 L^3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_L = \left(\frac{1}{2}\right) E\,I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{32 L^3}\right)}$$

όμως από ... 2 B $\Rightarrow$ ... $U = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} E\,I_{yy} \left(w''\right)^2 dx}_{U_L} + \left(\frac{1}{2}\right) k w_L^2$

$\Rightarrow$ ...

$$\ldots \Rightarrow \quad U = \left(\frac{1}{2}\right) E\,I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{32 L^3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k w_L^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \boxed{\left(E\,I_{yy} \left(\frac{\pi^4}{32 L^3}\right) + k \right)} w_L^2$$

$\bar{k}$ **ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου**

11 A

οπότε από ... ⓫A

και ... $\bar{k} = E\,I_{yy}\left(\dfrac{\pi^4}{32L^3}\right) + k$

$$\Rightarrow U = \left(\frac{1}{2}\right)\bar{k}\,w_L^2$$ ⓫B

❑ υπολογισμός όρων ενεργειακής αρχής Lagrange

➢ ενεργειακή μεταβλητή Lagrange ...

$$L = T - U \underset{⓫ B}{\overset{❿ B}{\Longrightarrow}} L = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{M}\,\dot{w}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\overline{k}\,w_L^2$$

➢ αδρανειακός όρος ...

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=w_L} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{w}_L} \xrightarrow{\text{Εξ.}(77)} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{w}_L}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\overline{M}\,\dot{w}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\overline{k}\,w_L^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} = \overline{M}\,\dot{w}_L}$$

1η χρονική παράγωγος ... $\Longrightarrow$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{M}\,\dot{w}_L\right) = \overline{M}\,\ddot{w}_L \quad ⓬$$

- **όρος ελαστικότητας ...**

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=w_L} -\frac{\partial L}{\partial w_L} = -\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial w_L} \xrightarrow{\text{Εξ.}(77)} -\frac{\partial L}{\partial w_L} = -\frac{\partial}{\partial w_L}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\overline{M}\,\dot{w}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\bar{k}\,w_L^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial w_L} = -\left(-\bar{k}\,w_L\right) \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial w_L} = \bar{k}\,w_L \qquad ⓭$$

- **όρος διάχυσης ...** $$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=w_L} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{w}_L}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{w}_L} = 0 \qquad ⓮$$

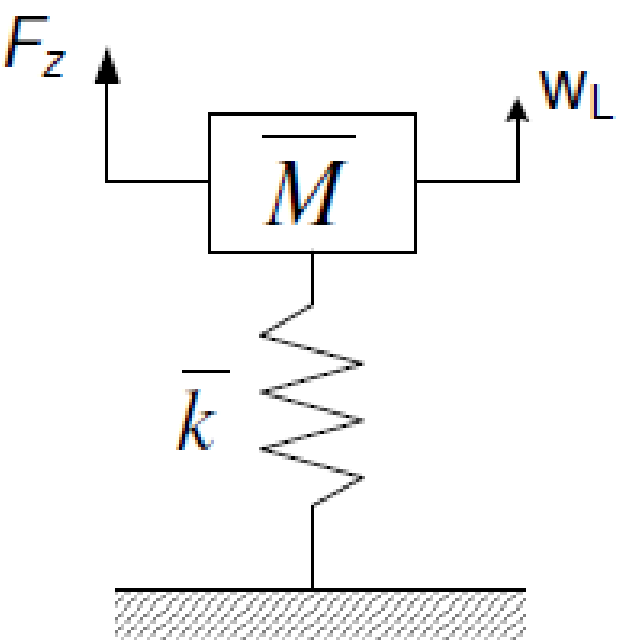
- **όρος διέγερσης ...** $$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=w_L} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{w}_L}\left(F\dot{w}_L\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{w}_L} = F \qquad ⓯$$

επομένως ...

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}}$$

⓬ ⓭ ⓮ ⓯

$$\overline{M}\,\ddot{w}_L+\overline{k}\,w_L=F$$

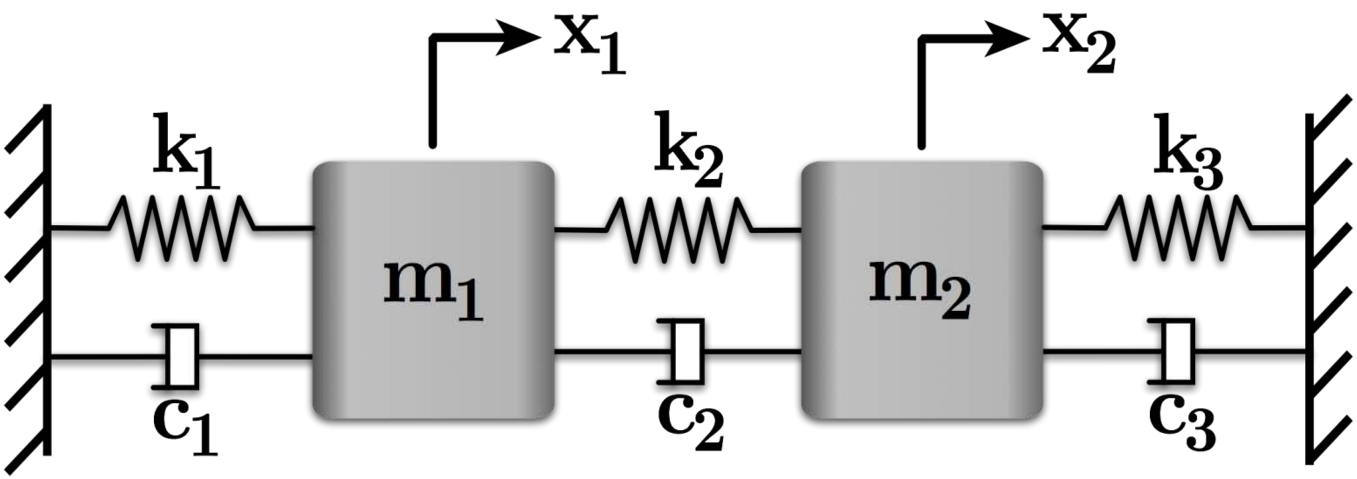


εξίσωση κίνησης δυναμικού συστήματος 1 Β.Ε. με σταθερά ελατηρίου $\overline{k}$ και συγκεντρωμένη μάζα $\overline{M}$ που καταπονείται από συγκεντρωμένη δύναμη F

παρατήρηση ...

η ανάλυση των σύνθετων κατασκευών μπορεί να απλοποιηθεί καθώς όλα τα συνεχή δυναμικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε διακριτά συστήματα λίγων Β.Ε.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr