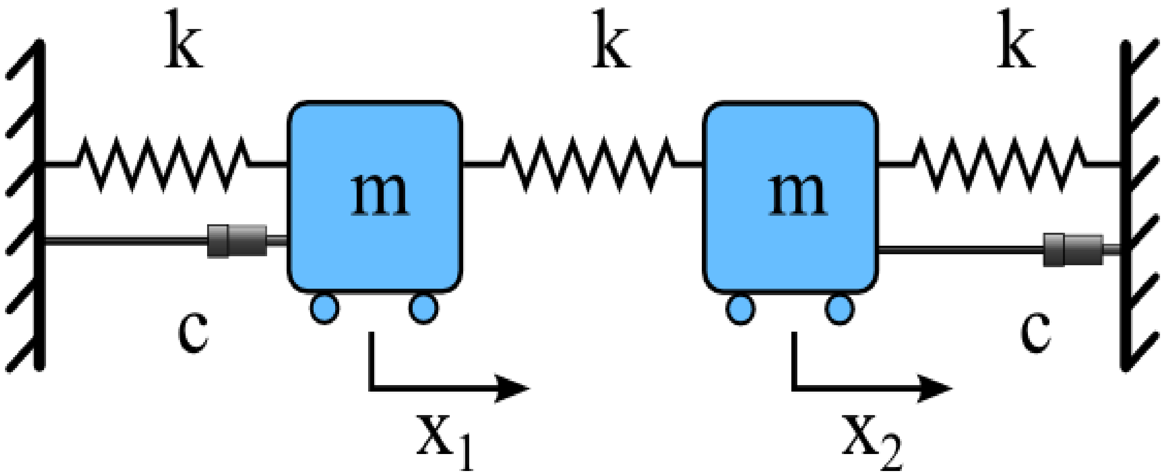
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

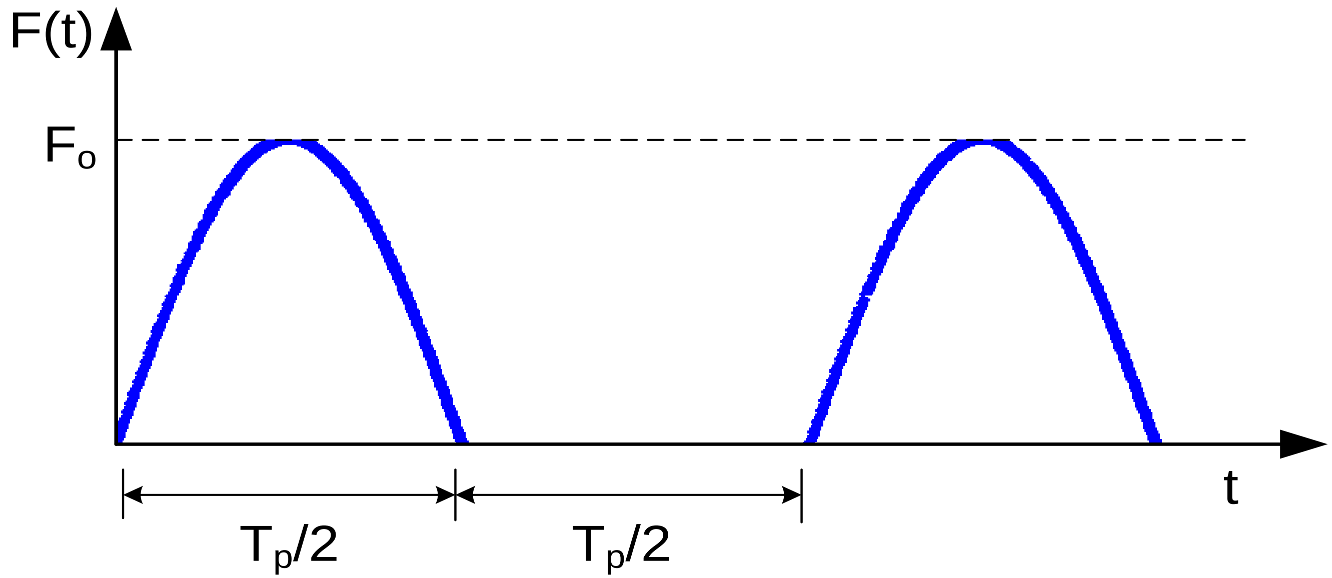
ΑΣΚΗΣΗ 5



έκδοση ***DYNI-EXC05-2016b***

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

***F(t)* η διέγερση συστήματος** $F(t)=\begin{cases} F_o \sin(\Omega t) & 0 \le t \le T_p/2 \\ 0 & T_p/2 < t \le T_p \end{cases}$



το σύστημα έχει φυσική συχνότητα $\omega = \left(\dfrac{8\pi}{3T_p}\right)$ ***και*** $c = 0$

? ***μόνιμη απόκριση του συστήματος σε ανάπτυγμα κατά Fourier και με επαρκές, για τεχνολογικούς σκοπούς, πλήθος όρων***

A

ανάπτυξη της εξωτερικής διέγερσης F(t) του συστήματος κατά Fourier

$$F(t) = \boxed{a_o} + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{a_n} \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{b_n} \sin(n\Omega t)$$

υπολογισμός για διάφορες τιμές του n

- ***υπολογισμός a_o***

$$t \in \left[T_p/2 \,, T_p \right] \Rightarrow F(t)=0$$

$$\boxed{a_o = \left(\frac{1}{T_p}\right)\int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t)\,dt} = \left(\frac{F_o}{T_p}\right)\int_0^{T_p} \sin(\Omega t)\,dt = \left(\frac{1}{T_p}\right)\int_0^{T_p/2} F_o \sin(\Omega t)\,dt + \cancel{\left(\frac{1}{T_p}\right)\int_{T_p/2}^{T_p} F_o \sin(\Omega t)\,dt}$$

από ❶

θέτουμε $\tau = \Omega t \Rightarrow d\tau = \Omega dt \Rightarrow dt = \left(\dfrac{dt}{\Omega}\right)$

$$\tau = \Omega t = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right) t \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow \tau = 0 \\ t = \left(T_p/2\right) \rightarrow \tau = \left(\dfrac{2\pi}{T_p}\right)\left(\dfrac{T_p}{2}\right) = \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \ldots$

$$\Rightarrow \ldots \quad a_o = \left(\frac{F_o}{T_p}\right)\int_0^{\pi} \sin\tau \left(\frac{d\tau}{\Omega}\right) = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi} \sin\tau\, d\tau$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\left(\frac{1}{a}\right)(\cos ax) + C$$

$\Rightarrow \ldots$

$$\Omega T_p = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right) T_p \Rightarrow \Omega T_p = 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad a_o = \left(\frac{F_o}{T_p}\right)\int_0^{\pi} \sin\tau \left(\frac{d\tau}{\Omega}\right) = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi} \sin\tau\, d\tau = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[-\cos\tau\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(-\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[\cos\pi - \cos 0\right] = \left(-\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[-1-1\right] = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right) \overset{\Omega T_p = 2\pi}{\Rightarrow} \boxed{a_o = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)}$$

- **υπολογισμός a_n**

$$\boxed{a_n = \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p} F(t)\cos(n\Omega t)\,dt} = \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t)\cos(n\Omega t)\,dt =$$

$$t \in \left[T_p/2, T_p\right] \Rightarrow F(t)=0$$

$$= \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p/2} F_o \sin(\Omega t)\cos(n\Omega t)\,dt + \cancel{\left(\frac{2}{T_p}\right)\int_{T_p/2}^{\pi} F_o \sin(\Omega t)\cos(n\Omega t)\,dt}$$

θέτουμε $\tau = \Omega t \Rightarrow d\tau = \Omega dt \Rightarrow dt = \left(\dfrac{dt}{\Omega}\right)$

$$\tau = \Omega t = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right)t \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow \tau = 0 \\ t = \left(T_p/2\right) \rightarrow \tau = \left(\dfrac{2\pi}{T_p}\right)\left(\dfrac{T_p}{2}\right) = \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ...

$$a_n = \left(\frac{2F_o}{T_p}\right)\int_0^{\pi}\sin(\tau)\cos(n\tau)\left(\frac{dt}{\Omega}\right) = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi}\sin(\tau)\cos(n\tau)\,d\tau$$

b = 1
a = n
τ = x
$\Rightarrow$

ισχύει …

$$\int \sin(bx)\cos(ax)\,dx = \frac{\cos\left[(a-b)x\right]}{2(a-b)} - \frac{\cos\left[(a+b)x\right]}{2(a+b)} + C, a \neq b$$

$$\Rightarrow \ldots \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\left[\frac{\cos\left[(n-1)x\right]}{2(n-1)} - \frac{\cos\left[(n+1)x\right]}{2(n+1)}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{\cancel{2}F_o}{\Omega T_p}\right)\left[\frac{\cos(nx)\cos(x)+\sin(nx)\sin(x)}{\cancel{2}(n-1)} - \frac{\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x)}{\cancel{2}(n+1)}\right]_0^{\pi} =$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[(n+1)\frac{\cos(nx)\cos(x)+\sin(nx)\sin(x)}{(n-1)}-(n-1)\frac{\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x)}{(n+1)}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[\frac{(n+1)\left[\cos(nx)\cos(x)+\sin(nx)\sin(x)\right]-(n-1)\left[\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x)\right]}{(n+1)(n-1)}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[\frac{(n+1-n+1)\left(\cos(nx)\cos(x)\right)+(n+1+n-1)\left(\sin(nx)\sin(x)\right)}{(n+1)(n-1)}\right]_0^{\pi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left[\frac{2\left(\cos(nx)\cos(x)\right)+2n\left(\sin(nx)\sin(x)\right)}{(n^2-1)}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left(\frac{1}{(n^2-1)}\right)\left[2\left(\cos(n\pi)\cos(\pi)\right)+2n\,\cancel{\left(\sin(n\pi)\sin(\pi)\right)}\right]$$

