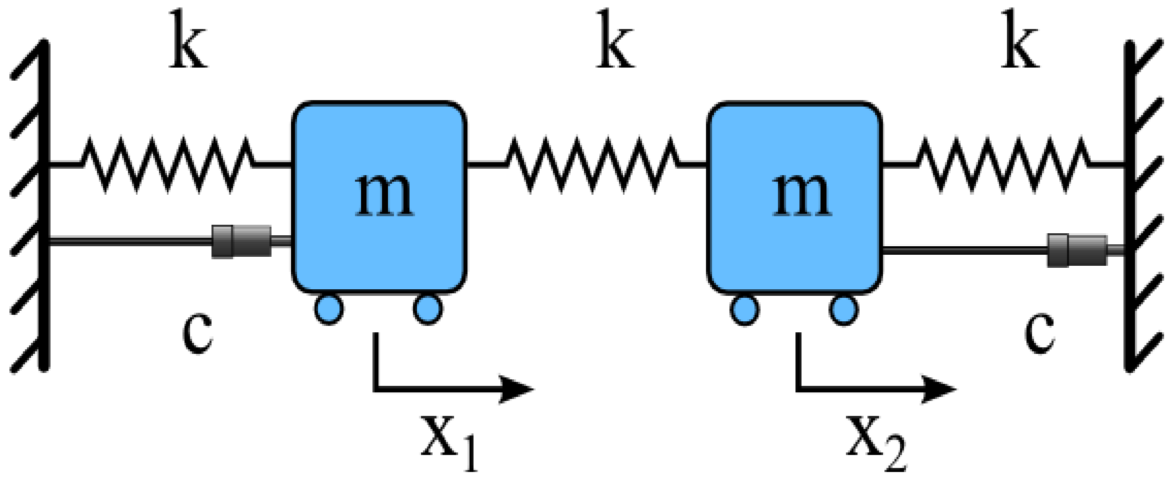
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 7

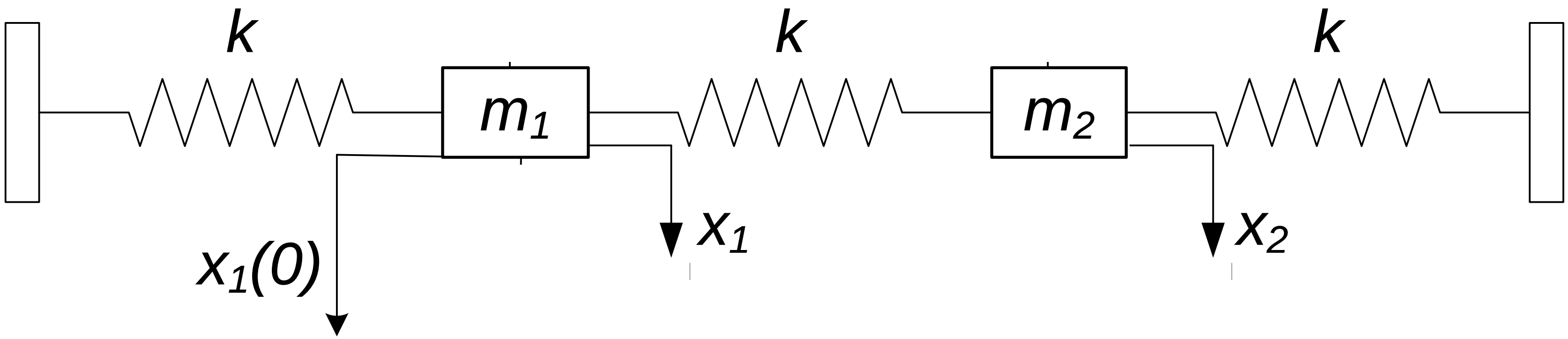


έκδοση **DYNI-EXC07-2016b**

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

δυναμικό σύστημα 2 Β.Ε.

αμελητέα βαρυτική επίδραση ...



3 όμοια ελατήρια σταθεράς $k = 1$

2 μάζες $m_1 = 4$ ***και*** $m_2 = 1$

αρχικά μετατοπίζεται μόνο η μάζα m_1 ***κατά*** $x_1(0) = 1$

και $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$\Rightarrow$ ***ελεύθερη ταλάντωση***

? ***απόκριση συστήματος*** $x(t)$

το σύστημα χαρακτηρίζεται από 2 ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Β.Ε.)

την μετατόπιση x_1 *της μάζας* m_1 *και την μετατόπιση* x_2 *της μάζας* m_2

$\Downarrow$

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t)$$

γενική μορφή της απόκρισης

πλάτος των ταλαντώσεων

συχνότητες ταλάντωσης (ιδιοσυχνότητες)

$\Downarrow$

$$\underbrace{\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)}\underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0}$$

$$\det\underbrace{\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)} = 0$$

μητρώο μάζας

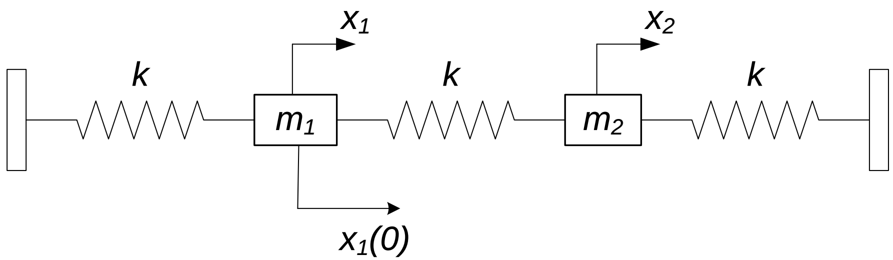
μητρώο δυσκαμψίας

υπολογισμός μητρώων

$\Downarrow$

Ενεργειακή Αρχή Lagrange

Ενεργειακή Αρχή Lagrange …



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \qquad ❶$$

- ***κινητική ενέργεια …*** $T=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2$

- ***δυναμική ενέργεια …***

$$U=\frac{1}{2}k_1\left(\Delta x\right)_{k_1}^2+\frac{1}{2}k_2\left(\Delta x\right)_{k_2}^2+\frac{1}{2}k_2\left(\Delta x\right)_{k_3}^2 \xrightarrow{k_1=k_2=k_3=k} U=\frac{1}{2}kx_1^{\,2}+\frac{1}{2}k\left(x_1-x_2\right)^2+\frac{1}{2}kx_2^2$$

- ***το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία απόσβεσης → δεν διαχέεται ενέργεια***

$$\Downarrow$$

$$P_C=0$$

- ***στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις → δεν προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα από εξωτερική πηγή → ισχύς του συστήματος μηδενική***

$$\Downarrow$$

$$P_t = 0$$

- ***ενεργειακή μεταβλητή Lagrange ...***

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)$$

για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή ... $q = x_1$

για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\,\dot{x}_1$$

παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο ...

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(m_1\,\dot{x}_1\right)=m_1\,\ddot{x}_1$$

για τον όρο ελαστικότητας ...

$$-\frac{\partial L}{\partial q}\xrightarrow{q=x_1}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial x_1}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}kx_1^{\;2}+\frac{1}{2}k\left(x_1-x_2\right)^2+\frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial L}{\partial x_1}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{-\left(\frac{1}{2}kx_1^{\;2}+\frac{1}{2}k\left(x_1-x_2\right)^2+\frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\}=\left\{kx_1+k\left(x_1-x_2\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=kx_1+k\left(x_1-x_2\right)=2kx_1-kx_2$$

για τον όρο διάχυσης ...

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}\xrightarrow{q=x_1}\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(0\right)\Rightarrow\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1}=0$$

για τον όρο διέγερσης ...

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}(0) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

οπότε η ❶ γίνεται ...

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad ❷$$

για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή ... $q = x_2$

για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1{}^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\,\dot{x}_2$$

παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο ...

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right) = m_2\,\ddot{x}_2$$

για τον όρο ελαστικότητας ...

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=x_2} -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1{}^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{-\left[\frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right]\right\} = \left[k\left(x_1 - x_2\right)(-1) + kx_2\right] \Rightarrow$$

… για τον όρο ελαστικότητας

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -k\left(x_1 - x_2\right) + kx_2 = -kx_1 + 2kx_2$$

για τον όρο διάχυσης …

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

για τον όρο διέγερσης …

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

οπότε η ❶ γίνεται …

$$\boxed{m_2\,\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0} \quad ❸$$

χρησιμοποιώντας μητρωϊκή γραφή, οι ❷ και ❸ γράφονται και ως εξής ...

$$\begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \\ \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\tilde{\ddot{x}}} + \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\underline{K}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\tilde{F}}$$

αριθμητική αντικατάσταση

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ❹$$

το ομογενές σύστημα της 4 έχει μη-τετριμμένη λύση όταν ισχύει ...

$$\det\left(-\omega_i^2\underline{M}+\underline{K}\right)=0\xrightarrow{\omega_i^2=\lambda_i}\det\left(-\lambda_i\underline{M}+\underline{K}\right)=0\xrightarrow{4}$$

$$\Rightarrow\det\left(-\lambda\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\right)=0\Rightarrow\det\left(\begin{bmatrix}-4\lambda+2&-1\\-1&-\lambda+2\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\Rightarrow(-4\lambda+2)(-\lambda+2)-(-1)(-1)=0\Rightarrow\left(4\lambda^2-8\lambda-2\lambda+4\right)-1=0\Rightarrow\boxed{4\lambda^2-10\lambda+3=0}$$

διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-10)^2-4\times4\times3=100-48=52$$

οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ...

$$\lambda=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{52}}{2\times4}=\frac{10\pm7.211}{8}\rightarrow\begin{Bmatrix}\lambda_1=\omega_1^2=2.151375\\\lambda_2=\omega_2^2=0.348625\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

... οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 = \pm\sqrt{2.151375} = \pm 1.4668 \\ \omega_2 = \pm\sqrt{0.348625} = \pm 0.5904 \end{Bmatrix}$$

$\underline{M}$ ***και*** $\underline{\mathbf{K}}$ ***θετικά (ημι)ορισμένα*** $\rightarrow$ $\omega_i \geq 0$ $\rightarrow$ ***αποδεκτές μόνον οι θετικές ρίζες***

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 = 1.4668 \\ \omega_2 = 0.5904 \end{Bmatrix}$$

ταξινομώντας τις λύσεις κατά αύξουσα τιμή ... $\begin{Bmatrix} \omega_1 = 0.5904 \\ \omega_2 = 1.4668 \end{Bmatrix}$

οι ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) ω_1 *&* ω_2 *του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος αντικαθίστανται στην* $\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0}$

$$\Downarrow \quad \omega_1$$

$$\left(-\omega_1^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.3486\times 4+2 & -1 \\ -1 & -0.3486\times 1+2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.6056 & -1 \\ -1 & 1.6514 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{1,1}\\ \Phi_{2,1}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.6056\Phi_{11} - \Phi_{21} = 0 \\ -\Phi_{11} + 1.6514\Phi_{21} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.6056\Phi_{11} = \Phi_{21} \\ \Phi_{11} = 1.6514\Phi_{21} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \Phi_{21} = 0.6056\Phi_{11} \\ \Phi_{21} = 0.6056\Phi_{11} \end{Bmatrix}$$

→ 2 όμοιες εξισώσεις

- ***οι εξισώσεις ενός ομογενούς συστήματος δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (το πλήθος των ανεξαρτήτων εξισώσεων είναι μικρότερο από το πλήθος των εξισώσεων του συστήματος)***
- ***τουλάχιστον μία μεταβλητή του συστήματος δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη***
- ***επιλέγουμε αυθαίρετα μία από αυτές ως ελεύθερη μεταβλητή*** (Φ_{11})

... οπότε

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ 0.6056\Phi_{11} \end{Bmatrix} = \Phi_{11} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{11}=const=C_1} \underset{\sim}{\Phi}_1 = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix}$$

οποιοσδήποτε μη-μηδενικός πραγματικός αριθμός

$$\Downarrow$$

$$C_1 = 1$$

$$\ldots \Rightarrow \quad \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ...

*Ένα ιδιοάνυσμα **ΔΕΝ έχει συγκεκριμένη τιμή** (δεν αποτελεί συγκεκριμένη ποσότητα). Αντιθέτως, **συγκεκριμένη** είναι η **αναλογία** που εμφανίζουν μεταξύ τους οι συνιστώσες του ιδιοανύσματος.*

ομοίως για ... ω_2

$$\left(-\omega_2^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_2=\underset{\sim}{0}\longrightarrow\begin{bmatrix}-2.1514\times 4+2 & -1\\ -1 & -2.1514\times 1+2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{12}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-6.6056 & -1\\ -1 & -0.1514\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{12}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}-6.6056\Phi_{12}-\Phi_{22}=0\\ -\Phi_{12}-0.1514\Phi_{22}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}-6.6056\Phi_{12}=\Phi_{22}\\ -\Phi_{12}=0.1514\Phi_{22}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\Phi_{22}=-6.6056\Phi_{12}\\ \Phi_{22}=-6.6056\Phi_{12}\end{Bmatrix}$$

ελεύθερη μεταβλητή

οπότε ...

οποιοσδήποτε μη-μηδενικός πραγματικός αριθμός

$$\underset{\sim}{\Phi}_2=\begin{Bmatrix}\Phi_{12}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Phi_{12}\\ -6.6056\Phi_{21}\end{Bmatrix}=\Phi_{12}\begin{Bmatrix}1\\ -6.6056\end{Bmatrix}\xrightarrow{\Phi_{12}=const=C_2}\underset{\sim}{\Phi}_2=C_2\begin{Bmatrix}1\\ -6.6056\end{Bmatrix}\overset{C_2=1}{\Rightarrow}\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow\underset{\sim}{\Phi}_2=\begin{Bmatrix}\Phi_{12}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ -6.6056\end{Bmatrix}$$

φυσική σημασία των αριθμητικών τιμών των ιδιοτιμών &
η φυσική σημασία αριθμητικών τιμών και προσήμων των ιδιοανυσμάτων

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

εάν το σύστημα ταλαντωθεί με συχνότητα ω_1 → το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_2 θα είναι αυτής της φοράς (διότι $0.6056 > 0$) με το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_1 και 0,6056 φορές μεγαλύτερο (?), δηλαδή ισχύει ...

$$\left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_2\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_1\right) = \left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_1\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_1\right) \times 0.6056$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

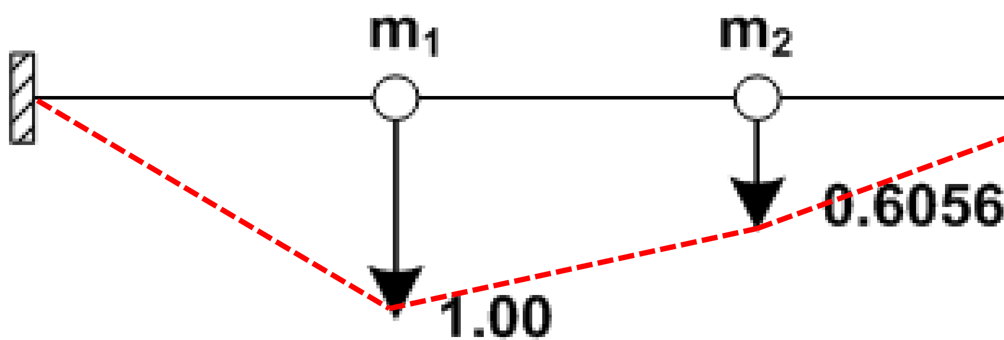
εάν το σύστημα ταλαντωθεί με συχνότητα ω_2 → το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_2 θα είναι αντιθέτου φοράς (διότι $-6.6056 < 0$) από το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_1 και 6,6056 φορές μεγαλύτερο, δηλαδή ισχύει ...

$$\left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_2\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_2\right) = \left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_1\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_2\right) \times \left(-6.6056\right)$$

εποπτική παράσταση των 2 ιδιοανυσμάτων

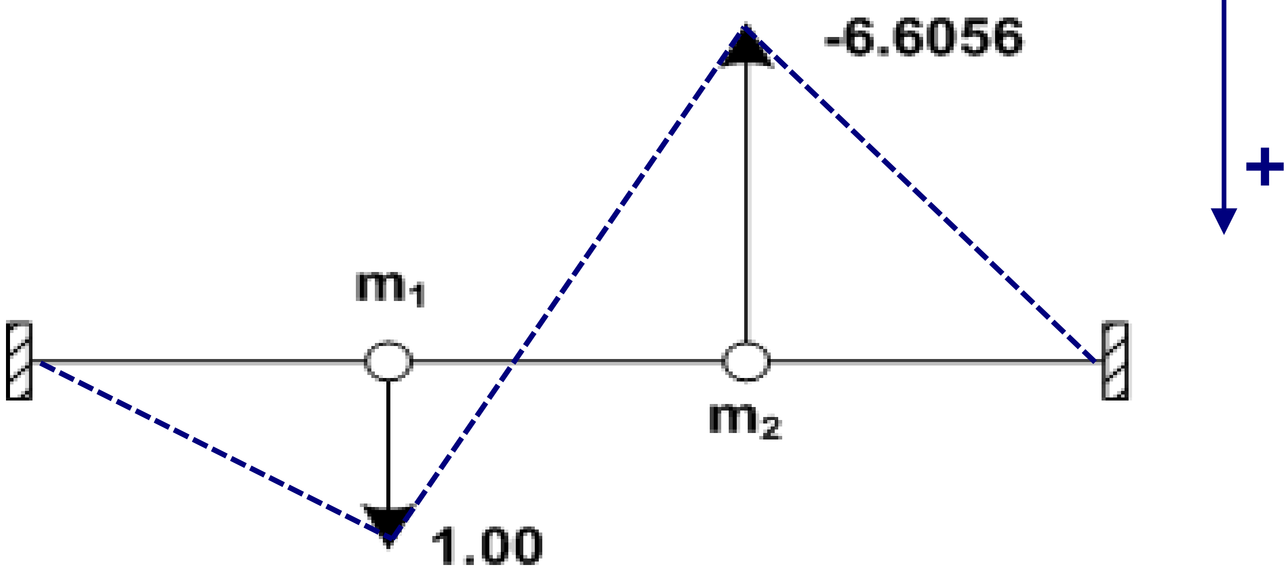
ταλάντωση με συχνότητα ω_1

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix}$$



ταλάντωση με συχνότητα ω_2

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{Bmatrix}$$



το σύστημα διαθέτει 2 Β.Ε.

$\downarrow$

2 ιδιοσυχνότητες στην απόκριση του συστήματος & στην απόκριση της κάθε μάζας

κάθε μάζα θα πραγματοποιεί ταυτόχρονα 2 ταλαντώσεις ...

μία με συχνότητα ω_1 & μία με συχνότητα ω_2

$$x_1(t) = \underbrace{\boxed{A_1}\cos(\omega_1 t) + \boxed{B_1}\sin(\omega_1 t)}_{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_1\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_1} + \underbrace{\boxed{A_2}\cos(\omega_2 t) + \boxed{B_2}\sin(\omega_2 t)}_{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_1\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_2} \quad ❺$$

$$x_2(t) = \left[\boxed{A_1}\cos(\omega_1 t) + \boxed{B_1}\sin(\omega_1 t)\right] \times \underbrace{(0.6056)}_{\Phi_{21}} + \left[\boxed{A_2}\cos(\omega_2 t) + \boxed{B_2}\sin(\omega_2 t)\right] \times \underbrace{(-6.6056)}_{\Phi_{22}}$$

ένα σύστημα με N Β.Ε. έχει 2N αρχικές συνθήκες

(αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα για κάθε έναν Β.Ε.)

το εξεταζόμενο σύστημα έχει 4 αρχικές συνθήκες και 4 άγνωστους συντελεστές

(A_1, A_2, B_1 & B_2)

5 $x_1(0)=1 \rightarrow x_2(0)=0$

$$\begin{cases} x_1(0) = A_1\cos(\overset{1}{\cancel{\omega_1\times 0}}) + \overset{0}{\cancel{B_1\sin(\omega_1 t)}} + A_2\cos(\overset{1}{\cancel{\omega_2\times 0}}) + \overset{0}{\cancel{B_2\sin(\omega_2 t)}} \\ x_2(0) = \left[A_1\cos(\overset{1}{\cancel{\omega_1\times 0}}) + \overset{0}{\cancel{B_1\sin(\omega_1 t)}}\right]\times(0.6056) + \left[A_2\cos(\overset{1}{\cancel{\omega_2\times 0}}) + \overset{0}{\cancel{B_2\sin(\omega_2 t)}}\right]\times(-6.6056) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x_2(0)=0]{x_1(0)=1} \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 0.6056\,A_1 - 6.6056\,A_2 = 0 \end{cases}$$

επίλυση του συστήματος

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6.6056 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.6056 & -6.6056 \end{vmatrix}} = \frac{-6.6056}{-6.6056-0.6056} = \frac{6.6056}{7.2112} \Rightarrow A_1 = 0.9160$$ 6

και ...

και ...

$$A_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0.6056 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0.6056 & -6.6056\end{vmatrix}}=\frac{-0.6056}{-6.6056-0.6056}=\frac{0.6056}{7.2112}\Rightarrow A_2=0.08398$$

❼

η πρώτη χρονική παράγωγός των ❺ **...**

$$\dot{x}_1(t)=-\omega_1A_1\sin(\omega_1t)+\omega_1B_1\cos(\omega_1t)-\omega_2A_2\sin(\omega_2t)+\omega_2B_2\cos(\omega_2t)$$

$$\dot{x}_2(t)=\left[-\omega_1A_1\sin(\omega_1t)+\omega_1B_1\cos(\omega_1t)\right]\times(0.6056)+\left[-\omega_2A_2\sin(\omega_2t)+\omega_2B_2\cos(\omega_2t)\right]\times(-6.6056)$$

$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ ***... αρχικές συνθήκες***

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1(0)&=\overbrace{\cancel{-\omega_1A_1\sin(\omega_1t)}}^{0}+\omega_1B_1\overbrace{\cancel{\cos(\omega_1t)}}^{1}-\overbrace{\cancel{\omega_2A_2\sin(\omega_2t)}}^{0}+\omega_2B_2\overbrace{\cancel{\cos(\omega_2t)}}^{1}\\ \dot{x}_2(0)&=\left[\overbrace{\cancel{-\omega_1A_1\sin(\omega_1t)}}^{0}+\omega_1B_1\overbrace{\cancel{\cos(\omega_1\times0)}}^{1}\right]\times(0.6056)+\left[\overbrace{\cancel{-\omega_2A_2\sin(\omega_2t)}}^{0}+\omega_2B_2\overbrace{\cancel{\cos(\omega_2\times0)}}^{1}\right]\times(-6.6056)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\dot{x}_2(0)=0]{\dot{x}_1(0)=0}\left\{\begin{aligned}\omega_1B_1+\omega_2B_2&=0\\ 0.6056\omega_1B_1-6.6056\omega_2B_2&=0\end{aligned}\right\}\boxed{\xrightarrow[\omega_2=1.4668]{\omega_1=0.5904}}\left\{\begin{aligned}0.5904B_1+1.4668B_2&=0\\ 0.6056\times0.5904B_1-6.6056\times1.4668B_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.5904B_1 + 1.4668B_2 = 0 \\ 0.3575B_1 - 9.6891B_2 = 0 \end{cases}$$

... → η ορίζουσα του ομογενούς συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 0.5904 & 1.4668 \\ 0.3575 & -9.6891 \end{vmatrix} = 0.5904\times(-9.6891) - 1.4668\times 0.3575 = -5.7204 - 0.5244 = -6.2448 \neq 0$$

... μοναδική λύση

$$B_1 = B_2 = 0 \quad 8$$

επομένως από 5, 6, 7 *και* 8

η απόκριση της μάζας m_1

$$x_1(t) = 0.9160\cos(\omega_1 t) + 0.08398\cos(\omega_2 t)$$

η απόκριση της μάζας m_2

$$x_2(t) = (0.9160\times 0.6056)\cos(\omega_1 t) + 0.08398\times(-6.6056)\cos(\omega_2 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 0.5547\cos(\omega_1 t) - 0.5547\cos(\omega_2 t)$$

η απόκριση του συστήματος σε μητρωϊκή γραφή …

$$\underset{\sim}{x}(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9160 \\ 0.5547 \end{bmatrix}\cos(\omega_1 t)+\begin{bmatrix} 0.08398 \\ -0.5547 \end{bmatrix}\cos(\omega_2 t) \qquad ❾$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ...

- ***η ταλάντωση της μάζας m_1 προκύπτει από την υπέρθεση της ταλάντωσης της μάζας m_1 με συχνότητα ω_1 και της ταλάντωσης της μάζας m_1 με συχνότητα ω_2***
- ***η ταλάντωση της μάζας m_2 προκύπτει από την υπέρθεση της ταλάντωσης της μάζας m_2 με συχνότητα ω_1 και της ταλάντωσης της μάζας m_2 με συχνότητα ω_2***
- ***η απόκριση του εξεταζομένου συστήματος ισούται με την υπέρθεση των ταλαντώσεων των δύο μαζών m_1 και m_2 με δύο φυσικές συχνότητες ω_1 και ω_2***
- ***ο τρόπος ταλάντωσης ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται ως συνδυασμός κάθε μίας ιδιοσυχνότητας του συστήματος και του αντιστοίχου ιδιοανύσματος***

> *στην ελεύθερη ταλάντωση ενός δυναμικού συστήματος N Βαθμών Ελευθερίας (Β.Ε), η **απόκριση** που αντιστοιχεί **σε κάθε Β.Ε.** περιέχει **όλες** τις **φυσικές συχνότητες** του συστήματος (δηλαδή περιέχει και τις N ιδιοσυχνότητες)*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ...

- ***Ως διέγερση του συστήματος χρησιμοποιήθηκε η επιβολή αρχικής μετατόπισης στη μάζα m_1. Ωστόσο, από τις τελικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος (9), η ταλάντωση λόγω της 2ης φυσικής συχνότητας του συστήματος δεν συμμετέχει ουσιαστικά στην κίνηση (ταλάντωση) του σημείου διέγερσης***

⬇

*Ο **τρόπος διέγερσης** καθώς και το **σημείο διέγερσης** αποτελούν δύο βασικά στοιχεία, τα οποία **καθορίζουν** την **απόκριση** ενός δυναμικού **συστήματος** με **πολλούς Βαθμούς Ελευθερίας**.*

⬇

είναι δυνατόν, εάν επιλέξουμε κατάλληλα το σημείο διέγερσης και τον τρόπο διέγερσης του συστήματος, αυτό να ταλαντωθεί με τρόπο, στον οποίο οι συντελεστές της συχνότητας ω_2 στην (9) να είναι εκ ταυτότητος μηδενικοί

Θεωρώντας μηδενικές αρχικές ταχύτητες, υπάρχει σετ αρχικών μετατοπίσεων, η επιβολή των οποίων προκαλεί την ταλάντωση του συστήματος βάσει μόνον της πρώτης του φυσικής συχνότητας (πρώτης ιδιοσυχνότητας).

ιδιοανυσματικός μετασχηματισμός ...
ιδιότητες ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων

υπολογισμός ω_1

γενικευμένη δυσκαμψία

$$k_{11} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3944 \\ 0.2112 \end{bmatrix} = 1.522$$

γενικευμένη μάζα

$$m_{11} = \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = 4.367$$

λόγος γενικευμένης δυσκαμψίας προς γενικευμένη μάζα

$$\frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{1.522}{4.367} = 0.3486 = \omega_1^2$$

❑ υπολογισμός ω_2

γενικευμένη δυσκαμψία

$$k_{22} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.6056 \\ -14.2112 \end{bmatrix} = 102.48$$

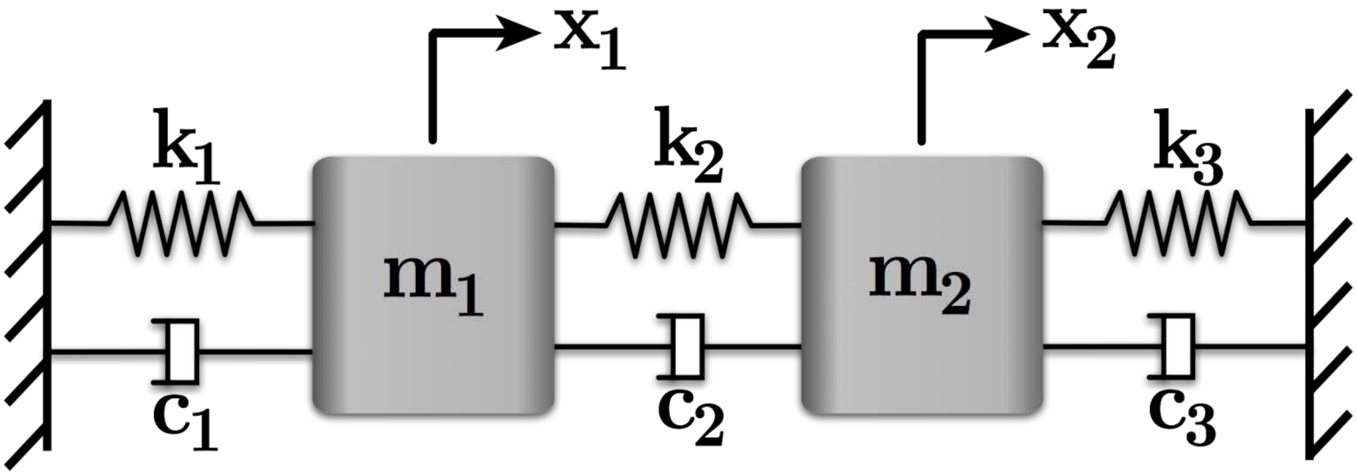
γενικευμένη μάζα

$$m_{22} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.00 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = 47.634$$

λόγος γενικευμένης δυσκαμψίας προς γενικευμένη μάζα

$$\frac{k_{22}}{m_{22}} = \frac{102.48}{47.634} = 2.1514 = \omega_2^2$$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr