ΔΥΝΑΜΙΚΗ

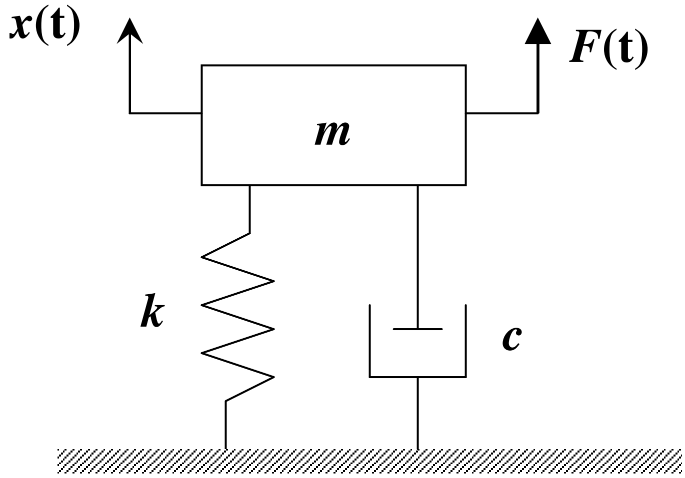
ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 2η
Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας και επίλυση της περίπτωσης ΧΩΡΙΣ εξωτερική διέγερση

Γενικά

Στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, παρουσιάσθηκε το Δυναμικό Σύστημα του Σχήματος 1, όπου μία μάζα m στηρίζεται σε ένα ελατήριο σταθεράς k και σε έναν αποσβεστήρα σταθεράς c.



Σχήμα 1: Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Στο Σχήμα 1, ως $F(t)$ συμβολίζεται η χρονικά μεταβαλλόμενη εξωτερική διέγερση του συστήματος και ως $x(t)$ συμβολίζεται η χρονικά μεταβαλλόμενη απόκριση του συστήματος. Τα στοιχεία m, k και c έχουν κοινή μετατόπιση $x(t)$ (σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας -1 Β.Ε.). Η εξίσωση κίνησης του συγκεκριμένου συστήματος είναι:

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F(t) \tag{1}$$

Από φυσικής απόψεως, η Εξ.(1) περιγράφει την ισορροπία μεταξύ των εσωτερικών δυνάμεων (δυνάμεις αδρανείας $m\ddot{x}$, δυνάμεις απόσβεσης $c\dot{x}$, δυνάμεις ελαστικότητας $k\,x$) και της εξωτερικής διέγερσης $F(t)$. Από μαθηματικής απόψεως, η Εξ.(1) περιγράφει μια Γραμμική Διαφορική Εξίσωση δευτέρας τάξεως. Η μαθηματική λύση $x(t)$ της Εξ.(1) είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2}$$

Στην Εξ.(2), ως $x_h(t)$ συμβολίζεται η αποκαλούμενη 'ομογενής λύση' της Εξ.(1) (ο δείκτης h δηλώνει "homogeneous" solution) , ενώ ως $x_p(t)$ συμβολίζεται η αποκαλούμενη 'μερική λύση' της Εξ.(1) (ο δείκτης p δηλώνει "partial solution").

Σχετικά με την ομογενή λύση, η ποσότητα $x_h(t)$, από μαθηματικής απόψεως, προκύπτει όταν το δεξί μέλος της Εξ.(1) τεθεί ίσο με μηδέν, δηλαδή όταν ισχύει:

$$F(t) = 0 \tag{3}$$

Από την φυσική πλευρά του Μηχανικού, η ομογενής λύση $x_h(t)$ της Εξ.(1) εκφράζει την απόκριση του εξεταζόμενου συστήματος σε ελεύθερες ταλαντώσεις, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται όταν δεν ασκείται εξωτερική διέγερση στο δυναμικό σύστημα, άρα:

$$x_h(t) = \quad \text{ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΛΥΣΗ = ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ} \tag{4}$$

Για το εξεταζόμενο σύστημα του Σχήματος 1, χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες: 1) Την αρχική μετατόπιση 2) Την αρχική ταχύτητα:

$$x_o = x(t=0) = x(0) \tag{5}$$

$$v_o = \dot{x}_o = \dot{x}(t=0) = \dot{x}(0) \tag{6}$$

Η αρχική επιτάχυνση συμβολίζεται:

$$a_o = \ddot{x}_o = \ddot{x}(t=0) = \ddot{x}(0) \tag{7}$$

και προκύπτει από την εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου συστήματος στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης για t=0:

$$m\,\ddot{x}(0) + c\,\dot{x}(0) + k\,x(0) = 0 \tag{8}$$

Η τάξη μίας Διαφορικής Εξίσωσης καθορίζεται από την υψηλότερη τάξη παραγώγου, η οποία εμφανίζεται στη Διαφορική Εξίσωση. Στην Εξ.(1), η υψηλότερης τάξης εμφανιζόμενη παράγωγος είναι η δεύτερη χρονική παράγωγος, οποία οφείλεται στις δυνάμεις αδράνειας. Άρα, λόγω των δυνάμεων αδράνειας, οι διαφορικές εξισώσεις που θα εμφανιστούν ακόμη και σε σύστημα ενός ή πολλών Β.Ε. θα είναι $2^{ας}$ τάξεως.

Όπως έχει ήδη ειπωθεί αρκετές φορές, η Εξ.(1), από μαθηματικής απόψεως, είναι μία Διαφορική Εξίσωση 2ας τάξεως, η οποία, είναι δυνατόν να γραφεί και ως εξής:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \left(F(t) \big/ m \right) \tag{9}$$

Στην Εξ.(9), η ποσότητα ω καλείται ιδιοσυχνότητα, ή ακριβέστερα, κυκλική ιδιοσυχνότητα, έχει μονάδες $(rad/\sec)$ και ορίζεται ίση προς:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m} \right)} \tag{10}$$

Η ίδια πληροφορία εκφράζεται και μέσω της ποσότητας f, η οποία καλείται ιδιοσυχνότητα, μετριέται σε (Hz) και ορίζεται ίση προς:

$$\mathrm{f} = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{11}$$

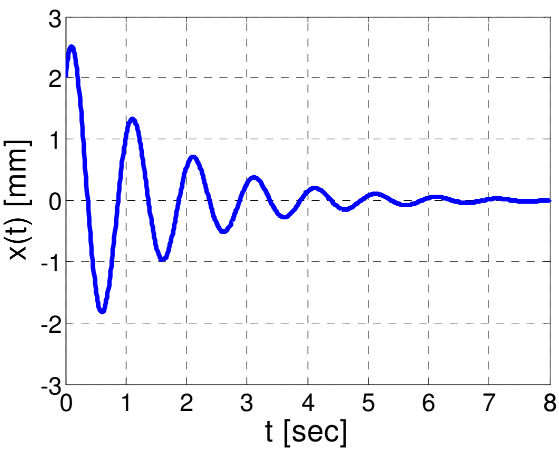
Επίσης, στην Εξ.(9), η ποσότητα ζ καλείται λόγος απόσβεσης, είναι αδιάστατο μέγεθος και ορίζεται ίση προς:

$$\zeta = \left(\frac{c}{2\omega m}\right) \tag{12}$$

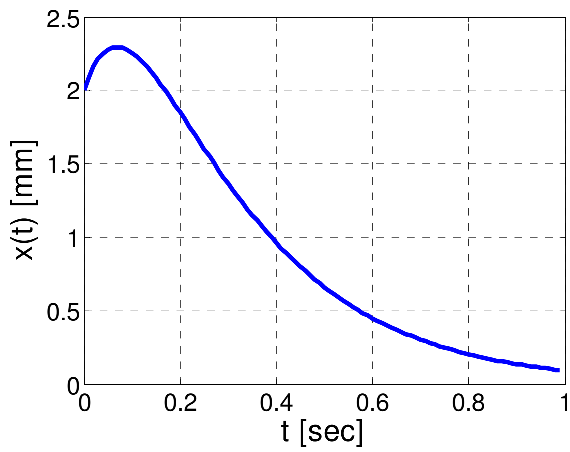
Για την επίλυσή της Εξ.(9) χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, το οποίο στην περίπτωση ελεύθερης ταλάντωσης (δηλαδή όταν $F(t)=0$) γράφεται ως εξής:

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0 \tag{13}$$

Οι λύσεις της Εξ.(13), δηλαδή οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου s_1 και s_2, καθορίζουν τη μορφή της απόκρισης. Σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα θα εξηγηθεί ο ορισμός και η χρήση της ποσότητας s. Από μαθηματικής απόψεως, η Εξ.(13), βάσει της τιμής του λόγου απόσβεσης, διαθέτει για «μη αρνητική απόσβεση» ***δύο βασικές λύσεις*** *(Σχήμα 2)*:



(α)



(β)

Σχήμα 2: Τυπική μορφή απόκρισης $x(t)$ για (α) υποκρίσιμη ($1>\zeta>0$) απόσβεση και β) υπερκρίσιμη ($\zeta>1$) απόσβεση του μονοβάθμιου συστήματος $m-c-k$

- ***1η κατηγορία λύσεων: $\zeta>1$ (υπερκρίσιμη απόσβεση, υπερκρίσιμη ταλάντωση)***
  Η μαθηματική έκφραση της απόκρισης του συστήματος ισούται με:

$$x(t) = x_h(t) = \left(\frac{1}{s_1 - s_2}\right)\left[x_o\left(-s_2 e^{s_1 t} + s_1 e^{s_2 t}\right) + v_o\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)\right] \tag{14}$$

Από φυσική άποψη, το σύστημα δεν ταλαντώνεται. Οι ρίζες s_1 και s_2 είναι πραγματικές και αρνητικές.

- ***2η κατηγορία λύσεων:*** $1 > \zeta > 0$ ***(υποκρίσιμη απόσβεση, υποκρίσιμη ταλάντωση)***

  Η μαθηματική έκφραση της απόκρισης του συστήματος ισούται με:

$$x(t) = x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left[x_o\cos(\omega_n t) + \left(\frac{v_o + \zeta\omega_n x_o}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\right] \quad (15)$$

  Οι ρίζες s_1 και s_2 είναι συζυγείς μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Το μέγεθος ω_n καλείται ***συχνότητα αποσβενόμενων ταλαντώσεων*** και ορίζεται ίση προς:

$$\omega_n = \omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \quad (16)$$

  Από φυσική άποψη, το σύστημα ταλαντώνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε το πλάτος της ταλάντωσης διαρκώς να μειώνεται.

Άλλες μορφές λύσεων έχουν ως εξής:

- ***3η κατηγορία λύσεων:*** $\zeta = 1$

  Η περίπτωση αυτή αναφέρεται για λόγους πληρότητας και έχει μόνο μαθηματικό ενδιαφέρον (βλ. Εξ.(14), με $s_1 \leftrightarrow s_2$). Περιγράφει ταλάντωση με περίοδο ταλάντωσης $T \to \infty$, κάτι το οποίο, τεχνικά, δεν επιτυγχάνεται ποτέ. Συνεπώς, από την οπτική του Μηχανικού, ποτέ δεν προκύπτει μία κατασκευή να έχει μοναδιαίο λόγο απόσβεσης.

- ***4η κατηγορία λύσεων:*** $\zeta < 0$

  Από την άποψη του Μηχανικού, η συγκεκριμένη κατηγορία αφορά δυναμικά συστήματα, στα οποία υφίσταται κάποια μορφή αστάθειας (π.χ. μη γραμμικοί ταλαντωτές) και επιτυγχάνεται πρόσδοση ενέργειας στο σύστημα (αντί καταστροφή αυτής). Ως παράδειγμα, αναφέρονται τα αιωρούμενα καλώδια, στα οποία είναι δυνατόν η αεροελαστική τους αστάθεια να οδηγήσει σε απορρόφηση ενέργειας από την ροή του αέρα, όταν, προφανώς, φυσά άνεμος. Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ενεργητική ανάρτηση των αυτοκινήτων. Αντί του κλασσικού συστήματος (παθητικής) ανάρτησης («μπουκάλα με υγρό»), χρησιμοποιούνται ηλεκτροκινητήρες, με τους οποίους επιχειρείται τυπικά η ανάπτυξη δύναμης σε αντίθετη αναλογία με την κατακόρυφη ταλάντωση του οχήματος (Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου). Ωστόσο, εσφαλμένη χρήση αυτού του νόμου ελέγχου μπορεί να οδηγήσει σε εμφάνιση αστάθειας (λύσεις με $\zeta < 0$).

- ***5η κατηγορία λύσεων:*** $\zeta = 0$

  Πρόκειται για την ειδική περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης ενός σώματος. Από μαθηματική άποψη, αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το δεξί μέλος της Εξ.(14) τίθεται ίσο με μηδέν. Ωστόσο, από την άποψη του Μηχανικού, αυτή η ειδική περίπτωση, αν και δεν συναντάται στη φύση, έχει ιδιαίτερη αξία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η περίπτωση $\zeta = 0$, συγκριτικά με την περίπτωση όπου $1 > \zeta > 0$, στην οποία εμπίπτει ένα ευρύτατο σύνολο τεχνολογικών εφαρμογών, εμφανίζει τα εξής δύο σημαντικά χαρακτηριστικά:

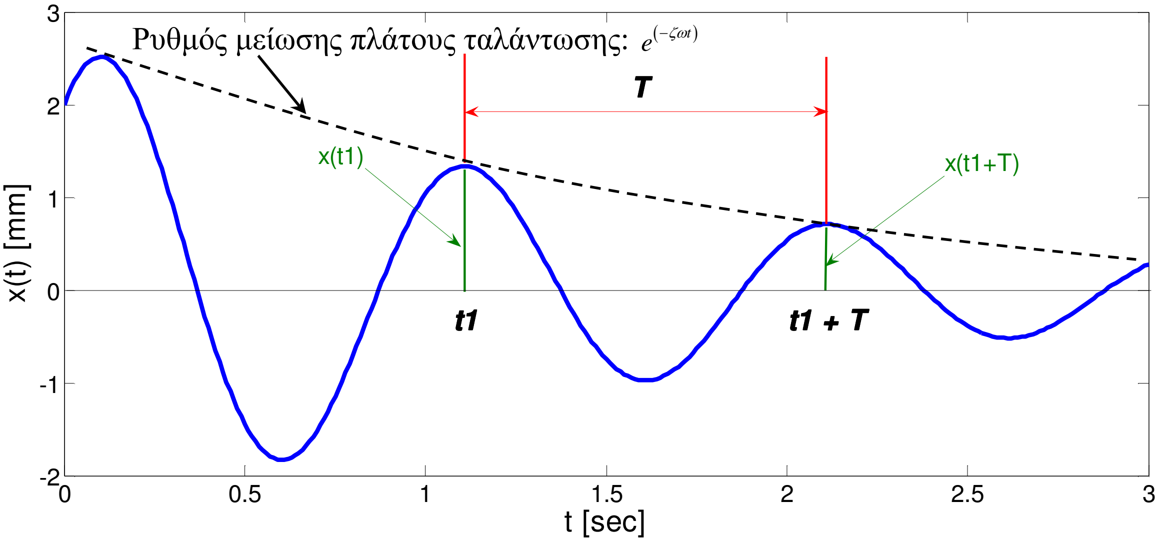
- Υπολογίζεται πολύ πιο εύκολα. Είναι γεγονός ότι ακόμα και εάν χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού, όπως είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, η ***ακριβής*** μοντελοποίηση της απόσβεσης σε μία κατασκευή είναι πολύ δύσκολη. Επίσης, σε αντίθεση με την ιδιοσυχνότητα, η οποία είναι δυνατόν να προσδιοριστεί πειραματικά, ο λόγος απόσβεσης ζ δεν είναι εύκολα πειραματικά μετρήσιμος.
- Αφορά μία δυσμενέστερη κατάσταση. Συνεπώς, εάν η σχεδίαση είναι ασφαλής έναντι της δυσμενέστερης κατάστασης, τότε είναι ασφαλής και έναντι της πραγματικής κατάστασης. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι '*η σχεδίαση βρίσκεται από την ασφαλή πλευρά (on the safe side)*', ή, ισοδύναμα, '*η σχεδίαση είναι συντηρητική*'.

Συνοψίζοντας, έστω ότι, για το εξεταζόμενο σύστημα του Σχήματος 1, η μάζα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας της, συγκρατείται σε μία νέα θέση και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί. Από τεχνικής απόψεως, αυτό σημαίνει ότι προσδίδεται στο σύστημα μία αρχική μετατόπιση ή/και μία αρχική ταχύτητα. Διαισθητικά, αναμένουμε το σύστημα να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με διαρκώς μειούμενο πλάτος ταλάντωσης (αποσβενόμενη αρμονική ταλάντωση). Αυτή η διαίσθηση οφείλεται στην εντύπωση που μας δημιουργείται παρατηρώντας διάφορα φαινόμενα στη φύση, π.χ. ταλαντώσεις κλαδιών δέντρων όταν φυσά δυνατός άνεμος ή ταλαντώσεις διάφορων τεχνολογικών κατασκευών (π.χ. πτέρυγες αεροσκαφών, κτίρια σε σεισμό, κ.λ.π.). Πράγματι, τα περισσότερα υλικά, τα οποία υπάρχουν στη φύση χαρακτηρίζονται από χαμηλές τιμές λόγου απόσβεσης ζ.

Ο λόγος απόσβεσης ζ καθορίζει την ικανότητα απόσβεσης ενός συστήματος. Όσο υψηλότερη είναι η τιμή του λόγου απόσβεσης ζ, τόσο υψηλότερη είναι και η απόσβεση (μείωση πλάτους και ενέργειας) των ταλαντώσεων. Οι αποκαλούμενες '*παθητικές τεχνολογικές κατασκευές*' στην πλειοψηφία τους έχουν σχετικά χαμηλή τιμή ζ (το πολύ έως $15\% - 20\%$). Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν το σκυρόδεμα (μπετόν) και τυπικές μεταλλικές κατασκευές. Ωστόσο, σε πάρα πολλές τεχνολογικές εφαρμογές, είναι επιθυμητή η εξασφάλιση υψηλής τιμής ζ. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα οχήματα, στα οποία είναι επιθυμητή η πλήρης ακύρωση των ταλαντώσεων επαναφοράς, προκειμένου να εξασφαλισθεί καλύτερη συμπεριφορά του οχήματος στην πορεία επί ανωμάλου εδάφους. Για τις περιπτώσεις αυτές κατασκευάστηκαν και χρησιμοποιούνται ειδικά τεχνολογικά μηχανολογικά στοιχεία (αποσβετήρες) τα οποία εξασφαλίζουν υπερκρίσιμη απόσβεση (π.χ. ελαστικά, εδράσεις μηχανών χρησιμοποιώντας ειδικά ελαστομερή, κ.ο.κ.)

Υπολογισμός μέτρου απόσβεσης

Έστω το μονοβάθμιο σύστημα $m-c-k$ του Σχήματος 1 και έστω ότι αυτό χαρακτηρίζεται από υποκρίσιμη τιμή του λόγου απόσβεσης ζ. Μία τυπική μορφή απόκρισης $x(t)$ του συστήματος αυτού απεικονίζεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Χαρακτηριστικά μεγέθη τυπικής μορφής υποκρίσιμης απόκρισης $x(t)$

Ως T συμβολίζεται η περίοδος ταλάντωσης. Η συχνότητα της αποσβενόμενης ταλάντωσης ορίζεται σύμφωνα με την Εξ.(16), η οποία επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου:

$$\omega_n = \omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{17}$$

Διευκρινίζεται ότι στην περίπτωση της υποκρίσιμης ταλάντωσης, η περίοδος T σχετίζεται με τη συχνότητα ταλάντωσης και όχι με τη φυσική συχνότητα, δηλαδή ισχύει:

$$T = \left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) \tag{18}$$

Ως ***μέτρο απόσβεσης*** Z ορίζεται ο λογάριθμος του λόγου δύο πλατών, τα οποία απέχουν μεταξύ τους χρονική περίοδο ίση με T:

$$Z = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}} \tag{19}$$

Για πρακτικούς λόγους υπολογισμού,χρησιμοποιούνται οι μέγιστες τιμές. Στο Σχήμα 3, σημειώνονται οι διαδοχικές μέγιστες τιμές $x(t_1)$ και $x(t_1+T)$. (Σημείωση: να μην συγχέουμε το ***μέτρο απόσβεσης* Z** με την **σταθερά απόσβεσης c** και **τον λόγο απόσβεσης** ζ)

Από την Εξ.(17), είναι φανερό ότι, εξ ορισμού, η συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης (φυσική συχνότητα) και η συχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης είναι δύο διαφορετικά μεγέθη, τα οποία, από μαθηματική άποψη, ταυτίζονται όταν ο λόγος απόσβεσης είναι μηδενικός. Ωστόσο, από την οπτική γωνία του Μηχανικού και για μικρούς λόγους απόσβεσης, τα δύο μεγέθη είναι δυνατόν να θεωρηθούν ότι έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\omega_n \approx \omega \tag{20}$$

Για παράδειγμα, έστω λόγος απόσβεσης $\zeta = 10\% = 0.1$, τότε ισχύει:

$$\omega_n = \omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} = \omega\sqrt{\left(1-0.1^2\right)} = \omega\sqrt{\left(1-0.01\right)} = \omega\sqrt{0.99} = 0{,}994987\omega \approx \omega \tag{21}$$

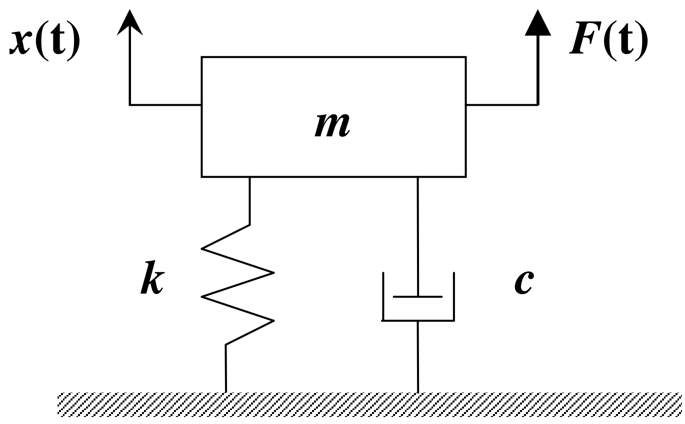
Ένα ακόμα χρήσιμο μέγεθος είναι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης (βλ. Σχήμα 3), ο οποίος εξαρτάται από τον λόγο απόσβεσης και από τη φυσική συχνότητα του συστήματος:

$$\rho\upsilon\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\sigma\eta\varsigma\ \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\upsilon\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma = e^{(-\zeta\omega t)} \tag{22}$$

Τέλος, διευκρινίζεται ότι στους αποσβεστήρες συνήθως αναγράφεται η σταθερά c και όχι ο λόγος απόσβεσης ζ, ο οποίος χαρακτηρίζει το σύνολο της κατασκευής, στην οποία ενσωματώνεται ο αποσβεστήρας.

Εφαρμογή: Δοκιμή Στατικής Μετατόπισης Συστήματος ενός Βαθμού Ελευθερίας

Στη βιομηχανία, συστήματα ενός Β.Ε. όπως αυτό που εμφανίζεται στο σχήμα 4 αποτελούν συστήματα έδρασης, επί των οποίων τοποθετούνται μηχανές μάζας m (ανηρτημένη μάζα). Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών ενός τέτοιου συστήματος έδρασης αποτελεί μία πρακτική ανάγκη της βιομηχανίας.



Σχήμα 4: Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Έστω ότι για το σύστημα του Σχήματος 4 αναζητούνται τα μεγέθη m, k, c, ζ και ω. Μία διαδικασία υπολογισμού (δοκιμή στατικής μετατόπισης) των μεγεθών αυτών είναι η εξής:

Βήμα 1. Ελαφρά κατακόρυφη ανύψωση της μηχανής μάζας m κατά x_o

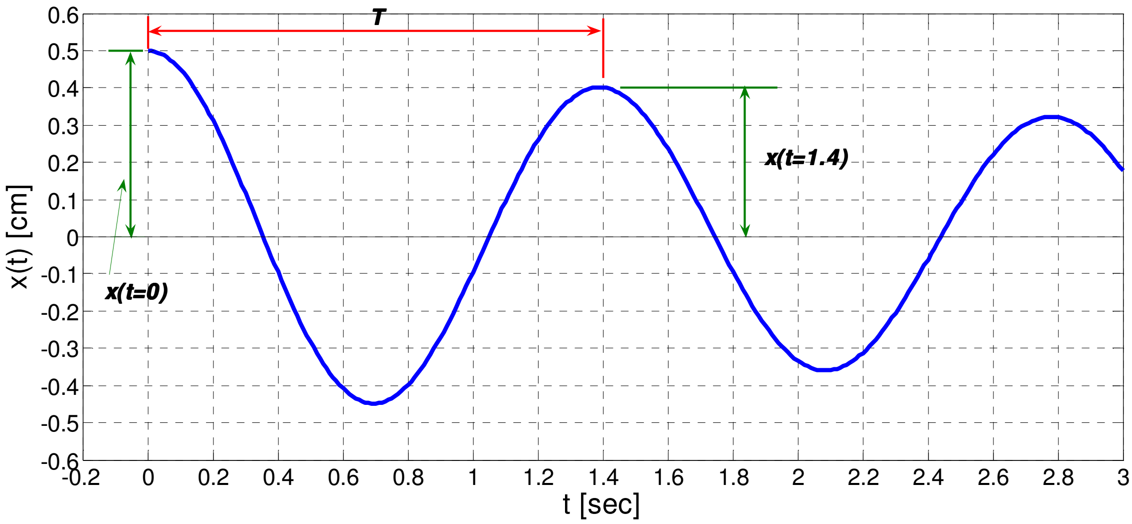
Βήμα 2. Καταγραφή της απαιτούμενης δύναμης F για την ανύψωση (βλ. Βήμα 1)

Βήμα 3. Άφεση της μάζας m να ταλαντωθεί ελεύθερα και καταγραφή δύο διαδοχικών μέγιστων πλατών της ταλάντωσης.

Βήμα 4. Η χρονική απόσταση των δυο πλατών αντιστοιχεί στη περίοδο T

Βήμα 5. Ο λόγος των δυο πλατών αντιστοιχεί στο μέτρο απόσβεσης Z

Έστω, λοιπόν, ότι με τη βοήθεια μίας γερανογέφυρας, ανυψώνεται η εξεταζόμενη μηχανή κατά $x_o = 0.5cm$ και έστω ότι η δύναμη που απαιτείται για την εν λόγω ανύψωση μετρήθηκε ίση προς $F = 8900N$. Διευκρινίζεται ότι, πρακτικά, η δύναμη F μετριέται με τη βοήθεια μίας δυναμοκυψέλης, η οποία προσαρτάται κατάλληλα μεταξύ αγκίστρου βαρουλκοφορείου και μηχανής. Στη συνέχεια, ελευθερώνουμε απότομα τη μηχανή και καταγράφουμε την ταλάντωσή της, η οποία έστω ότι απεικονίζεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Καταγραφή απόκρισης $x(t)$ στη δοκιμή στατικής μετατόπισης

Από το Σχήμα 5, βρίσκουμε ότι η πρώτη περίοδος επαναφοράς διήρκησε $T = 1.4\sec$, ενώ το αντίστοιχο πλάτος της ταλάντωσης ήταν $x(t = 1.4) = 0.4cm$.

Το πρώτο μέγεθος, το οποίο υπολογίζεται άμεσα, είναι η σταθερά k του ελατηρίου. Από τον ορισμό της δύναμης του ελατηρίου (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, Εξ.(4)), προκύπτει:

$$F = kx_o \Rightarrow k = \frac{F}{x_o} = \frac{8900}{0.5\times 10^{-2}} \Rightarrow k = 1.78\times 10^6 \frac{N}{\sec} \tag{23}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι ο λόγος απόσβεσης είναι μικρός, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\zeta << 1 \tag{24}$$

Με βάση αυτήν την υπόθεση, από τις Εξ.(17,18) προκύπτει:

$$\omega_n = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \xrightarrow{\zeta \ll 1} \frac{2\pi}{T} \approx \omega \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(25) με $T = 1.4\sec$ και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει:

$$\omega \approx \left(\frac{2\pi}{1.4}\right) \approx 4.487989\left(rad/\sec\right) \Rightarrow \omega \approx 4.49\left(rad/\sec\right) \tag{26}$$

Επίσης, από τον ορισμό του μέτρου απόσβεσης (Εξ.(19)) και από την Εξ.(24), προκύπτει:

$$Z = \ln\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}} \xrightarrow{\zeta \ll 1} \ln\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) \approx 2\pi\zeta \Rightarrow \zeta \approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)\ln\left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right) \tag{27}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(27), προκύπτει:

$$\zeta \approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)\ln\left(\frac{0.5}{0.4}\right) \Rightarrow \zeta \approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)\times\left(0.22314\right) \Rightarrow \zeta \approx 0.03551 \tag{28}$$

Από την Εξ.(28) προκύπτει μία μικρή τιμή για το λόγο απόσβεσης, κάτι που έρχεται σε συμφωνία με την αρχική απλοποιητική θεώρηση (Εξ.(24)). Εάν προέκυπτε μεγάλη τιμή ζ τότε αυτό θα ήταν σε αντίθεση με την αρχική απλοποιητική θεώρηση, οπότε τότε πράγματι δεν θα ήταν σωστό να δεχθούμε ότι ο λόγος απόσβεσης έχει μικρή τιμή.

Η μαθηματικώς ακριβής προσέγγιση θα ήταν η λύση της Εξ.(19) ως προς ζ. Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει:

$$Z = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}} \Rightarrow \left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2 = \frac{4\pi^2\zeta^2}{\left(1-\zeta^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2 - \zeta^2\left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right] = 4\pi^2\zeta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2 = \zeta^2\left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2 + 4\pi^2\zeta^2 = \zeta^2\left(\left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2 + 4\pi^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta^2 = \frac{\left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2}{\left(\left[\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)\right]^2 + 4\pi^2\right)} \tag{29}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση, προκύπτει:

$$\zeta^2 = \left(\frac{\left[\ln\left(\frac{0.5}{0.4} \right) \right]^2}{\left[\ln\left(\frac{0.5}{0.4} \right) \right]^2 + 4\pi^2} \right) = \left(\frac{0.049793}{0.049793 + 39.478418} \right) = \left(\frac{0.049793}{39.528211} \right) = 0.0012596 \quad (30)$$

Συνεπώς, οι ρίζες της Εξ.(30) θα είναι:

$$\zeta_{1,2} = \pm 0.035491 \quad (31)$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται, διότι δεν αντιστοιχεί σε αποσβενόμενη ταλάντωση (βλ. σελ. 2.6), δηλαδή δεν αντιστοιχεί στο είδος της ταλάντωσης που έχει καταγραφεί. Άρα, θα είναι:

$$\zeta = 0.035491 \quad (32)$$

Συγκρίνοντας μεταξύ τους τις Εξ.(28,32), προκύπτει ότι η ακριβής, αλλά πιο σύνθετη και χρονοβόρος, μαθηματική προσέγγιση οδηγεί στη λύση $\zeta = 0.035491$, ενώ η προσέγγιση του Μηχανικού οδηγεί στη λύση $\zeta \approx 0.03551$, με σαφώς απλούστερο και γρηγορότερο τρόπο.

Το επόμενο μέγεθος ενδιαφέροντος που υπολογίζεται είναι η μάζα m της μηχανής. Από τον ορισμό της φυσικής ιδιοσυχνότητας (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, Εξ.(14)), ισχύει:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \left(\frac{k}{\omega^2} \right) \quad (33)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(35) τις τιμές από τις Εξ.(23,26), προκύπτει:

$$m = \frac{1.78 \times 10^6}{4.49^2} = 88293.212\text{kg} \Rightarrow m = 88293\text{kg} \quad (34)$$

Τέλος, η σταθερά απόσβεσης, βάσει του ορισμού του λόγου απόσβεσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, Εξ.(14), ισούται με:

$$\zeta = \left(\frac{c}{2\omega m} \right) \Rightarrow c = 2\zeta\omega m \quad (35)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(37) τις τιμές από τις Εξ.(26,28,36) προκύπτει:

$$c = 2\zeta\omega m = 2 \times 0.03551 \times 4.49 \times 88293 = 28154.854 \Rightarrow c = 28155 \left(N\sec/m \right) \quad (36)$$

Τονίζεται ότι στη δοκιμή στατικής μετατόπισης, η ανύψωση του ανηρτημένου σώματος θα πρέπει να είναι κατακόρυφη. Για να εξασφαλισθεί αυτό, θα πρέπει το ανηρτημένο σώμα να ανυψωθεί από το κέντρο μάζας του. Σε διαφορετική περίπτωση, εκτός της κατακόρυφης ταλάντωσης, θα πραγματοποιηθεί και μία στροφική ταλάντωση, ο άξονας περιστροφής της οποίας θα διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος. Τέλος, διευκρινίζεται ότι η δοκιμή στατικής μετατόπισης είναι εφαρμόσιμη και στα οχήματα.