$$-\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left(\frac{1}{(n^2-1)}\right)\left[2\left(\cos(n0)\cos(0)\right)+2n\,\cancel{\left(\sin(n0)\sin(0)\right)}\right]=\ \ldots$$

$$\ldots = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left(\frac{1}{(n^2-1)}\right)\left[2(\cos(n\pi)\cos(\pi)) - 2(\cos(0)\cos(0))\right] =$$

$$= \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left(\frac{1}{(n^2-1)}\right)\left[2(\cos(n\pi))(-1) - 2\right] = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left(\frac{(-2)}{(n^2-1)}\right)\left[\cos(n\pi)+1\right] =$$

$$= \left(\frac{F_o}{2\pi}\right)\left(\frac{2}{(1-n^2)}\right)\left[\cos(n\pi)+1\right] = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[\cos(n\pi)+1\right]$$

για n περιττός ...

$$a_n = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[\boxed{\cos(n\pi)}+1\right] = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[\boxed{\cos(\pi)}+1\right] = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[-1+1\right] \Rightarrow a_n = 0$$

για n άρτιος ...

$$a_n = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[\boxed{\cos(n\pi)}+1\right] = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[\boxed{\cos(0)}+1\right] = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{1}{(1-n^2)}\right)\left[1+1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{(1-n^2)}\right)\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$$

άρα ...

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ περιττός} \\ \left(\dfrac{2}{\left(1-n^2\right)}\right)\left(\dfrac{F_o}{\pi}\right) & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

- **υπολογισμός b_n**

$$\boxed{b_n = \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p} F(t)\sin(n\Omega t)\,dt} = \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t)\sin(n\Omega t)\,dt =$$

$$t \in \left[T_p/2 , T_p \right] \Rightarrow F(t)=0$$

$$= \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p/2} F_o \sin(\Omega t)\sin(n\Omega t)\,dt + \cancel{\left(\frac{2}{T_p}\right)\int_{T_p/2}^{\pi} F_o \sin(\Omega t)\sin(n\Omega t)\,dt}$$

θέτουμε $\tau = \Omega t \Rightarrow d\tau = \Omega dt \Rightarrow dt = \left(\frac{dt}{\Omega}\right)$

$$\tau = \Omega t = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right) t \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow \tau = 0 \\ t = \left(T_p/2\right) \rightarrow \tau = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right)\left(\frac{T_p}{2}\right) = \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \left(\frac{2F_o}{T_p}\right)\int_0^{\pi} \sin(\tau)\sin(n\tau)\left(\frac{dt}{\Omega}\right) = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi} \sin(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau$$

- **για n=1**

$$b_n = \left(\frac{2F_o}{T_p}\right)\int_0^{\pi} \boxed{\sin(\tau)\sin(n\tau)} \left(\frac{dt}{\Omega}\right) = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi}\sin(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau \xrightarrow{n=1}$$

$$\rightarrow b_n = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi}\sin(\tau)\sin(\tau)\,d\tau = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi}\sin^2(\tau)\,d\tau$$

ισχύει

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi}\sin^2(\tau)\,d\tau \\ \int \sin^2(ax)\,dx &= \frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}+C \end{aligned}\right\} \xrightarrow{a=1} b_n = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{\tau}{2}-\frac{\sin(2\tau)}{4}\right]_0^{\pi}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\cancel{\sin(2\pi)}}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{\cancel{\sin(2\times 0)}}{4}\right)\right]\right\} = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\Omega T_p = 2\pi}$$

$$\rightarrow b_n = \left(\frac{\cancel{2}F_o}{\cancel{2}\cancel{\pi}}\right)\left(\frac{\cancel{\pi}}{2}\right) \Rightarrow b_n = \left(\frac{F_o}{2}\right)$$

- ***για n>1***

ισχύει

$$\sin(\tau)\sin(n\tau)=\frac{2\sin(\tau)\sin(n\tau)}{2}=$$

$$=\frac{\sin(\tau)\sin(n\tau)+\cos(\tau)\cos(n\tau)+\sin(\tau)\sin(n\tau)-\cos(\tau)\cos(n\tau)}{2}=$$

$$=\frac{\left[\sin(\tau)\sin(n\tau)+\cos(\tau)\cos(n\tau)\right]-\left[\cos(\tau)\cos(n\tau)-\sin(\tau)\sin(n\tau)\right]}{2}=$$

$$=\frac{\cos(n\tau-\tau)-\cos(n\tau+\tau)}{2}=\frac{\cos\left[(n-1)\tau\right]}{2}-\frac{\cos\left[(n+1)\tau\right]}{2}$$

$$b_n = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\int_0^{\pi} \boxed{\sin(\tau)\sin(n\tau)\,d\tau} = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\int_0^{\pi} \boxed{\left(\frac{\cos\left[(n-1)\tau\right]}{2} + \frac{\cos\left[(n+1)\tau\right]}{2}\right)} d\tau\right\} =$$

$$= \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\int_0^{\pi} \frac{\cos\left[(n-1)\tau\right]}{2} d\tau + \int_0^{\pi} \frac{\cos\left[(n+1)\tau\right]}{2} d\tau\right\} =$$

$$= \left(\frac{\cancel{2}F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{\sin\left[(n-1)\tau\right]}{\cancel{2}(n-1)}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin\left[(n+1)\tau\right]}{\cancel{2}(n+1)}\right]_0^{\pi}\right\} =$$

$$= \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{\sin\left[(n-1)\tau\right]}{(n-1)}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin\left[(n+1)\tau\right]}{(n+1)}\right]_0^{\pi}\right\} =$$

$$= \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{\sin\left[(n-1)\pi\right]}{(n-1)} - \frac{\sin\left[(n-1)0\right]}{(n-1)}\right] + \left[\frac{\sin\left[(n+1)\pi\right]}{(n+1)} - \frac{\sin\left[(n+1)0\right]}{(n+1)}\right]\right\} =$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{\sin\left[(n-1)\pi\right]}{(n-1)}-\cancel{\frac{\sin\left[(n-1)0\right]}{(n-1)}}\right]+\left[\frac{\sin\left[(n+1)\pi\right]}{(n+1)}-\cancel{\frac{\sin\left[(n+1)0\right]}{(n+1)}}\right]\right\}=$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{\sin\left[(n-1)\pi\right]}{(n-1)}+\frac{\sin\left[(n+1)\pi\right]}{(n+1)}\right]\right\}=$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{(n+1)\sin\left[(n-1)\pi\right]+(n-1)\sin\left[(n+1)\pi\right]}{(n+1)(n-1)}\right]\right\}=$$

$$=\left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right)\left\{\left[\frac{(n+1)\cancel{\sin\left[(n-1)\pi\right]}+(n-1)\cancel{\sin\left[(n+1)\pi\right]}}{\left(n^2-1\right)}\right]\right\}\Rightarrow b_n=0$$

άρα ...

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{F_o}{2}, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

υπολογισμός των a_o, a_n και b_n για διάφορες τιμές του n

n	a_o	a_n	b_n	$\left(a_2/a_{n+2}\right)$
0	$\left(F_o/\pi\right)$	-------	-------	-------
1	-------	0	$\left(F_o/2\right)$	-------
2	-------	$-\left(F_o/\pi\right)\left(2/3\right) \approx -0.667\left(F_o/\pi\right)$	0	-------
3	-------	0	0	-------
4	-------	$-\left(F_o/\pi\right)\left(2/15\right) \approx -0.133\left(F_o/\pi\right)$	0	5.015
5	-------	0	0	-------
6	-------	$-\left(F_o/\pi\right)\left(2/35\right) \approx -0.0571\left(F_o/\pi\right)$	0	11.681
7	-------	0	0	-------
8	-------	$-\left(F_o/\pi\right)\left(2/65\right) \approx -0{,}03077\left(F_o/\pi\right)$	0	21.676

οι όροι για $n>6$ έχουν αμελητέα συνεισφορά

⬇

το ανάπτυγμα της F(t) κατά Fourier προκύπτει μέχρι και τον όρο για $n=6$

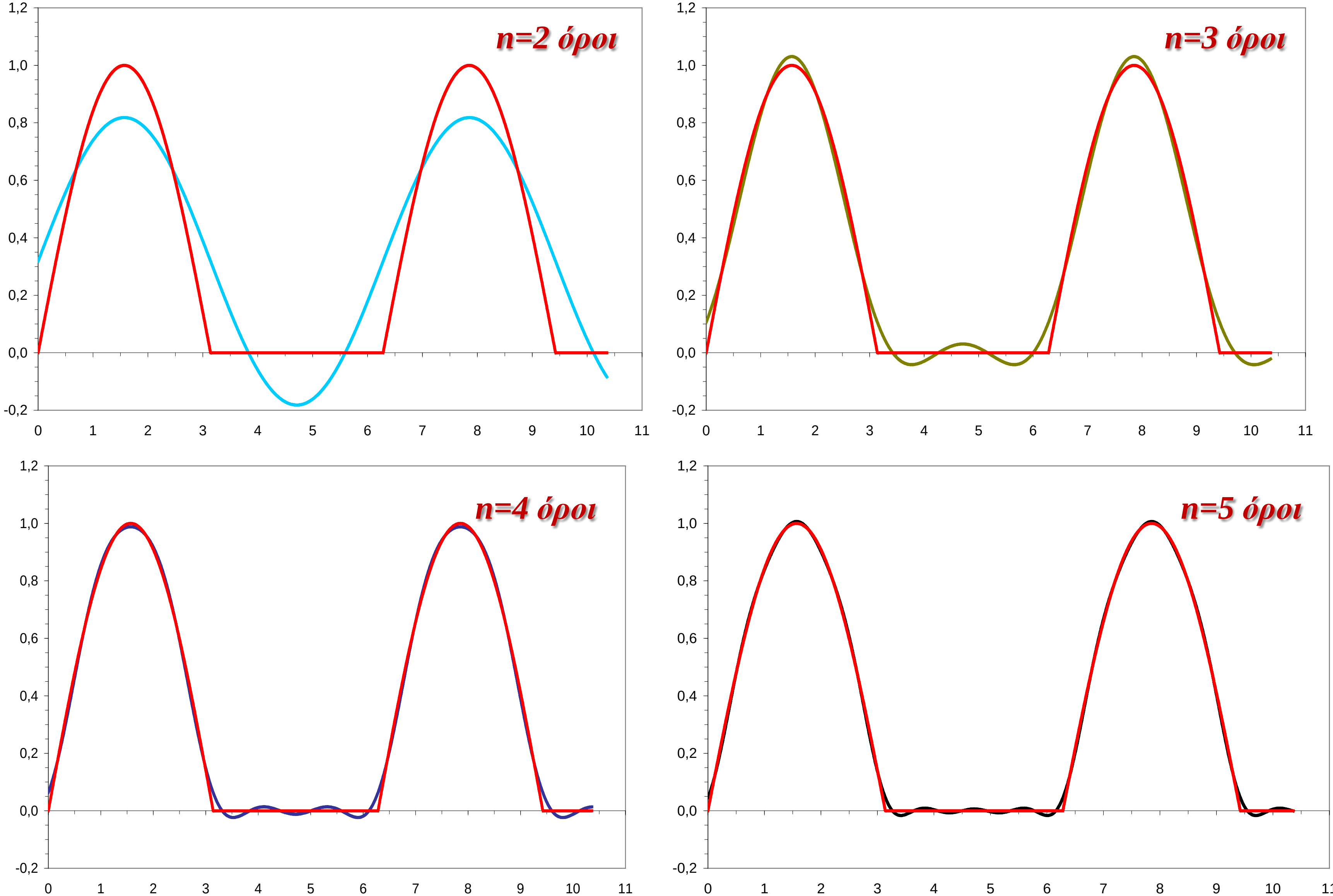
άρα $$F(t)=\left(\frac{F_o}{\pi}+\frac{F_o}{2}\sin(\Omega t)-\frac{2F_o}{3\pi}\cos(2\Omega t)-\frac{2F_o}{15\pi}\cos(4\Omega t)-\frac{2F_o}{35\pi}\cos(6\Omega t)\right)\Rightarrow$$

$$F(t)=F_o\left(\underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\alpha_o}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{b_1}\sin(\Omega t)\underbrace{-\frac{2}{3\pi}}_{\alpha_2}\cos(2\Omega t)\underbrace{-\frac{2}{15\pi}}_{\alpha_4}\cos(4\Omega t)\underbrace{-\frac{2}{35\pi}}_{\alpha_6}\cos(6\Omega t)\right)$$

- ***ανάπτυγμα μίας σειράς Fourier, στην οποία συμμετέχει μικρό πλήθος όρων (όχι άπειρο)***
- ***ο πρώτος όρος της σειράς είναι μία σταθερή ποσότητα***
- ***οι υπόλοιποι τέσσερεις όροι είναι αρμονικές ποσότητες***

Άσκηση 5: ΛΥΣΗ

Προσέγγιση της διέγερσης χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος όρων



B *για κάθε έναν όρο του αναπτύγματος (συνιστώσα διέγερσης F(t)) υπολογίζεται η αντίστοιχη συνιστώσα της μόνιμης απόκρισης του συστήματος (συνιστώσα απόκρισης)*

... υπό την επιβολή

αρμονικής διέγερσης — ***χρονικά σταθερής δύναμης***

μόνιμη απόκριση συστήματος

αρμονική απόκριση — ***στατική απόκριση***

$$x_n = \underbrace{X_n}_{\dots ?} \cos\left(\Omega_n t - \underbrace{\vartheta_n}_{\dots ?}\right) \qquad X_{ST} = \left(\frac{F_{ST}}{k}\right)$$

... όπου

$$\vartheta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\omega\Omega_n}{\omega^2-\Omega_n^2}\right) \xrightarrow{q_n=\left(\frac{\Omega_n}{\omega}\right)} \vartheta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta q_n}{1-q_n^2}\right) \quad ❷$$

υπολογισμό του πλάτους ταλάντωσης ...

ισχύει (συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης)

$$\mathrm{H} = \left(\frac{X}{X_{st}} \right) \Rightarrow X = \mathrm{H}\, X_{st}$$

όταν στο σύστημα επιβληθεί **1** *εξωτερική* ***αρμονική*** *διέγερση*

όταν επιβάλονται **n** *εξωτερικές αρμονικές διεγέρσεις, τότε για κάθε μία από τις διεγέρσεις αυτές ισχύει:*

$$X_n = \mathrm{H}_n\, X_{ST,n} \qquad ❸$$

⬇

οφείλεται στην επιβολή της στατικής δύναμης $F_{ST,n}$ *λόγω της* **n** *αρμονικής συνιστώσας της εξωτερικής διέγερσης* **F(t)** *και ισχύει:*

$$\boxed{F_{ST,n} = F_n}$$

οπότε από ...

$$F(t) = F_o\left(\boxed{\frac{1}{\pi}} + \boxed{\frac{1}{2}}\sin(\Omega t) - \boxed{\frac{2}{3\pi}}\cos(2\Omega t) - \boxed{\frac{2}{15\pi}}\cos(4\Omega t) - \boxed{\frac{2}{35\pi}}\cos(6\Omega t)\right)$$

α_o b_1 α_2 α_4 α_6

$$F_1 = (1/2)F_o \xrightarrow{b_1 = (1/2)} F_1 = b_1 F_o$$

$$F_2 = (-2/3\pi)F_o \xrightarrow{\alpha_2 = (-2/3\pi)} F_2 = \alpha_2 F_0$$

$$F_4 = (-2/15\pi)F_o \xrightarrow{\alpha_4 = (-2/15\pi)} F_4 = \alpha_4 F_0$$

$$F_6 = (-2/35\pi)F_o \xrightarrow{\alpha_6 = (-2/35\pi)} F_6 = \alpha_6 F_0$$

οπότε η στατική δύναμη είναι ...

$$F_{ST,n} = F_n = \alpha_n F_o$$

έτσι, το στατικό πλάτος $X_{ST,n}$ που οφείλεται στην επιβολή στατικής δύναμης $F_{ST,n}$ είναι:

$$X_{ST,n} = \frac{F_{ST,n}}{k} = \frac{\alpha_n F_o}{k} \xrightarrow{X_{ST} = (F_o/k)} X_{ST,n} = \alpha_n X_{ST} \qquad ❹$$

υπολογισμό του συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης ...

... είναι: $$\mathrm{H}_n = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q_n^2\right)^2 + \left(2\zeta q_n\right)^2}} \overset{\zeta=0}{\Rightarrow} \mathrm{H}_n = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q_n^2\right)^2}} \qquad ❺$$

για κάθε n συνιστώσα ισχύει: $$q_n = \left(\frac{\Omega_n}{\omega}\right)$$

και $\omega = \left(\dfrac{8\pi}{3T_p}\right)$ ***και*** $\Omega_n = n\Omega$ ***και*** $\Omega = \left(\dfrac{2\pi}{T_p}\right)$

$\Rightarrow$ **...**

$$\Rightarrow \ldots \quad q_n = \left(\frac{\Omega_n}{\omega}\right) = \left(\frac{n\Omega}{\omega}\right) = \left(\frac{n\left(\cancel{2\pi}/\cancel{T_p}\right)}{\left(\cancel{8\pi}/3\cancel{T_p}\right)}\right) = n\left(\frac{6}{8}\right) \Rightarrow q_n = 0.75n \quad \text{❻}$$

από ❸ … ❻

$$X_n = \alpha_n \left(\frac{F_o}{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q_n^2\right)^2 + \left(2\zeta q_n\right)^2}}\right)$$

πλάτος της ταλάντωσης

- ***για τον 1º όρο του αναπτύγματος (σταθερός όρος):***

$$F_{ST} = \left(F_o / \pi\right)$$

μέτρο της στατικής δύναμης

αντίστοιχη συνιστώσα μόνιμης απόκρισης

$$X_0 = X_{ST} = \left(\frac{F_o}{k}\right)$$

- ***για τον 2º όρο του αναπτύγματος:***

για n=1

$$F_{ST,n} = F_{ST,1} = \left(F_o / 2.\ \right)$$

$$\Omega_1 = 1\Omega = \Omega$$

$$q_n = 0.75n \xrightarrow{n=1} q_1 = 0.75$$

$$\vartheta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta q_1}{1-q_1^2}\right) \xrightarrow[q_1=0.75<1]{\zeta=0} \vartheta_1 = 0$$

οπότε, το πλάτος της αντίστοιχης συνιστώσας απόκρισης X_1

$$X_1 = \left(\frac{F_{ST,1}}{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q_1^2\right)^2}}\right) = \left(\frac{\left({}^{F_o}\!/_{2.}\right)}{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-0.75^2\right)^2}}\right) = \left(\frac{\left({}^{F_o}\!/_{2.}\right)}{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-0.5625\right)^2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\left({}^{F_o}\!/_{2.}\right)}{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{0.4375^2}}\right) = \left(\frac{\left({}^{F_o}\!/_{2.}\right)}{k}\right)\left(\frac{1}{0.4375}\right) \Rightarrow X_1 \approx 1.143\left(\frac{F_o}{k}\right)$$

(8/7)

ομοίως για τα πλάτη των υπολοίπων συνιστωσών απόκρισης ...

έτσι, από ❷ … ❻

Πίνακας 1

n	α_n	$X_{ST,n} = \alpha_n \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	$q_n = \left({}^{n\Omega}\!/_{\omega} \right)$	Η	$X_n = \mathrm{H}_n X_{ST,n}$	ϑ_n
1	$\left({}^{1}\!/_{2} \right)$	$\left({}^{1}\!/_{2} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	0.75	$\left({}^{16}\!/_{7} \right)$	$\left({}^{8}\!/_{7} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	0
2	$\left({}^{-2}\!/_{3\pi} \right)$	$\left({}^{-2}\!/_{3\pi} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	1.50	$\left({}^{4}\!/_{5} \right)$	$\left({}^{-8}\!/_{15\pi} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	180°
4	$\left({}^{-2}\!/_{15\pi} \right)$	$\left({}^{-2}\!/_{15\pi} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	3.00	$\left({}^{1}\!/_{8} \right)$	$\left({}^{-1}\!/_{60\pi} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	180°
6	$\left({}^{-2}\!/_{35\pi} \right)$	$\left({}^{-2}\!/_{35\pi} \right) \times \left({}^{F_o}\!/_{k} \right)$	4.50	0	0	180°

ο λόγος των πλατών $X_{n=2}$ και $X_{n=4}$

$$\left(\frac{\left(8/15\pi\right)}{\left(1/60\pi\right)}\right)=\frac{\left(8/15\pi\right)}{\left(1/60\pi\right)}=32$$

η συμβολή του όρου n=4 είναι 32 φορές μικρότερη από τη συμβολή του όρου n=2

η συμβολή των όρων n≥4 είναι αμελητέα

συνολική μόνιμη απόκριση …

$$x(t) = \boxed{X_{ST}} + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{X_n} \cos(n\Omega t - \vartheta_n)$$

οφείλεται στο σταθερό όρο της F(t)

οφείλεται στη n αρμονική συνιστώσα της F(t)

αμελώντας όρους μικρής συμμετοχής

$$x(t) \approx X_{ST} + X_1 \sin(\Omega t - \vartheta_1) + X_4 \cos(4\Omega t - \vartheta_4)$$

Πίνακας 1

…

…

$$x(t)=\left(\left(\frac{F_o}{\pi k}\right)+\left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{F_o}{k}\right)\sin(\Omega t-0)-\left(\frac{8}{15\pi}\right)\left(\frac{F_o}{k}\right)\cos(2\Omega t-\pi)\right)$$

ισχύει… $\cos(a-\pi)=-\cos(a)$

$\Rightarrow$ …

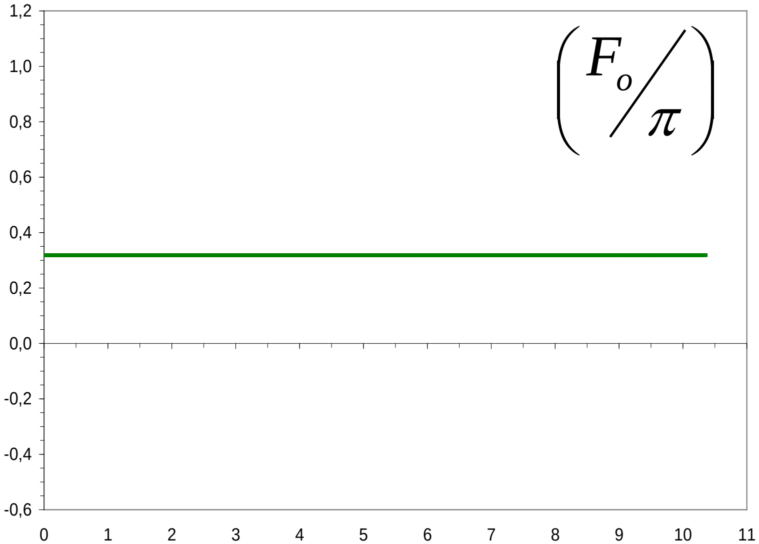
$\Rightarrow$ … $$x(t)=\boxed{\left(\frac{F_o}{k}\right)}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\right)+\left(\frac{8}{7}\right)\sin(\Omega t)+\left(\frac{8}{15\pi}\right)\cos(2\Omega t)\right\}$$

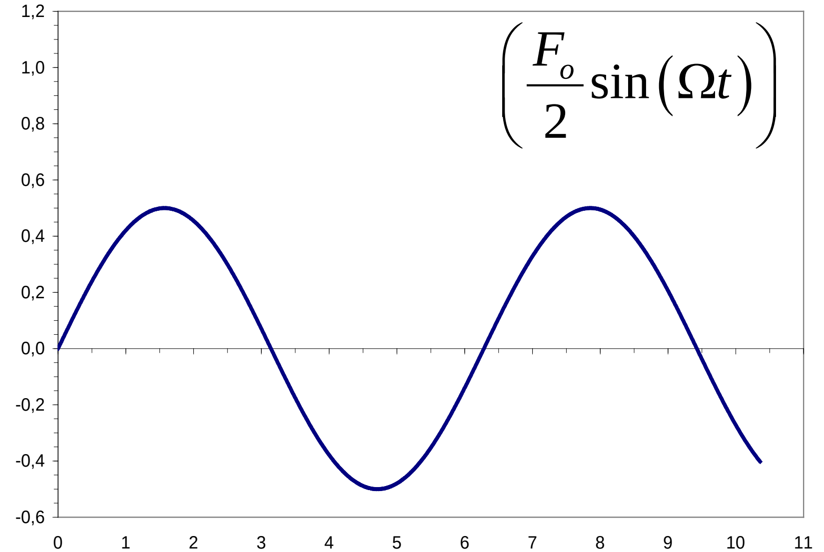
… απόκριση συστήματος σε μόνιμη κατάσταση

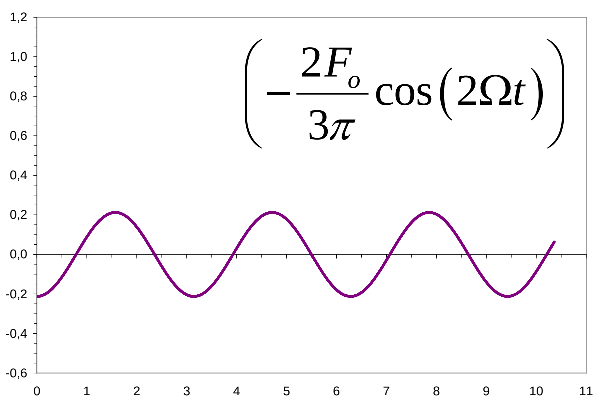
σύνθεση αρμονικών ταλαντώσεων γύρω από …

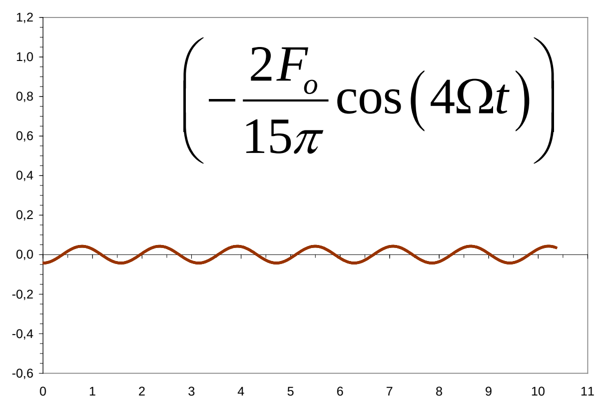
Άσκηση 5: ΛΥΣΗ

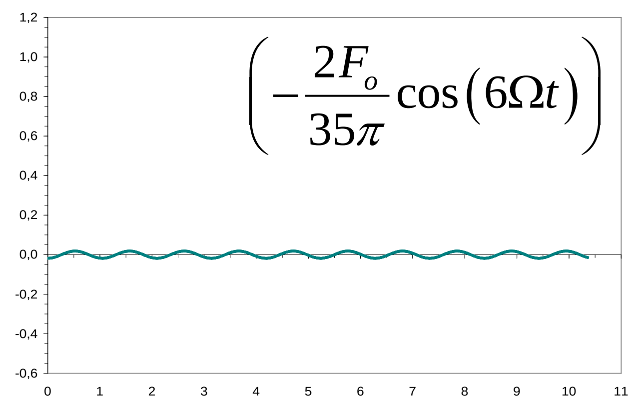
Αρμονικές συνιστώσες του αναπτύγματος της διέγερσης κατά Fourier



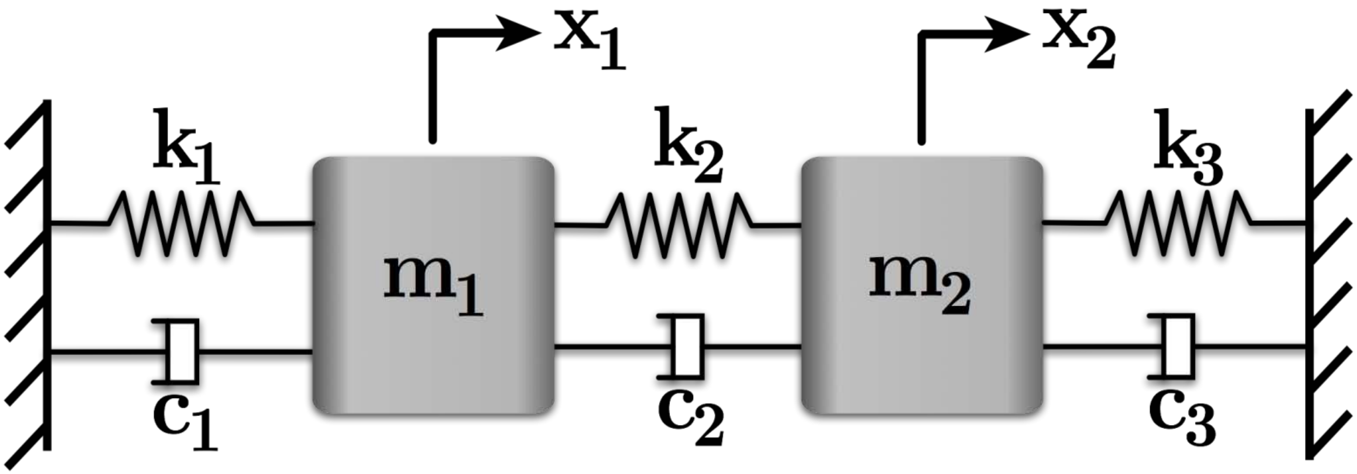








Ευχαριστώ για την
προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr