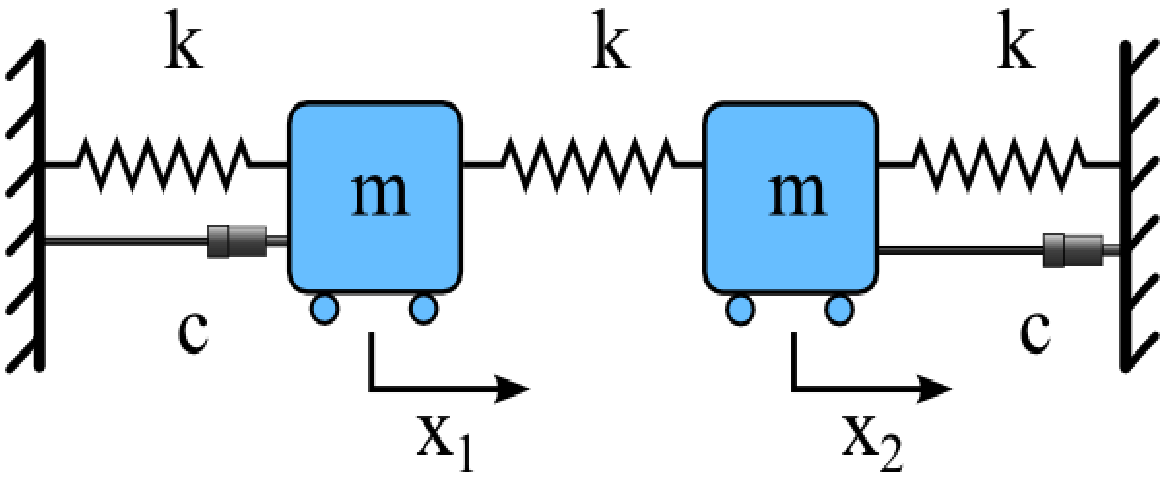
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 2



έκδοση ***DYNI-EXC02-2016b***

Copyright © Ε.Μ.Π. - 2016
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών – Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών – κτ. Μ – αιθ. Μ002
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

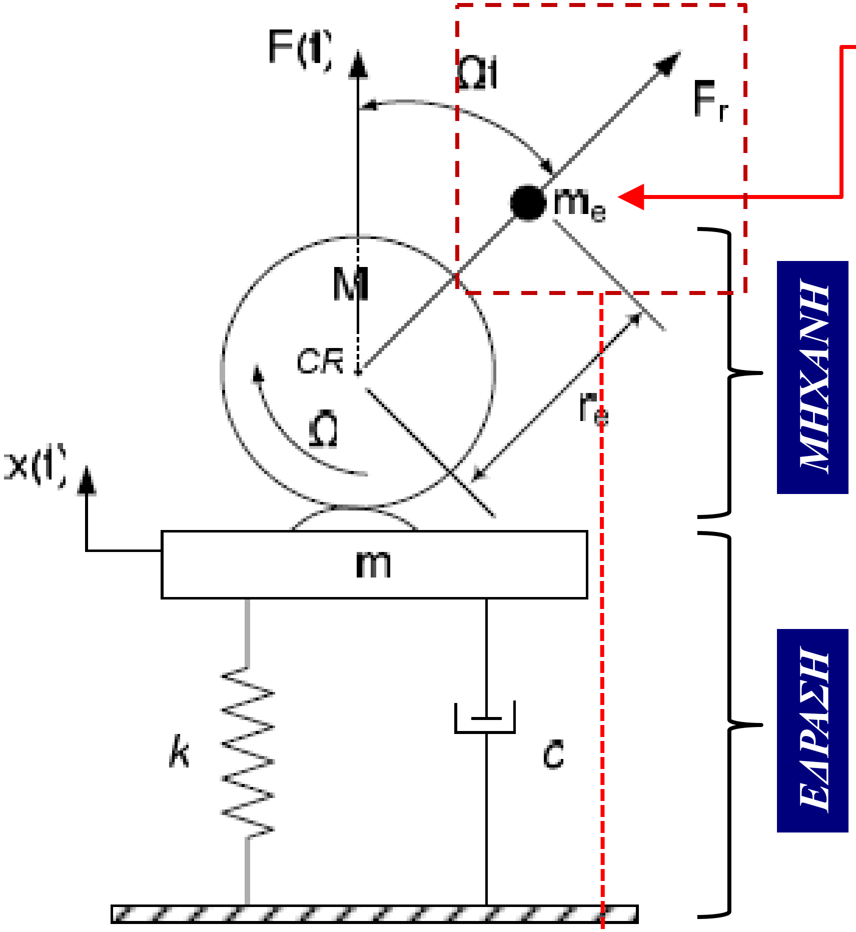
Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας παρουσίασης, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό.
Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

Έστω μία περιστρεφόμενη μηχανή μάζας $m = 1000kg$, εδράζεται σε σταθερή βάση (π.χ. έδαφος), μέσω ενός συστήματος έδρασης, το οποίο, σε πρώτη προσέγγιση, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ένα ελατήριο σταθεράς k και από ένα στοιχείο απόσβεσης σταθεράς c. Λειτουργήσαμε τη μηχανή σε διάφορες συνθήκες λειτουργίας[1] (ισοδύναμα, σε διάφορες συχνότητες περιστροφής) και παρατηρήσαμε τα ακόλουθα:

- Στις 600ΣΑΛ (ΣΑΛ=Στροφές **Α**νά **Λ**επτό ή ισοδύναμα: RPM=**R**evolutions **P**er **M**inute), εμφανίστηκε **το μέγιστο πλάτος της μετατόπισης** της μηχανής και βρήκαμε (μέσω τεχνολογικής μέτρησης) ότι η επιτάχυνση, κατά τον κατακόρυφο άξονα, ήταν $A_M = 4.93\, m/\sec^2$.
- Στις κανονικές στροφές λειτουργίας 1500ΣΑΛ[2], βρήκαμε, πάλι μέσω τεχνολογικής μέτρησης, ότι η επιτάχυνση, κατά τον κατακόρυφο άξονα, ήταν $A_\Lambda = 7.308\, m/\sec^2$.

Υποθέτοντας ότι η αζυγοστάθμητη ποσότητα M_r είναι υπεύθυνη για την αρμονική διέγερση της μηχανής κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, ζητείται ο προσδιορισμός των μεγεθών k, c του συστήματος έδρασης καθώς και της ποσότητας M_r. Διευκρινίζεται ότι οι μετρήσεις έχουν ληφθεί στη μόνιμη απόκριση, δηλαδή θεωρείται ότι η περιστρεφόμενη μηχανή έχει λειτουργήσει για επαρκές χρονικό διάστημα πριν από κάθε μέτρηση, ώστε η επίδραση της μεταβατικής απόκρισης να έχει μηδενισθεί. Υπό τη θεώρηση αυτή, οι μετρήσεις αφορούν σε πλάτη στη μόνιμη απόκριση. (**Παρατήρηση:** Η ανωτέρω άσκηση αφορά σε δοκιμή, η οποία είναι εφαρμόσιμη σε βιομηχανικό περιβάλλον).



Αζυγοσταθμία

μεταβολή συχνότητας ρεύματος

μεταβολή ταχύτητας περιστροφής μηχανής

μεταβολή συχνότητας διέγερσης συστήματοςμηχανή/έδραση

μεταβολή πλάτους φυγόκεντρων δυνάμεων λόγω αζυγοσταθμίας (αρμονική διέγερση)

Υπόθεση 1 **το σύστημα δεν διαθέτει στοιχείο απόσβεσης**

(η ορθότητά της θα κριθεί στη συνέχεια)

μετρούμενη συχνότητα στο max πλάτος (‘M’) ≅ συχνότητα συντονισμού

$$q_{\mathrm{M}} = \sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2} \quad \& \quad q_{\mathrm{M}} = \Omega_{\mathrm{M}} / \omega_n$$

Υπόθεση 2 **το σύστημα έχει πολύ μικρή απόσβεση: $\zeta \rightarrow 0$**

(η ορθότητά της θα κριθεί στη συνέχεια)

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_{\mathrm{M}} = 1 \quad \& \quad \omega_n \approx \Omega_{\mathrm{M}}}$$

από:

Υπόθεση 1 → **το σύστημα διαθέτει ΜΟΝΟ**

- ❑ **στοιχείο ελαστικότητας (ελατήριο/k)**
- ❑ **στοιχείο αδράνειας (μάζα/m)**

→ $\omega_n = \sqrt{k/m}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \Omega_M \approx \sqrt{k/m} \Rightarrow \Omega_M^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m \cdot \Omega_M^2$$

όπου:

$$\Omega_M = 600rpm = 600 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \frac{rad}{\sec} \Rightarrow \Omega_M = 62{,}8 \frac{rad}{\sec}$$

$$\Rightarrow \quad k = m \cdot \Omega_M^2 = 1000kg \cdot 62{,}8^2 (rad/\sec)^2 \Rightarrow \boxed{k = 3{,}944 \cdot 10^6 \frac{N}{m}}$$

στην μόνιμη κατάσταση ισχύει:
(εφαρμογή σταθερής δύναμης λόγω αζυγοσταθμίας)

$$X_{ST} = \frac{M_r \cdot \Omega^2}{k}$$

και:

$$H = \frac{X}{X_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2) + (2 \cdot \zeta \cdot q)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{X}{M_r \cdot \Omega^2 / k} = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2) + (2 \cdot \zeta \cdot q)^2}}$$

πλάτος ταλάντωσης

υπολογισμός από την μετρούμενη επιτάχυνση

υπολογισμός από την μετρούμενη επιτάχυνση

στην μόνιμη κατάσταση $\rightarrow$ ***η απόκριση του συστήματος ακολουθεί τη συχνότητα του διεγέρτη***

$$x(t) = x_p(t) = X \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

και η επιτάχυνση: $$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_p(t) = \boxed{-\Omega^2 \cdot X} \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

πλάτος επιτάχυνση

$$\mathrm{A} = \Omega^2 \cdot X$$

άρα

μέτρηση επιτάχυνσης με επιταχυνσιόμετρο Α & γνώση συχνότητας διέγερσης Ω

υπολογισμός πλάτους ταλάντωσης Χ

Άσκηση 2: ΛΥΣΗ

οπότε από:

$$\left.\begin{array}{l} H = \dfrac{X}{M_r \cdot \Omega^2 / k} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-q^2) + (2\cdot\zeta\cdot q)^2}} \\[2ex] \mathrm{A} = \Omega^2 \cdot X \end{array}\right\} \text{για περίπτωση ‘M’} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_M / \Omega_M^2}{M_r \cdot \Omega_M^2 / k} = \frac{1}{\sqrt{(1-q_M^2) + (2\cdot\zeta\cdot q_M)^2}} \overset{q_M \cong 1}{\Rightarrow} \frac{A_M / \Omega_M^2}{M_r \cdot \Omega_M^2 / k} = \frac{1}{2\cdot\zeta}$$

ομοίως για περίπτωση ‘Λ’

$$\frac{A_\Lambda / \Omega_\Lambda^2}{M_r \cdot \Omega_\Lambda^2 / k} = \frac{1}{\sqrt{(1-q_\Lambda^2) + (2\cdot\zeta\cdot q_\Lambda)^2}}$$

όπου:

$$\Omega_\Lambda = 1500 rpm = 1500 \cdot \frac{2\cdot\pi}{60} \frac{rad}{\sec} \Rightarrow \Omega_\Lambda = 156{,}5 \frac{rad}{\sec}$$

επίσης ισχύει:

$$\omega_n \approx \Omega_{\mathrm{M}}$$

$$q_\Lambda = \Omega_\Lambda / \omega_n \quad \Rightarrow \quad q_\Lambda = \Omega_\Lambda / \Omega_{\mathrm{M}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q_\Lambda = 156{,}5/62{,}8 \Rightarrow \boxed{q_\Lambda \approx 2{,}5}$$

περίπτωση ‘M’

$$\frac{A_M / \Omega_M^2}{M_r \cdot \Omega_M^2 / k} = \frac{1}{2 \cdot \zeta}$$

περίπτωση ‘Λ’

$$\frac{A_\Lambda / \Omega_\Lambda^2}{M_r \cdot \Omega_\Lambda^2 / k} = \frac{1}{\sqrt{(1-q_\Lambda^2) + (2 \cdot \zeta \cdot q_\Lambda)^2}}$$

$\Rightarrow$ ***2 εξισώσεις & 2 άγνωστοι M_r & ζ***

οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_M/\Omega_M^2}{M_r\cdot\Omega_M^2/k} = \dfrac{1}{2\cdot\zeta} \\[2em] \dfrac{A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2}{M_r\cdot\Omega_\Lambda^2/k} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-q_\Lambda^2)+(2\cdot\zeta\cdot q_\Lambda)^2}} \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{A_M/\Omega_M^2}{M_r\cdot\Omega_M^2/k}}{\dfrac{A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2}{M_r\cdot\Omega_\Lambda^2/k}} = \dfrac{\dfrac{1}{2\cdot\zeta}}{\dfrac{1}{\sqrt{(1-q_\Lambda^2)+(2\cdot\zeta\cdot q_\Lambda)^2}}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\dfrac{A_M/\Omega_M^2}{\cancel{M_r}\Omega_M^2/\cancel{K}}\right)}{\left(\dfrac{A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2}{\cancel{M_r}\Omega_\Lambda^2/\cancel{K}}\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{2\zeta}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}\right)} \Rightarrow \frac{\left(A_M/\Omega_M^2\Omega_M^2\right)}{\left(A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2\Omega_\Lambda^2\right)} = \frac{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}{2\zeta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4} = \frac{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}{2\zeta} \Rightarrow 2\zeta\left(\frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right) = \sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[2\zeta\left(\frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right)\right]^2 = \left(\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}\right)^2 \Rightarrow \left[2\zeta\left(\frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right)\right]^2 = \left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[2\zeta\left(\frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right)\right]^2 - \left(2q_\Lambda\zeta\right)^2 = \left(1-q_\Lambda^2\right)^2 \Rightarrow \zeta^2\left[\left(2\frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right)^2 - \left(2q_\Lambda\right)^2\right] = \left(1-q_\Lambda^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta^2 = \frac{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2}{\left[\left(2\dfrac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right)^2 - \left(2q_\Lambda\right)^2\right]} \Rightarrow \zeta = \pm\sqrt{\frac{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2}{\left[\left(2\left(\dfrac{A_M}{A_\Lambda}\right)\left(\dfrac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\right)^4\right)^2 - \left(2q_\Lambda\right)^2\right]}}$$

2 ρίζες αντίθετου προσίμου

θετική

⬇

υποκρίσιμη απόσβεση

αρνητική

⬇

ασταθής κατάσταση

(ενίσχυση πλάτος t $\rightarrow +\infty$)

ισχύει: $A_{max} = A_M = 4{,}93\ m/sec^2 \ll \infty \Rightarrow$ **ΟΧΙ αστάθεια στο σύστημα**

$\Downarrow$

θετική

⬇

διατηρείται

αρνητική

⬇

απορρίπτεται

οπότε:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2}{\left[\left(2\left(\frac{A_M}{A_\Lambda}\right)\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\right)^4\right)^2 - \left(2q_\Lambda\right)^2\right]}} = \sqrt{\frac{\left(1-2.5^2\right)^2}{\left[\left(2\times\left(\frac{4.93}{7.303}\right)\times\left(\frac{156.5}{62.8}\right)^4\right)^2 - \left(2\times 2.5\right)^2\right]}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{27.562500}{\left[\left(2\times 0.675065\times 2.492038^4\right)^2 - 25\right]}} = \sqrt{\frac{27.562500}{\left[2711.367950-25\right]}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\zeta \approx 0{,}1}$$

επομένως, προκύπτει μικρή τιμή για το λόγο απόσβεσης ζ.

(δεν χρειάζεται επαναπροσδιορισμός αυτού)

* διαφορετικά ...

$$\left(\frac{A_M / \Omega_M^2}{M_r \Omega_M^2 / k} \right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - q_M^2\right)^2 + \left(2 q_M \zeta\right)^2}}$$

$$q_M = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$ (σε συντονισμό)

$$\left(\frac{A_\Lambda / \Omega_\Lambda^2}{M_r \Omega_\Lambda^2 / k} \right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - q_\Lambda^2\right)^2 + \left(2 q_\Lambda \zeta\right)^2}}$$

$\Rightarrow$ **ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ**

3 εξισώσεις

&

3 άγνωστοι

(M_r, ζ, ω_n)

οπότε από:

$$\frac{A_M \big/ \Omega_M^2}{M_r \cdot \Omega_M^2 \big/ k} = \frac{1}{2\cdot\zeta} \Rightarrow M_r = \left(2\cdot\zeta\cdot\left(\frac{A_M \big/ \Omega_M^2}{\Omega_M^2 \big/ k}\right)\right) \Rightarrow M_r = \frac{2\cdot\zeta\cdot k\cdot A_M}{\Omega_M^4} =$$

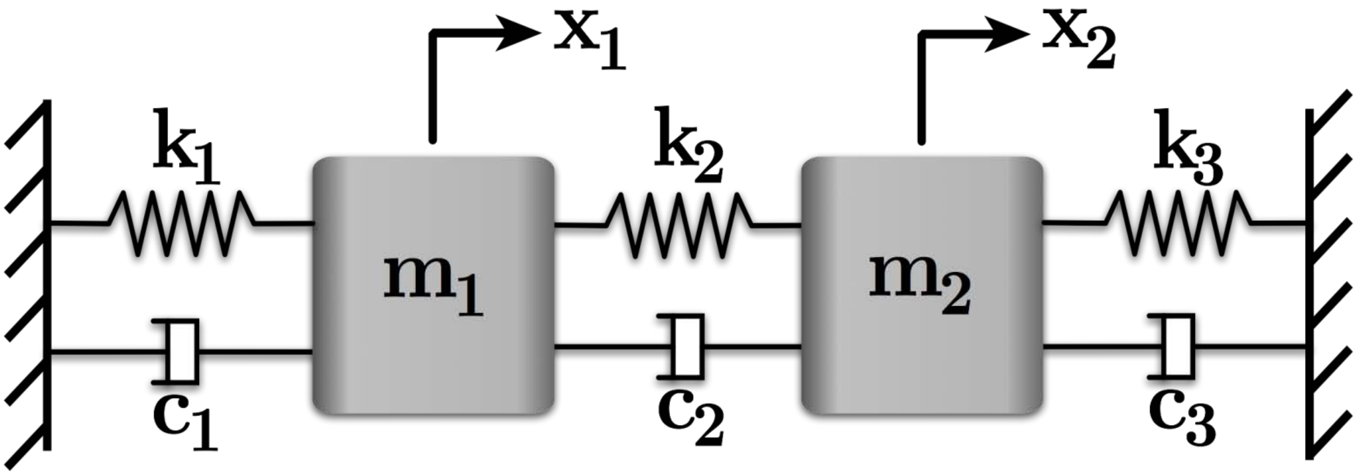
$$= \frac{2\cdot 0{,}1\cdot(3{,}94\cdot 10^6)\cdot 4{,}93}{62{,}8^4} = \frac{3{,}885\cdot 10^6}{15{,}554\cdot 10^6} \Rightarrow M_r = 0{,}2497kgm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M_r \approx 0{,}25kgm}$$

επίσης,
από το λόγος απόσβεσης: $\zeta = \dfrac{c}{2\cdot\omega_n\cdot m} \Rightarrow c = 2\cdot\omega_n\cdot\zeta = 2\cdot 0{,}1\cdot 62{,}8\cdot 1000\dfrac{N\sec}{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1{,}256\cdot 10^4\,\frac{N\sec}{m}}$$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr