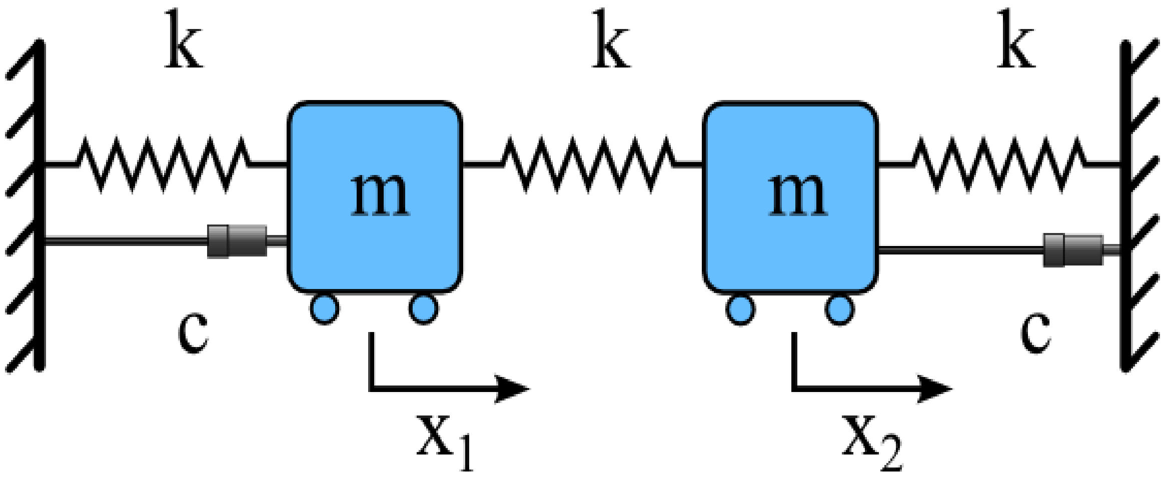
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 8



έκδοση ***DYNI-EXC08-2016b***

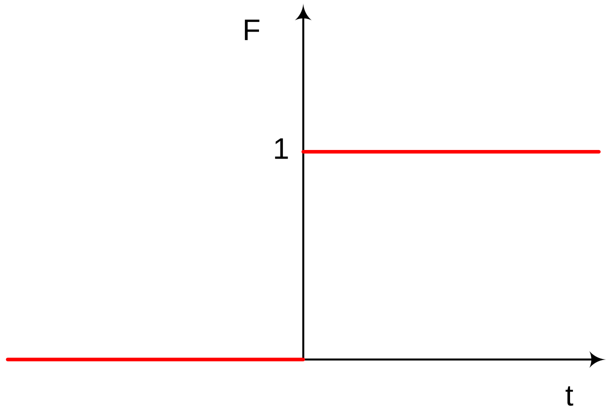
Copyright © Ε.Μ.Π. - 2016
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών – Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών – κτ. Μ – αιθ. Μ002
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας παρουσίασης, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό.
Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Πληροφορίες
Δρ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής, antogian@central.ntua.gr, 210-7721524
Δρ. Χ. Γιακόπουλος, ΕΔΙΠ, chryiako@central.ntua.gr, 210-7722332

Άσκηση 8: Εκφώνηση

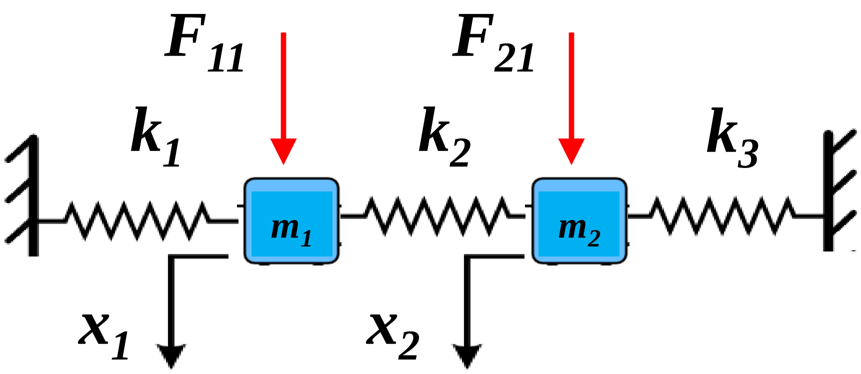
έστω 2-βάθμιο δυναμικό σύστημα m-k



$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} h^*(t)$$

συνάρτηση Heaviside



μηδενικές αρχικές συνθήκες μετατόπισης και ταχύτητας

$$x(0) = x_o = 0 \quad \textbf{και} \quad \dot{x}(0) = V_o = 0$$

? *απόκριση δυναμικού συστήματος στην μεταβατική & μόνιμη κατάσταση ...*

το σύστημα χαρακτηρίζεται από 2 ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Β.Ε.)

την μετατόπιση x_1 ***της μάζας*** m_1 ***και την μετατόπιση*** x_2 ***της μάζας*** m_2

$$\Downarrow$$

$$\underset{\sim}{x}(t) = f(\underset{\sim}{\Phi}, \omega)$$

γενική μορφή της απόκρισης

πλάτος των ταλαντώσεων

συχνότητες ταλάντωσης (ιδιοσυχνότητες)

$$\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0}$$

$$\det\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0$$

μητρώο μάζας

μητρώο δυσκαμψίας

υπολογισμός ιδιοτιμών (φυσικών συχνοτήτων) δυναμικού συστήματος ...

$$\left.\begin{array}{l} \det\left(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \xleftrightarrow{\lambda=\omega^2} \det\left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \\ \underline{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ \textit{και} \ \ \underline{K} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots$$

$$\det\left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \Rightarrow \det\left(-\lambda \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -3\lambda + 5 & -3 \\ -3 & -2\lambda + 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-3\lambda + 5\right)\left(-2\lambda + 3\right) - \left(-3\right)\left(-3\right) = 0 \Rightarrow 6\lambda^2 - 9\lambda - 10\lambda + 15 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2 - 19\lambda + 6 = 0$$

διακρίνουσα χαρακτηριστικού πολυωνύμου ...

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(-19\right)^2 - 4 \times 6 \times 6 = 361 - 144 \Rightarrow \Delta = 217$$

ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ...

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-19) \pm \sqrt{217}}{2 \times 6} = \frac{19 \pm \sqrt{217}}{12} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = \dfrac{19+\sqrt{217}}{12} = 2.81 \\ \lambda_2 = \dfrac{19-\sqrt{217}}{12} = 0.356 \end{Bmatrix}$$

ταξινομώντας τις ρίζες κατά αύξουσα σειρά ισοδύναμα προκύπτει ...

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 = \omega_1^2 = 0.356 \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = 2.81 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 = 0.597 \\ \omega_2 = 1.67 \end{Bmatrix}$$

διατηρούνται οι θετικές ρίζες των ιδιοσυχνοτήτων ...

υπολογισμός ιδιοανυσμάτων δυναμικού συστήματος ...

για κάθε μία από τις ευρεθείσες ιδιοσυχνότητες, υπολογίζεται το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα μέσω της επίλυσης του ομογενούς συστήματος

$$\left(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{0} \xleftrightarrow{\lambda=\omega^2} \left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{0}$$

για την 1η ιδιοσυχνότητα ...

$$\left(-\lambda_1 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \left(-\lambda_1\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \xrightarrow{\lambda_1=0.356}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-3\times 0.356+5 & -3\\ -3 & -2\times 0.356+3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3.932 & -3\\ -3 & 2.288\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}3.932\Phi_{11} - 3\Phi_{21} = 0\\ -3\Phi_{11} + 2.288\Phi_{21} = 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}(3.932/3)\Phi_{11} = \Phi_{21}\\ (3/2.288)\Phi_{11} = \Phi_{21}\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}(3.932/3)\Phi_{11} = \Phi_{21}\\ (3/2.288)\Phi_{11} = \Phi_{21}\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}1.31\Phi_{11} = \Phi_{21}\\ 1.31\Phi_{11} = \Phi_{21}\end{Bmatrix} \Rightarrow 1.31\Phi_{11} = \Phi_{21} \Rightarrow \boxed{\Phi_{11} = 0.763\Phi_{21}}$$

οπότε για ... $\Phi_{21}=1$

$$\underset{\sim}{\Phi}_1=\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.763\Phi_{21}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix}=\Phi_{21}\begin{Bmatrix}0.763\\ 1.00\end{Bmatrix}\xrightarrow{\Phi_{21}=1}\underset{\sim}{\Phi}_1=\begin{Bmatrix}0.763\\ 1.00\end{Bmatrix}\Leftrightarrow \boxed{\underset{\sim}{\Phi}_1^T=\begin{bmatrix}0.763 & 1.00\end{bmatrix}}$$

για τη 2η ιδιοσυχνότητα ...

$$\left(-\lambda_2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_2=\underset{\sim}{0}\Rightarrow\left(-\lambda_2\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\xrightarrow{\lambda_2=2.81}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3\times 2.81+5 & -3\\ -3 & -2\times 2.81+3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3.43 & -3\\ -3 & 2.62\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}-3.43\Phi_{21}-3\Phi_{22}=0\\ -3\Phi_{21}+2.62\Phi_{22}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\Phi_{21}=-(3/3.43)\Phi_{22}\\ \Phi_{21}=-(2.62/3)\Phi_{22}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\Phi_{21}=-(3/3.43)\Phi_{22}\\ \Phi_{21}=-(2.62/3)\Phi_{22}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\Phi_{21}=-0.874\Phi_{22}\\ \Phi_{21}=-0.874\Phi_{22}\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{\Phi_{21}=-0.874\Phi_{22}}$$

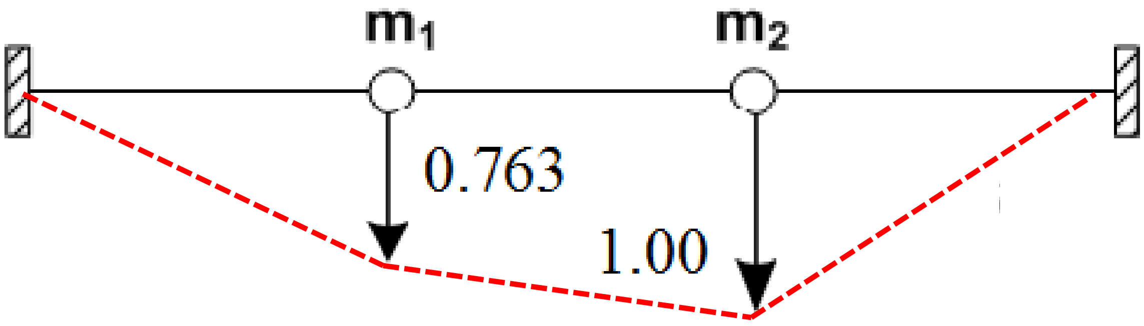
οπότε για ... $\Phi_{22} = 1$

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.874\Phi_{22} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \Phi_{22} \begin{Bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{22}=1} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\Phi}_2^T = \begin{bmatrix} -0.874 & 1.00 \end{bmatrix}$$

εποπτική παράσταση των 2 ιδιοανυσμάτων

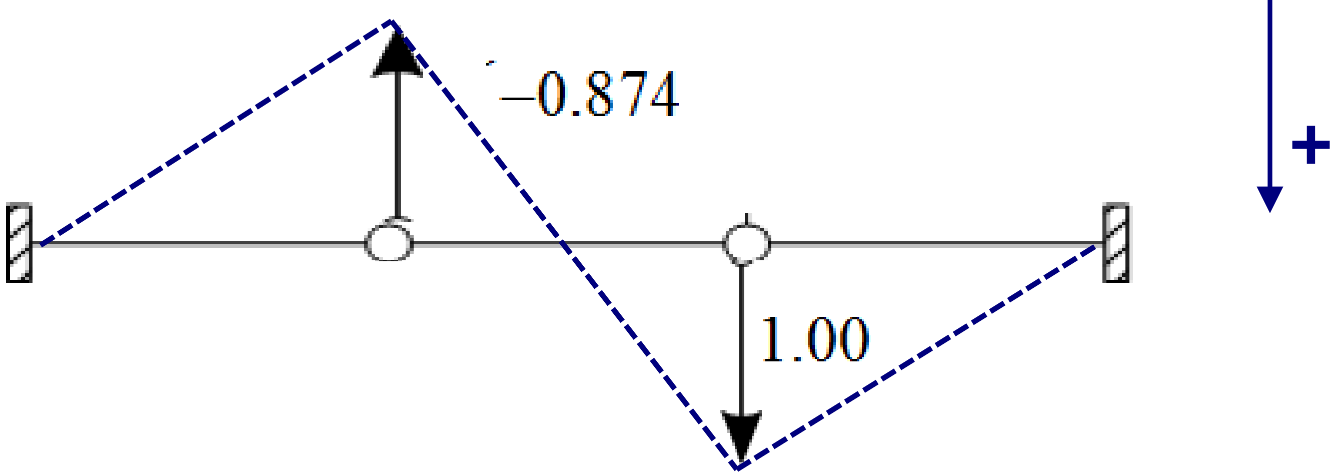
ταλάντωση με συχνότητα ω_1

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$



ταλάντωση με συχνότητα ω_2

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ...

διβάθμιο δυναμικό σύστημα ...

εάν αποδοθεί στην ανεξάρτητη μεταβλητή η μηδενική τιμή

$\downarrow$

η εξηρτημένη μεταβλητή θα είναι, ομοίως, μηδενική

$\downarrow$

μηδενικό ιδιοάνυσμα

$\downarrow$

μη-ταλάντωση

$\downarrow$

αντιβαίνει στη φύση της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ...

εάν το δυναμικό σύστημα διαθέτει Β.Ε. >2

$\downarrow$

τα ομογενή συστήματα καταλήγουν σε ιδιοανύσματα με όρους >2

$\downarrow$

είναι δυνατόν να εμφανίζονται μηδενικά στοιχεία στα ιδιοανύσματα

απόκριση δυναμικού συστήματος ...

μαθηματική έκφραση του ιδιοανυσματικού μετασχηματισμού ...

$$\underset{\sim}{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t)=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)+\ldots+\underset{\sim}{\Phi}_N q_N(t)$$

$N=2$ ***διβάθμιο δυναμικό σύστημα***

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)=\begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} q_1(t)+\begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} q_2(t) \qquad \textbf{\textit{(I)}}$$

υπολογισμός γενικευμένων Β.Ε. ...

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=g_i(t), \quad i=1,2,\ldots,N \\ g_i(t)=\left(\dfrac{\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}}{m_{ii}}\right) \;\; \textbf{\textit{και}} \;\; \underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_i = m_{ii} \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \; q_i(t)$$

γενικευμένη μάζα m_{11}

$$m_{11}=\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}_1=\begin{bmatrix}0.763 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.763\\1.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.763 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\times0.763 & 0\\0 & 2\times1.00\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{11}=\begin{bmatrix}0.763 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.289\\2.00\end{bmatrix}=0.763\times2.289+1.00\times2.00\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{11}=3.75$$

γενικευμένη μάζα m_{22}

$$m_{22}=\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}_2=\begin{bmatrix}-0.874 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.874\\1.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.874 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\times0.874 & 0\\0 & 2\times1.00\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{22}=\begin{bmatrix}-0.874 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2.622\\2.00\end{bmatrix}=(-0.874)\times(-2.622)+1.00\times2.00\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{22}=4.29$$

οπότε ...

$$g_1(t) = \frac{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underset{\sim}{F}}{m_{11}} = \frac{\begin{bmatrix} 0.763 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} h^*(t)}{3.75} = \left(\frac{0.763 \times 2 + 1.00 \times 1}{3.75} \right) h^*(t) = \boxed{\left(\frac{2.526}{3.75} \right)} h^*(t) \Rightarrow$$

$$G_1 = 0.674$$

$$\Rightarrow g_1(t) = \boxed{G_1} h^*(t)$$

γενικευμένη δύναμη διέγερσης 1ου ιδιοανύσματος

ομοίως ...

$$g_2(t) = \frac{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underset{\sim}{F}}{m_{22}} = \frac{\begin{bmatrix} -0.874 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} h^*(t)}{4.29} = \left(\frac{-0.874 \times 2 + 1.00 \times 1}{4.29} \right) h^*(t) = \boxed{\left(\frac{-0.748}{4.29} \right)} h^*(t) \Rightarrow$$

$$G_2 = -0.174$$

$$\Rightarrow g_2(t) = \boxed{G_2} h^*(t),$$

γενικευμένη δύναμη διέγερσης 2ου ιδιοανύσματος

οπότε ...

$$\ddot{q}_i\left(t\right)+\omega_i^2\,q_i\left(t\right)=g_i\left(t\right),\quad i=1,2 \qquad \longleftrightarrow \qquad \ddot{q}_i\left(t\right)+\omega_i^2\,q_i\left(t\right)=G_i h^*\left(t\right),\ i=1,2 \qquad (1)$$

ΛΥΣΗ ...

- ***μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών***
- ***μετασχηματισμός Laplace***

μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών ...

μορφή της λύσης $q_i(t)$

$$q_i(t) = \underbrace{q_{iP}}_{\text{μερική λύση}} + \underbrace{q_{ih}}_{\text{ομογενής λύση}}, i = 1,2$$

ακολουθεί τη μορφή της διεγείρουσας δύναμης (μορφής Heaviside)

αρμονικής μορφής

$$q_{ih}(t) = A_{ii}\cos(\omega_i t) + B_{ii}\sin(\omega_i t), i = 1,2$$

$$q_{iP} = P_i\, h^*(t)$$

$t > 0 \rightarrow$ ***χρονικά σταθερή τιμή*** $\rightarrow \ddot{q}_{ip}(t) = 0$

$$q_i(t) = \underbrace{P_i\, h^*(t)}_{\text{μερική λύση } q_{1P}} + \underbrace{A_{ii}\cos(\omega_i t) + B_{ii}\sin(\omega_i t)}_{\text{ομογενής λύση } q_{1h}}, i = 1,2$$

2

$$q_{iP} = P_i\, h^*(t)$$

❶ $\Rightarrow$ ...

$$\ddot{q}_{ip}(t) = 0$$

σταθερά ελατηρίου

γενικευμένη δύναμη διέγερσης

$$\omega_i^2\, P_i\, \cancel{h^*(t)} = G_i \cancel{h^*(t)},\ i = 1,2 \Rightarrow \omega_i^2\, P_i = G_i,\ i = 1,2 \Rightarrow P_i = \left(\frac{G_i}{\omega_i^2}\right) = const,\ i = 1,2$$

$$\equiv$$

ισοδύναμο στατικό πλάτος ... $Q_{i,ST} = P_i = \left(\dfrac{G_i}{\omega_i^2}\right) = const,\ i = 1,2$

$\Downarrow$ ❷

$$q_i(t) = Q_{i,ST} + A_{ii}\cos(\omega_i t) + B_{ii}\sin(\omega_i t),\ i = 1,2$$ ❸

Άσκηση 8: ΛΥΣΗ

υπολογισμός σταθερών συντελεστών … $P_i \quad A_{ii} \quad B_{ii}$ ➡ ***αρχικές συνθήκες …***

για $t=0^+$ ***και όχι*** $t=0$ ***για την οποία η συνάρτηση Heaviside δεν ορίζεται***

3 $\Rightarrow$ …

$$q_i(t)=0 \Rightarrow Q_{i,ST}+A_{ii}\overset{\sim 1}{\cancel{\cos(\omega_i t)}}+\overset{\sim 0}{\cancel{B_{ii}\sin(\omega_i t)}}=0,\ i=1,2 \Rightarrow Q_{i,ST}+A_{ii}=0 \Rightarrow \boxed{A_{ii}=-Q_{i,ST}}$$

4

η ταχύτητα … $\dot{q}_i(t)=-\omega_i A_{ii}\sin(\omega_i t)+\omega_i B_{ii}\cos(\omega_i t),\ i=1,2$

για $t=0^+$ ***και όχι*** $t=0$ ***για την οποία η συνάρτηση Heaviside δεν ορίζεται***

$\Rightarrow$ …

$$\Rightarrow \ldots \quad \dot{q}_i(t)=0 \Rightarrow -\omega_i A_{ii}\overset{\sim 0}{\cancel{\sin(\omega_i t)}}+\omega_i B_{ii}\overset{\sim 1}{\cancel{\cos(\omega_i t)}}=0,\ i=1,2 \Rightarrow \boxed{\omega_i} B_{ii}\cos(\omega_i t)=0,\ i=1,2$$

πρέπει να ισχύει για κάθε ιδιοσυχνότητα ω_i

$\Downarrow$

$$\boxed{B_{ii}=0,\ i=1,2}$$

5

3 $\Rightarrow$ 4 5 ... $q_i(t) = Q_{i,ST} h^*(t) - Q_{i,ST}\cos(\omega_i t) = Q_{i,ST}\left[h^*(t) - \cos(\omega_i t)\right],\ i = 1,2$

6

αριθμητική αντικατάσταση για ... $i = 1$

ισοδύναμο στατικό πλάτος ... $P_1 = Q_{1,ST} = \left(\dfrac{G_1}{\omega_1^2}\right) = \left(\dfrac{0.674}{0.356}\right) \Rightarrow P_1 = 1.89$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow q_1(t) = Q_{1,ST}\left[h^*(t) - \cos(\omega_1 t)\right] \Rightarrow q_1(t) = 1.89\left[h^*(t) - \cos(\omega_1 t)\right]$$ 7

αριθμητική αντικατάσταση για ... $i = 2$

ισοδύναμο στατικό πλάτος ... $P_2 = Q_{2,ST} = \left(\dfrac{G_2}{\omega_2^2}\right) = \left(\dfrac{-0.174}{2.81}\right) \Rightarrow P_2 = -0.0619$

και ... 6

$$\Rightarrow q_2(t) = Q_{2,ST}\left[h^*(t) - \cos(\omega_2 t)\right] \Rightarrow q_2(t) = -0.0619\left[h^*(t) - \cos(\omega_2 t)\right]$$ 8

επομένως ...

$$(I) \overset{❼}{\underset{❽}{\Longrightarrow}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\Phi}_1\, q_1(t) + \underset{\sim}{\Phi}_2\, q_2(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 1.89 \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} \left(h^*(t) - \cos(\omega_1 t)\right) + (-0.0619) \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} \left(h^*(t) - \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\Rightarrow \ldots \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left(1.89 \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} - 0.0619 \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix}\right) \boxed{h^*(t)}$$

$$-1.89 \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} \boxed{\cos(\omega_1 t)}$$

$$+0.0619 \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} \boxed{\cos(\omega_2 t)} \quad \Rightarrow \ldots$$

Άσκηση 8: ΛΥΣΗ

$$\Rightarrow \ldots \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.49 \\ 1.83 \end{bmatrix} h^*(t) - \begin{bmatrix} 1.44 \\ 1.89 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) - \begin{bmatrix} 0.0541 \\ -0.0619 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t)$$

ισοδύναμο στατικό πλάτος

ταλάντωση με συχνότητα ω_2

... υπέρθεση +

... υπέρθεση +

ταλάντωση με συχνότητα ω_1

οι ταλαντώσεις των δύο βαθμών ελευθερίας δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά ακολουθούν την αναλογία που προσδιορίζει (ισοδύναμα, δεσμεύει ή ρυθμίζει ή προκαθορίζει) το ιδιοάνυσμα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ...

A ***το ισοδύναμο στατικό πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογο της ιδιοσυχνότητας***

$$\boxed{Q_{i,ST}} = \left(\frac{G_i}{\boxed{\omega_i^2}} \right), i = 1, 2$$

⬇

όσο αυξάνεται η τάξη της ιδιοσυχνότητας τόσο το ισοδύναμο στατικό πλάτος θα είναι μικρότερο

(το ισοδύναμο ελατήριο θα είναι ποιο δύσκαμπτο και ως εκ τούτου, η συνεισφορά στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος θα είναι μικρότερη)

ή ... εξίσωση ισορροπίας του δυναμικού συστήματος

$$m_{ii}\dot{q}_i + k_{ii}q_i = \underset{\sim}{X}_i^T \underset{\sim}{F} \Rightarrow \left(\frac{1}{\omega_i^2}\right)\dot{q}_i + q_i = \left(\frac{1}{k_{ii}}\right)\underset{\sim}{X}_i^T \underset{\sim}{F} \xrightarrow{\omega_i \to \infty} q_i = \left(\frac{1}{k_{ii}}\right)\underset{\sim}{X}_i^T \underset{\sim}{F}$$

⬇

όσο αυξάνεται η τιμή της ιδιοσυχνότητας ω_i , τόσο ο όρος $\left(1/\omega_i^2\right)\dot{q}_i$ τείνει στο 0 (ο οποίος εκφράζει τη δυναμική απόκριση του συστήματος), άρα απομένει η ισοδύναμη στατική απόκριση του συστήματος

⬇

Στη δυναμική ανάλυση εύκαμπτων πολυβάθμιων δυναμικών συστημάτων, μόνον ***λίγες ΧΑΜΗΛΕΣ ιδιοσυχνότητες*** *είναι εκείνες που* ***συνεισφέρουν ουσιαστικά*** *στη* ***δυναμική απόκριση*** *του συστήματος (οι υψηλές ιδιοσυχνότητες τείνουν να ακυρώσουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος).*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ...

ποσοτικά, η συνεισφορά του 2ου ιδιοανύσματος είναι πολύ μικρότερη της συνεισφοράς του 1ου ιδιοανύσματος

B

πλάτος γενικευμένης δύναμης δευτέρου ιδιοανύσματος $G_2 = -0.174 < 0$

όταν η διεγείρουσα δύναμη τείνει να μετακινήσει τις μάζες του συστήματος προς την ίδια κατεύθυνση, το ιδιοάνυσμα με αρνητική τιμή τείνει να μετακινήσει τις μάζες προς την αντίθετη κατεύθυνση

↓

αυτό το ιδιοάνυσμα τείνει να αναιρέσει την επιβαλλόμενη δύναμη

↓

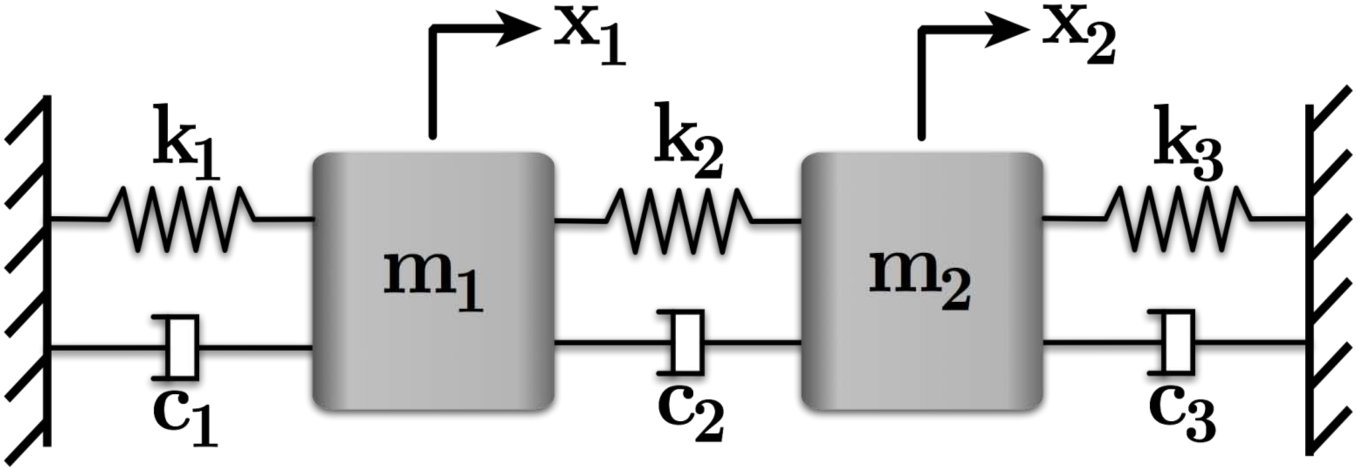
μείωση του πλάτους της δύναμης, η οποία διεγείρει το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ...

- ***Όσο, δε, μεγαλύτερη είναι η τάξη του ιδιοανύσματος (δηλαδή όσο μεγαλύτερος είναι ο αύξων αριθμός που αντιστοιχεί στα, ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά, ιδιοανύσματα, π.χ. δέκατο ιδιοάνυσμα) τόσο πιο 'ανώμαλη' είναι η μορφή του ιδιοανύσματος.***

- ***Ποιοτικά, μπορούμε να πούμε ότι κάθε ιδιοάνυσμα λειτουργεί ως 'φίλτρο', το οποίο φιλτράρει τη γεωμετρική κατανομή της δύναμης. Έτσι, όσο πιο 'ανώμαλη' είναι η μορφή του ιδιοανύσματος, τόσο πιο 'ισχυρό φίλτρο' καθίσταται το ιδιοάνυσμα, με αποτέλεσμα τα πλάτη των γενικευμένων δυνάμεων να είναι μικρότερα.***

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!



Εργαστήριο
Δυναμικής & Κατασκευών

Δρ. Αντωνιάδης Ι. . . . . antogian@central.ntua.gr
Δρ. Γιακόπουλος Χ. . . . chryiako@central.ntua.gr