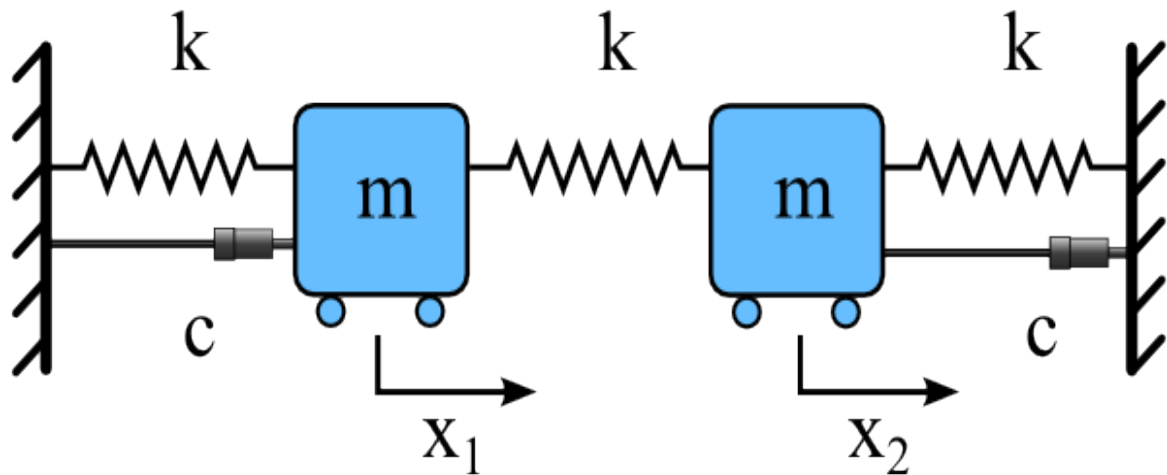




# ΑΣΚΗΣΗ 3





Copyright © E.M.Π. - 2016

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών – Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών – κτ. Μ – αιθ. Μ002  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

**Απαγορεύεται** η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας παρουσίασης, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό.

**Επιτρέπεται** η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Πληροφορίες

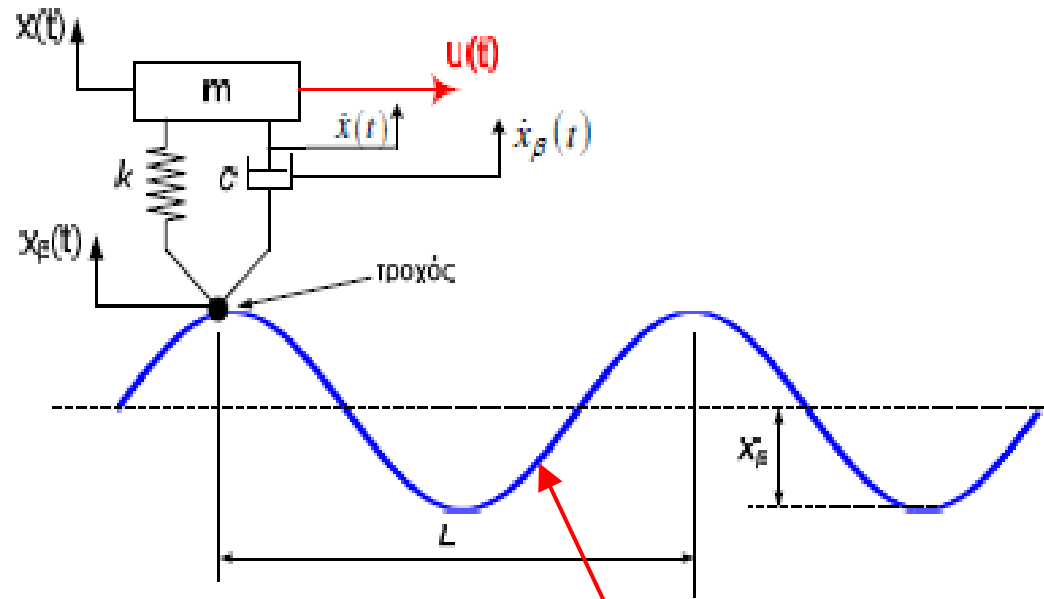
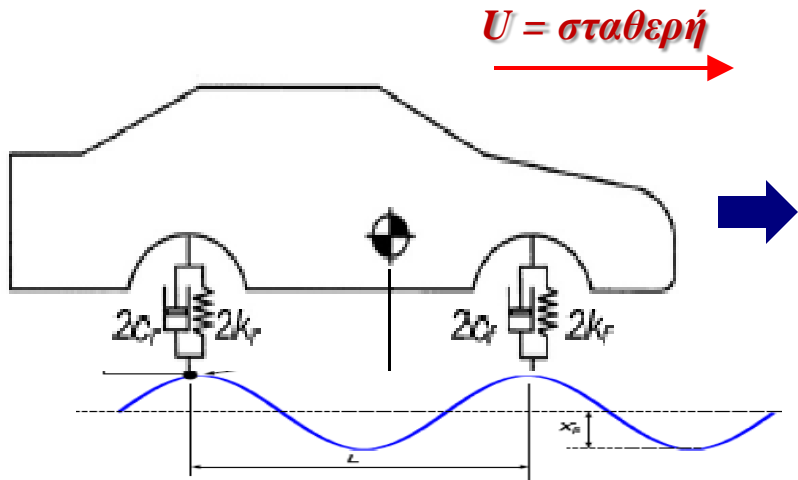
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, [antogian@central.ntua.gr](mailto:antogian@central.ntua.gr), 210-7721524

Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, [chryiako@central.ntua.gr](mailto:chryiako@central.ntua.gr), 210-7722332



Έστω όχημα μάζας  $m = 1000 \text{ kg}$  κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v = 144 \text{ km/h}$  επί οδοστρώματος αρμονικής διαμόρφωσης. Έστω ότι η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του οδοστρώματος ισούται με  $L = 12.56 \text{ m}$ , ενώ το πλάτος της αρμονικής διαμόρφωσης είναι  $X_\beta = 5 \text{ cm}$  (δηλαδή το βάθος λακκούβας είναι  $2X_\beta$ ). Το όχημα θεωρείται, προσεγγιστικά, ως δυναμικό σύστημα  $m - c - k$  ενός βαθμού ελευθερίας, με σταθερά ελατηρίου  $k = 10^5 \text{ N/m}$  και στοιχείο απόσβεσης με σταθερά  $c = 4 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ . Ζητούνται:

- (i) το πλάτος  $X_{144}$  των κατακορύφων μετατοπίσεων (κατακορύφων ταλαντώσεων) του οχήματος, όταν αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v = 144 \text{ km/h}$
- (ii) η σταθερή ταχύτητα  $U_\Sigma$ , με την οποία, όταν κινείται το όχημα, εμφανίζεται συντονισμός, καθώς και το πλάτος  $X_\Sigma$  της κατακόρυφης απόκρισης (κατακόρυφης ταλάντωσης) του οχήματος στην περίπτωση αυτή
- (iii) το πλάτος  $X'_\Sigma$  της κατακόρυφης ταλάντωσης του οχήματος στην περίπτωση συντονισμού, εάν χαθεί το 50% της ικανότητας απόσβεσης της ανάρτησης του οχήματος (δηλαδή, όταν συμβεί  $c' = c/2$ , ή, ισοδύναμα, αστοχήσουν τα μισά στοιχεία απόσβεσης του οχήματος).



## υπόθεση 1

απλοποιημένη προσέγγιση οχήματος → σύστημα  $m-c-k$  1 B.E.

- ❑ μάζα σημειακή, όχι κατανεμημένη
- ❑ συνολική δράση ανάρτησης  $\cong$  δράση 1 ελατηρίου & 1 αποσβεστήρα



## υπόθεση 2

ο τροχός ακολουθεί τη διαμόρφωση του εδάφους



ο τροχός εκτελεί κατακόρυφη μετατόπιση  $x_\beta$

το πλάτος της κατακόρυφης μετατόπισης του οχήματος = ύψος αρμονικής διαμόρφωσης οδοστρώματος

$$x_\beta(t) = X_\beta(t) \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

ανάλογη της ταχύτητας  $U$  και του μήκους της λακούβας

## υπόθεση 3

η βαρύτητα αποτελεί στατική υπέρθεση



δεν αποτελεί αιτία ταλάντωσης



## ερώτημα (i) ...

ο συντελεστής μεταδοτικότητας **TR** είναι:

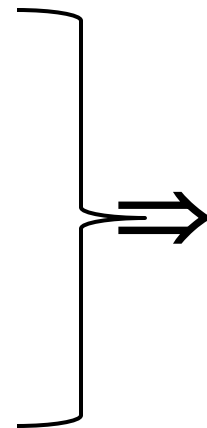
$$TR = \left( \frac{X_{144}}{X_{\beta}} \right) = \left( \frac{\sqrt{1 + (2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + (2\zeta q)^2}} \right) \Rightarrow X_{144} = X_{\beta} \left( \frac{\sqrt{1 + (2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + (2\zeta q)^2}} \right)$$

η συχνότητα  **$\Omega$**  της κατακόρυφης μετατόπισης του οχήματος ισούται με τη συχνότητα με την οποία το όχημα συναντά τις λακούβες:

το όχημα κινείται από τη μια κορυφή στην άλλη:

$$\Omega = \left( \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$v = \left( \frac{L}{T} \right) \Rightarrow T = \left( \frac{L}{v} \right)$$





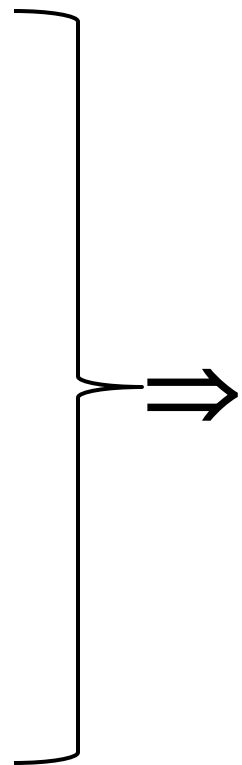
$$\Rightarrow \Omega = 2\pi \left( \frac{v}{L} \right) = 2 \times 6.28 \times \left( 144 \times \frac{1000}{3600} \right) \times \frac{1}{12.56} \Rightarrow \Omega = 20 \frac{rad}{sec}$$

η φυσική συχνότητα του συστήματος είναι:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^5}{1000}} \frac{rad}{sec} \Rightarrow \omega_n = 10 \frac{rad}{sec}$$

ο λόγος  $q$  είναι:  $q = \frac{\Omega}{\omega_n}$

$$\Rightarrow q = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{20}{10} \Rightarrow q = 2$$





ο λόγος απόσβεσης  $\zeta$  είναι:  $\zeta = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_n} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 1000 \cdot 10} \Rightarrow \zeta = 0,2$

επομένως από:

$$X_{144} = X_{\beta} \left( \frac{\sqrt{1 + (2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + (2\zeta q)^2}} \right) \quad \begin{array}{l} \zeta = 0,2 \\ \Rightarrow \\ q = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow X_{144} = X_{\beta} \left( \frac{\sqrt{1 + (2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + (2\zeta q)^2}} \right) = 5 \times \left( \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0.2 \times 2)^2}}{\sqrt{(1 - 2^2)^2 + (2 \times 0.2 \times 2)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{144} = 5 \times \left( \frac{\sqrt{1 + 0.64}}{\sqrt{9 + 0.64}} \right) = 5 \times \sqrt{\frac{1.64}{9.64}} \Rightarrow X_{144} = 2.062 \text{ cm}$$





ερώτημα (ii) ...

σε συντονισμό  $\Rightarrow q = 1$

ο λόγος  $q$  είναι:  $q = \frac{\Omega}{\omega_n}$

$$\Rightarrow q = \frac{\Omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \Omega = \omega_n \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} = \omega_n$$

επίσης, το όχημα κινείται από τη μια κορυφή στην άλλη με:  $v = \left( \frac{L}{T} \right) \Rightarrow T = \left( \frac{L}{v} \right)$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{\left( \frac{L}{U_\Sigma} \right)} = \omega_n \Rightarrow U_\Sigma = \left( \frac{L}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \omega_n$$

σταθερή ταχύτητα οχήματος  
υπό συντονισμό

$\Rightarrow \dots$

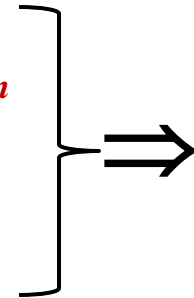


$$U_{\Sigma} = \left( \frac{L}{2} \cdot \pi \right) \cdot \omega_n = \frac{12,56}{6,28} \cdot 10 \frac{m}{sec} \Rightarrow U_{\Sigma} = 20 \frac{m}{sec} = 20 \cdot \frac{3600}{1000} \frac{km}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{\Sigma} = 72 \frac{km}{h}$$

#### Παρατήρηση ...

μαλακές αναρτήσεις  $\Rightarrow$  αναρτήσεις χαμηλής ιδιοσυχνότητας  $\omega_n$   
κίνηση σε ανώμαλο οδόστρωμα  
υψηλή ταχύτητα



υψηλή συχνότητα εξωτερικής διέγερσης  $\Rightarrow$  υψηλή τιμή  $q \Rightarrow$   
το όχημα δεν ταλαντώνεται



*επίσης, ο συντελεστής μεταδοτικότητας στο συντονισμό:*

$$TR = \left( \frac{X_{\Sigma}}{X_{\beta}} \right) = \left( \frac{\sqrt{1 + (2\zeta)^2}}{\sqrt{(2\zeta)^2}} \right) \Rightarrow X_{\Sigma} = X_{\beta} \left( \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2}}{\sqrt{4\zeta^2}} \right) \Rightarrow$$

$$X_{\Sigma} = 5 \times \left( \frac{\sqrt{1 + 4 \times 0.2^2}}{\sqrt{4 \times 0.2^2}} \right) = 5 \times \left( \frac{\sqrt{1 + 0.16}}{\sqrt{0.16}} \right) = 5 \times \sqrt{\frac{1.16}{0.16}} \Rightarrow X_{\Sigma} = 13.462 \text{ cm}$$

*μετατόπιση οχήματος  
υπό συντονισμό*



## ερώτημα (iii) ...

50% απώλεια ικανότητας απόσβεσης  $\Rightarrow c' = 0,5 \cdot c$

ο λόγος απόσβεσης  $\zeta$  είναι:  $\zeta = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_n}$

}  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \zeta' = 0,5 \cdot \zeta = 0,5 \cdot 0,2 \Rightarrow \zeta' = 0,1$$

οπότε, από συντελεστή μεταδοτικότητας:

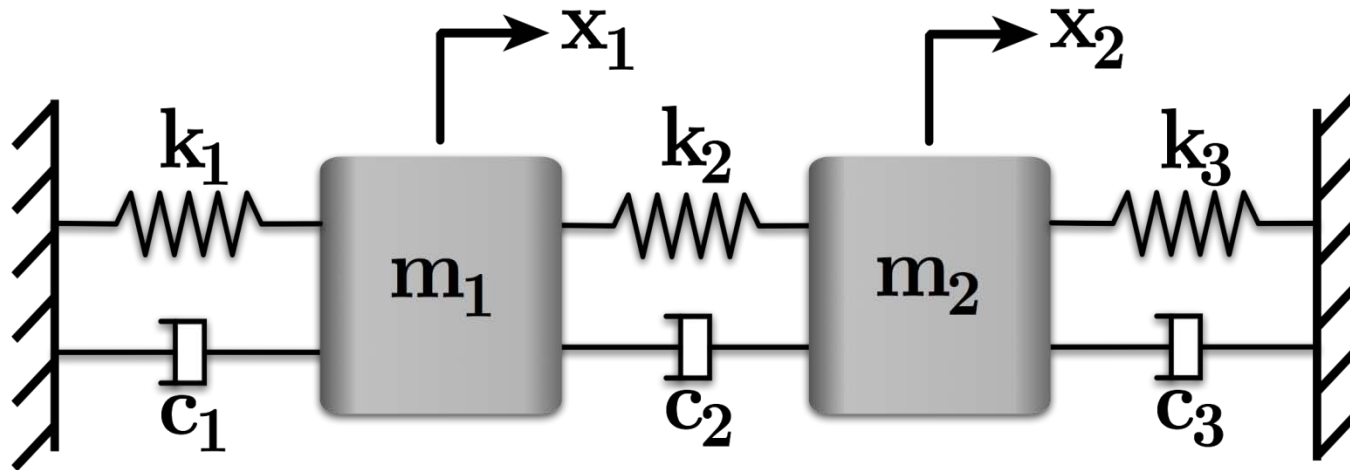
$$X'_\Sigma = X_\beta \left( \frac{\sqrt{1+4\zeta'^2}}{\sqrt{4\zeta'^2}} \right) = 5 \times \left( \frac{\sqrt{1+4 \times 0,1^2}}{\sqrt{4 \times 0,1^2}} \right) = 5 \times \left( \frac{\sqrt{1+0,04}}{\sqrt{0,04}} \right) = 5 \times \left( \sqrt{\frac{1,04}{0,04}} \right) \Rightarrow$$

$$X'_\Sigma = 5 \times \left( \sqrt{\frac{1,04}{0,04}} \right) \Rightarrow X'_\Sigma = 25,495 \text{ cm} \Rightarrow$$

**το όχημα θα χάσει επαφή με το οδόστρωμα**



*Ευχαριστώ για την  
προσοχή σας!*



*Εργαστήριο  
Δυναμικής & Κατασκευών*

*Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr*

*Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr*