ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

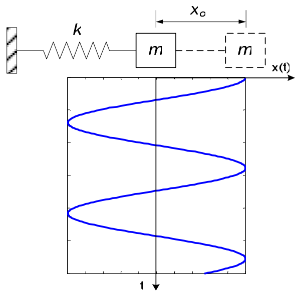
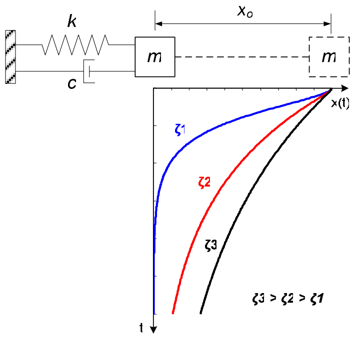
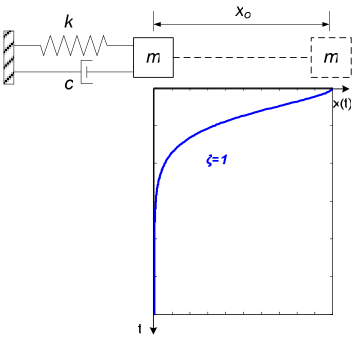
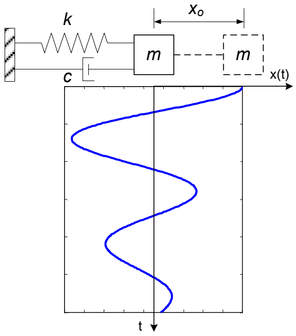
Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 3η:
Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας με αρμονική διέγερση και απόσβεση

Γενικά

Στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, εξετάσθηκαν δύο περιπτώσεις του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$: ***χωρίς*** απόσβεση/***χωρίς*** εξωτερική διέγερση, και ***με*** απόσβεση/***χωρίς*** εξωτερική διέγερση. Συνοπτικά, η απόκριση του συστήματος αυτού όταν η μάζα m εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας της κατά x_o φαίνεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Απόκριση δυναμικού συστήματος $m-c-k$ χωρίς εξωτερική διέγερση

	***#1: Χωρίς απόσβεση*** $(\zeta=0)$ Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με φυσική ιδιοσυχνότητα: $\omega=\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$. Η απόκριση ισούται με: $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$.
	***#2: Απόσβεση με*** $\zeta \gg 1$ ***(υπερκρίσιμη απόσβεση)*** Για πολύ μεγάλες τιμές του λόγου απόσβεσης, ο αποσβεστήρας εμφανίζει μεγάλη αντίσταση (στο εσωτερικό του αποσβεστήρα, οι υπάρχουσες οπές είναι μικρές και το λάδι διέρχεται από αυτές με δυσκολία). Το σύστημα ***δεν*** ταλαντώνεται και η απόκριση ισούται με (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02 / Εξ.(14)): $x(t)=x_h(t)=\left(\frac{1}{s_1-s_2}\right)\left[x_o\left(-s_2e^{s_1t}+s_1e^{s_2t}\right)+v_o\left(e^{s_1t}-e^{s_2t}\right)\right]$
	***#3: Απόσβεση με*** $\zeta=1$ ***(κρίσιμη απόσβεση)*** Συγκριτικά με την υπερκρίσιμη απόσβεση, το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση ηρεμίας στο ποιο σύντομα χρονικό διάστημα ***χωρίς*** να ταλαντωθεί (εκτός άμα υπάρχει αρχική ταχύτητα v_o. Η απόκριση του συστήματος ισούται με $x(t)=\left(x_o+(v_o+\omega x_o)t\right)e^{-\omega t}$, ενώ το σύστημα ηρεμεί μετά από χρόνο $t\approx\left(3/\omega\right)$. Πρακτικά, ποτέ δεν παρατηρείται αυτή η περίπτωση (περίπτωση μαθηματικού ενδιαφέροντος μόνο).
	***#4: Απόσβεση με*** $0<\zeta<1$ ***(υποκρίσιμη απόσβεση)*** Το σύστημα ταλαντώνεται με ιδιοσυχνότητα $\omega_n=\omega\sqrt{1-\zeta^2}$ (ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης). Η απόκριση του συστήματος ισούται με $x(t)=Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t+\varphi)$, όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης και φ η διαφορά φάσης. Συγκριτικά με την κρίσιμη απόσβεση, το σύστημα φθάνει σε ηρεμία πιο αργά.

Στα διαγράμματα του Πίνακα 1, η μετατόπιση της μάζας m (απόκριση του συστήματος) καταγράφεται κατά τον οριζόντιο άξονα, ενώ ο χρόνος καταγράφεται στον κατακόρυφο άξονα. Διευκρινίζεται ότι, η αρχική μετατόπιση x_o στις υποπεριπτώσεις #2 και #3 του Πίνακα 1, απεικονίζεται ως μεγαλύτερη εκείνης των υποπεριπτώσεων #1 και #4, καθαρά και μόνο για λόγους ευκρινέστερης απεικόνισης των αντιστοίχων διαγραμμάτων.

Σχετικά με τη γραφή των ιδιοσυχνοτήτων, διευκρινίζεται ότι στο πλαίσιο του μαθήματος θα χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός του Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Συμβολισμός ιδιοσυχνοτήτων

Σύμβολο	*Περιγραφή συμβόλου*	*Ερμηνεία*
ω	Ωμέγα ελληνικό, μικρό	Φυσική ιδιοσυχνότητα. Προσοχή: σε κάποια βιβλιογραφία το ω συμβολίζεται με ω_n και ονομάζεται φυσική ιδιοσυχνότητα (n: natural) πράγμα που μπορεί να προκαλέσει σύγχυση.
ω_n	Ωμέγα ελληνικό, μικρό, με δείκτη n	Ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης. Προσοχή: Σε άλλη βιβλιογραφία -όταν το ω συμβολίζεται με ω_n - τότε η ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης, συμβολίζεται με ω_d (d: dumping).
Ω	Ωμέγα ελληνικό, κεφαλαίο	Συχνότητα διεγέρτη

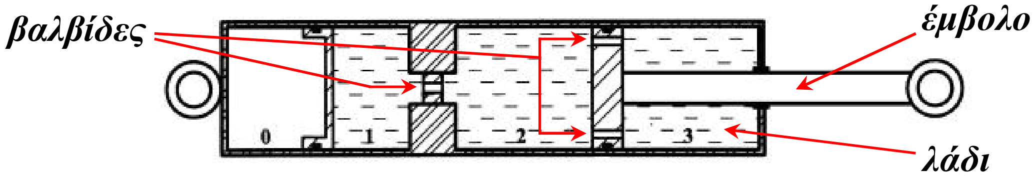
Υπενθυμίζεται ότι, σε μονοβάθμιο σύστημα $m-c-k$, η φυσική ιδιοσυχνότητα ορίζεται ως :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

και η ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης ορίζεται ως:

$$\omega_n = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2}$$

Στο πλαίσιο του μαθήματος ‘Δυναμική Μηχανών Ι’, οι δυνάμεις απόσβεσης θεωρούνται ως ανάλογες της ταχύτητας (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01/Εξ.(3)) και οφείλονται στην αντίσταση που συναντά το λάδι όταν κινείται μέσα σε έναν αποσβεστήρα.



Σχήμα 3: Τυπική μορφή αποσβεστήρα

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, σε μία τυπική μορφή αποσβεστήρα, η μετακίνηση του εμβόλου προκαλεί την κίνηση του αποθηκευμένου υγρού (ροή Quette) μέσα από βαλβίδες (οπές). Ανάλογα με το μέγεθος των βαλβίδων και τα χαρακτηριστικά του λαδιού, η μετακίνηση του εμβόλου είναι λιγότερο ή περισσότερο εύκολη, καθορίζοντας την συμπεριφορά (απόκριση) του αποσβεστήρα.

Τονίζεται ιδιαιτέρως ότι αυτή η περίπτωση (Σχήμα 4α) είναι εντελώς διαφορετική από την περίπτωση δυνάμεων απόσβεσης λόγω τριβής Coulomb, στην οποία οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις είναι *ανεξάρτητες* του μεγέθους της ταχύτητας και εξαρτώνται μόνο από την διεύθυνση κίνησης και την εξίσωση τριβής (Σχήμα 4β).

Σχήμα 4: Σχηματική αναπαράσταση συστήματος $m-c-k$ με απόσβεση (α) λόγω ροής Quette και (β) λόγω τριβής Coulomb

Σχετικά με τις υποπεριπτώσεις #2, #3 και #4 του Πίνακα #1, εν γένει για ένα εκθετικά μειούμενο μέγεθος ισχύει:

$$N(t) = N_o e^{-\lambda t} \tag{3}$$

Από μαθηματικής απόψεως, η τιμή $N(t)$ μηδενίζεται μετά από άπειρο χρόνο. Ωστόσο, από την οπτική γωνία του Μηχανικού και για τις ανάγκες τεχνολογικών εφαρμογών, η τιμή $N(t)$ θεωρείται ως μηδενική όταν αυτή λάβει μία επαρκώς μικρή τιμή. Έστω, λοιπόν, ότι μετά από χρόνο τ, το μέγεθος N έχει μειωθεί κατά $a\%$, άρα θα ισχύει:

$$N(\tau) = N_o e^{-\lambda \tau} = (1-a) N_o \tag{4}$$

Η Εξ.(4) οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση:

$$e^{-\lambda\tau} = (1-a) \Rightarrow \ln\left(e^{-\lambda\tau}\right) = \ln(1-a) \Rightarrow -\lambda\tau = \ln(1-a) \Rightarrow \tau = \frac{\ln(1-a)}{(-\lambda)} \tag{5}$$

Συνεπώς, για μείωση $a = 95\%$ ισχύει:

$$\tau = \frac{\ln(1-a)}{(-\lambda)} = \frac{\ln(1-0.95)}{(-\lambda)} = \frac{(\text{-}2{,}99573)}{(\text{-}\lambda)} \Rightarrow \tau \approx \frac{3}{\lambda} \tag{6}$$

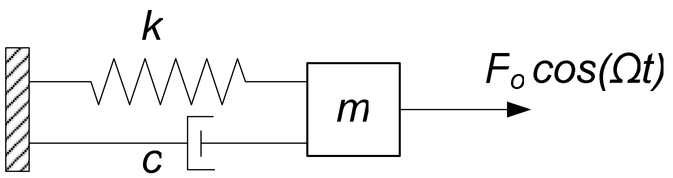
Επομένως, μετά παρέλευση χρόνου περίπου ίσου προς $\left(3/\lambda\right)$ χρονικές σταθερές, το εκθετικά μειούμενο μέγεθος N έχει μειωθεί κατά 95%. Συνεπώς, από την οπτική γωνία του Μηχανικού, η μείωση του πλάτους ταλάντωσης ενός δυναμικού συστήματος κατά 95% πρακτικά αντιστοιχεί σε αποκατάσταση της ηρεμίας του συστήματος. Πρακτικά, λοιπόν, όταν ένα οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος μειώνεται εκθετικά σύμφωνα με την Εξ.(3), τότε για χρόνο τέτοιο ώστε:

$$e^{-\lambda t} \approx e^{-3} \tag{7}$$

θεωρούμε ότι έχει επέλθει μηδενισμός του εν λόγω μεγέθους.

Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας με αρμονική διέγερση και απόσβεση

Μία τυπική μορφή ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$, όταν επιβάλλεται εξωτερική αρμονική διέγερση, απεικονίζεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$ υπό εξωτερική αρμονική διέγερση

Ειδικότερα, μία μάζα m είναι άκαμπτα συνδεδεμένη με ένα ελατήριο σταθεράς k και έναν αποσβεστήρα σταθεράς c, ενώ μία αρμονική διέγερση ασκείται ***διαρκώς*** στη μάζα. Η συχνότητα της αρμονικής διέγερσης είναι Ω. Η μαθηματική έκφραση (μοντέλο) του συστήματος αυτού είναι:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \cos\left(\Omega t\right) \tag{8}$$

Αδιαστατοποιώντας την Εξ.(8), προκύπτει:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X_{ST} \cos\left(\Omega t\right) \tag{9}$$

όπου:

ω: φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος, οριζόμενη ίση προς $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

ζ : λόγος απόσβεσης συστήματος, οριζόμενος ίσος προς $\zeta = \left(\dfrac{c}{2m\omega}\right)$

X_{ST} : Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος:

$$X_{ST} = \left(\frac{F_o}{k}\right) \tag{10}$$

Το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος παριστάνει την μετατόπιση του συστήματος στην στατική περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση που η δύναμη $F(t)=F_o$ είναι στατική, δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Εξ.(9) είναι:

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = f_o \cos(\Omega t) \tag{11}$$

Η Εξ.(9) αποτελεί μία μη-ομογενή Διαφορική Εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές και η λύση της $x(t)$ είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{12}$$

όπου

- $x_h(t)$ είναι η ομογενής λύση (homogeneous solution) και
- $x_p(t)$ είναι η μερική λύση (partial solution).

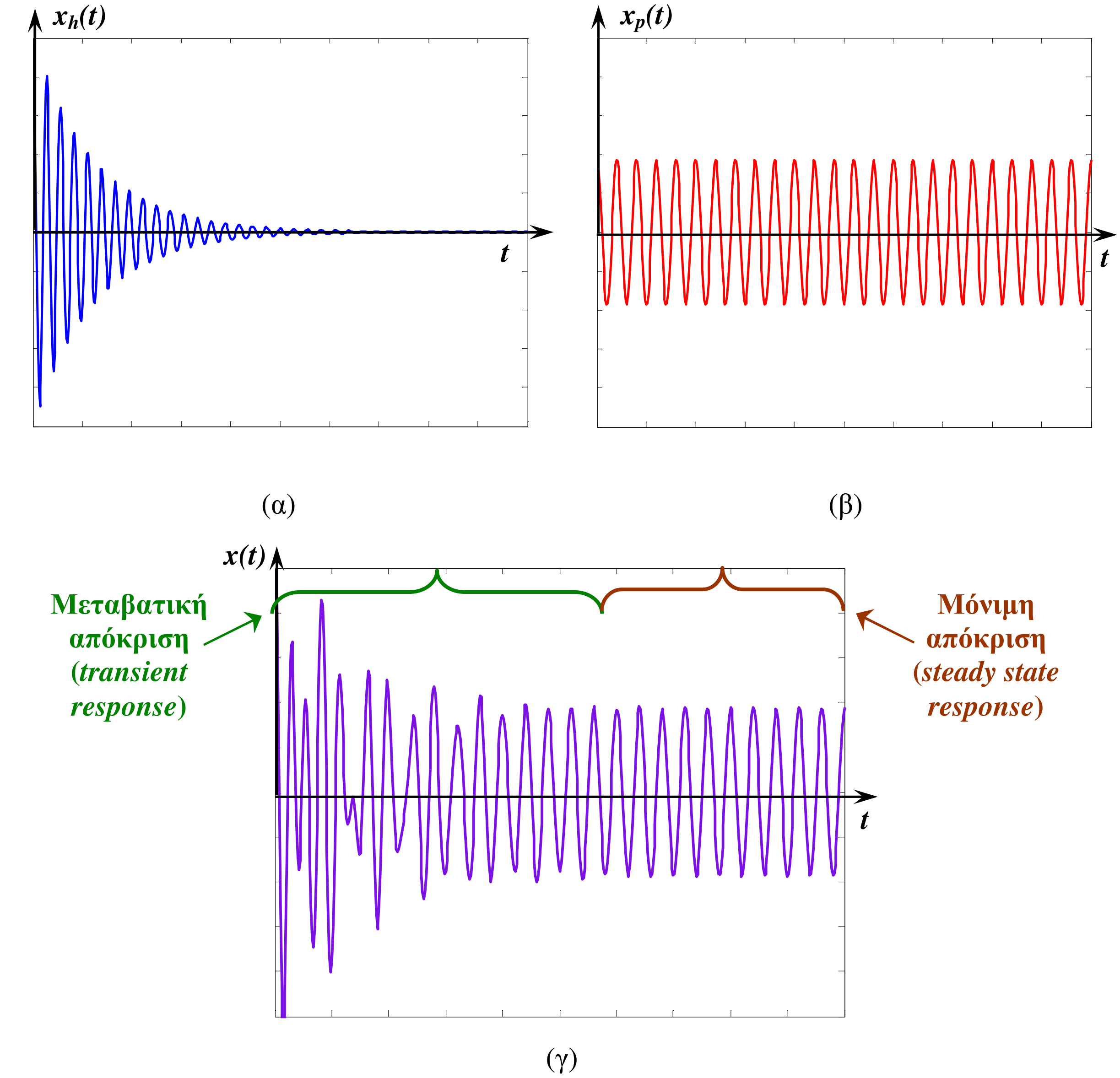
Όπως παρουσιάσθηκε στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, η ομογενής λύση υπολογίζεται θεωρώντας ως μηδενικό το δεξί μέλος της Εξ.(9). Η μορφή της ομογενούς λύσης φαίνεται στον Πίνακα 1 και για περίπτωση 0<ζ<1 πρέπει να κρατήσουμε ότι **η ταλάντωση του συστήματος γίνεται με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης ω_n**.

Η μερική λύση (που είναι και η **μόνιμη** λύση του συστήματος) έχει μορφή:

$$x_p(t) = X\cos(\Omega t - \vartheta) \tag{13}$$

όπου ϑ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της διέγερσης και της απόκρισης της μερικής λύσης. Συνεπώς στην μόνιμη κατάσταση **η ταλάντωση του συστήματος γίνετε με συχνότητα ίση με την συχνότητα του διεγέρτη Ω.**

Συνεπώς, εξ αιτίας της συνύπαρξης των δύο αυτών λύσεων το δυναμικό σύστημα θα κινηθεί όπως υπαγορεύει η ***σύνθεση*** των προαναφερθέντων κινήσεων, δηλαδή όπως υπαγορεύει η Εξ.(12). Σε συστήματα με απόσβεση, βασικό χαρακτηριστικό της ομογενούς λύσης είναι ότι εξαφανίζεται (μηδενίζεται) μετά από κάποιο χρόνο. (βλ. Πίνακας 1, υποπεριπτώσεις 2,3,4). Αντιθέτως, η κίνηση λόγω της επιβολής της εξωτερικής διέγερσης δεν υφίσταται κάποια εξασθένιση, συνεπώς η συγκεκριμένη κίνηση θα παραμείνει ακόμα και όταν η κίνηση λόγω επιβολής αρχικών συνθηκών μηδενισθεί. Καθίσταται, λοιπόν, φανερό ότι μετά την παρέλευση ικανοποιητικού χρονικού διαστήματος (από Εξ.(6), $t \gg (3/\omega)$), θα παραμείνει μόνον η κίνηση λόγω του διεγέρτη. Αυτή η κατάσταση κίνησης καλείται 'μόνιμη κατάσταση' (*steady state*) διότι δεν πρόκειται να μεταβληθεί περαιτέρω. Επειδή, δε, περιγράφεται από την μερική λύση $x_p(t)$, έπεται ότι η φυσική ερμηνεία της μερικής λύσεως είναι η περιγραφή της μόνιμης κατάστασης του δυναμικού συστήματος. Αντιθέτως, η κατάσταση κίνησης λόγω της ομογενούς λύσης στα συστήματα με απόσβεση εξαφανίζεται και γι’ αυτό και καλείται και ‘μεταβατική κατάσταση’ (*transient state*).



Σχήμα 6: Απόκριση μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ με υποκρίσιμη απόσβεση και υπό εξωτερική αρμονική διέγερση: (α) ομογενής λύση, (β) μερική λύση και (γ) ολική λύση (απόκριση συστήματος)

Καθίσταται, λοιπόν, φανερό ότι όταν επιβάλλεται εξωτερική αρμονική διέγερση (διεγέρτης) σε ένα δυναμικό σύστημα με απόσβεση, μετά την παρέλευση ικανοποιητικού χρονικού διαστήματος, το σύστημα θα ταλαντώνεται επ’ άπειρον με την συχνότητα του διεγέρτη. Με άλλα λόγια, όταν απουσιάζει ο αρμονικός διεγέρτης, το σύστημα ταλαντώνεται με συχνότητα, η οποία καθορίζεται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες και τα χαρακτηριστικά του συστήματος (μάζα m, σταθερά απόσβεσης c και σταθερά ελατηρίου k). Όταν, όμως, επιβάλλεται εξωτερική αρμονική διέγερση, τότε το σύστημα, από ένα σημείο και έπειτα, θα ‘ξεχάσει’ την ταλάντωσή του λόγω των αρχικών συνθηκών και θα συνεχίσει να ταλαντώνεται επ' άπειρον με τη συχνότητα του διεγέρτη. Έτσι, στην περίπτωση αυτή τα χαρακτηριστικά του συστήματος δεν καθορίζουν την συχνότητα της ταλάντωσης αλλά παίζουν καθοριστικό ρόλο στο πλάτος της ταλάντωσης.

Έτσι, πρέπει να δίδεται ιδιαίτερη προσοχή στο χρονικό διάστημα εντός του οποίου εξετάζουμε την ταλάντωση. Εάν το διάστημα αυτό αντιστοιχεί στη μεταβατική κατάσταση, τότε πρέπει οπωσδήποτε να ληφθούν υπ' όψιν και η ομογενής λύση $x_h(t)$ και η μερική λύση $x_p(t)$. Εάν το διάστημα αυτό αντιστοιχεί στη μόνιμη κατάσταση, τότε λαμβάνεται υπ' όψιν μόνον η μόνιμη λύση $x_p(t)$. Η έκταση του εν λόγω χρονικού διαστήματος είναι δυνατόν να εκτιμηθεί από την Εξ.(6). Για παράδειγμα, εάν ένα δυναμικό σύστημα έχει φυσική ιδιοσυχνότητα $1Hz$, τότε για χρόνους $t > 3\sec$ είναι δυνατόν να αμεληθεί η ομογενής λύση.

Συνδυάζοντας την Εξ.(12) και την Εξ.(13) με την Εξ.(15) του Μαθήματος 02, προκύπτει η αναλυτική έκφραση της απόκρισης $x_{ολ}(t)$. Για λόγους διευκόλυνσης στη γραφή και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για την αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών, η Εξ.(15) του Μαθήματος 02, , είναι δυνατόν να διατυπωθεί ως εξής:

$$x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{14}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις Εξ.(12, 13, 14), προκύπτει η εξίσωση:

$$x_{ολ}(t) = \underbrace{Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t + \varphi)}_{x_h} + \underbrace{X\cos(\Omega t - \vartheta)}_{x_p} \tag{15}$$

Οι συντελεστές A, φ, X και ϑ της Εξ.(15) ορίζονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3: Ορισμός συντελεστών απόκρισης

Μέγεθος	***Φυσική σημασία***
$\varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_n(x_o - X\cos\vartheta)}{v_o + (x_o - X\cos\vartheta)\zeta\omega - \Omega X\sin\vartheta}\right)$	Αρχική διαφορά φάσης (εξαρτάται από αρχικές συνθήκες)
$A = \left(\dfrac{x_o - X\cos\vartheta}{\sin\varphi}\right)$	Πλάτος ταλάντωσης λόγω αρχικών συνθηκών (μετατόπιση ή/και ταχύτητα)
$\vartheta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\omega\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right)$	Διαφορά φάσης μόνιμης κατάστασης μεταξύ συχνότητας διεγέρτη και απόκρισης συστήματος
$X = \left(\dfrac{\omega^2 X_{ST}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2}}\right)$	Πλάτος ταλάντωσης λόγω εξωτερικής αρμονικής διέγερσης (πλάτος ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση)

Στην Εξ.(15), και ειδικότερα στην ομογενή λύση, αναγνωρίζουμε τον όρο $e^{-\zeta\omega t}$, εξ αιτίας του οποίου μειώνεται εκθετικά η συμβολή της μεταβατικής ταλάντωσης. Δηλαδή όταν παρέλθει χρόνος $t > \left(3/\zeta\omega \right)$ και υπολογίσουμε ότι τα μεγέθη A και X είναι ίδιας τάξεως, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ομογενής λύση είναι δυνατόν να αμεληθεί και η μάζα του συστήματος ταλαντώνεται με τη συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη.

Από την Εξ.(15) και τον Πίνακα 3, προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Εάν δεν εξασκείται εξωτερική διέγερση, δηλαδή όταν ισχύει $F = 0$, τότε η μερική λύση είναι μηδενική ($x_p\left(t\right) = 0$), άρα η απόκριση του συστήματος θα περιγράφεται μόνο από την ομογενή λύση ($x_{o\lambda}\left(t\right) = x_h\left(t\right)$).
- Εάν ασκείται χρονικά σταθερή εξωτερική δύναμη, δηλαδή όταν ισχύει $F = F_o$, τότε η συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη είναι μηδενική ($\Omega = 0$), οπότε η μερική λύση θα είναι $x_p\left(t\right) = X = \left(f_o/\omega^2 \right)$, άρα η απόκριση του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση θα ισούται με την στατική μετατόπιση $x_p\left(t\right) = X$.

Ερώτημα: Ποια είναι η φυσική σημασία των διαφορών φάσεων φ και θ;

Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας με αρμονική διέγερση και απόσβεση

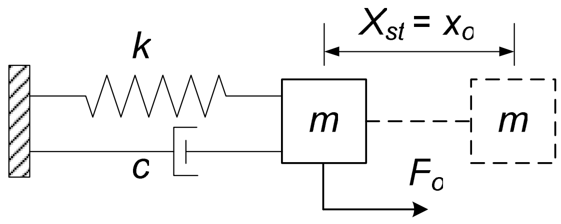
Η απόκριση ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m - c - k$ ***με*** απόσβεση και ***με*** εξωτερική διέγερση δίδεται από την Εξ.(15), η οποία επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου:

$$x_{o\lambda}\left(t\right) = Ae^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega_n t + \varphi\right) + X\cos\left(\Omega t - \vartheta\right) \tag{16}$$

Στην Εξ.(16) εμφανίζεται η ποσότητα X , η οποία εκφράζει το πλάτος της ταλάντωσης λόγω εξωτερικής αρμονικής διέγερσης (πλάτος ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση, βλ. Πίνακα 3):

$$\left(\frac{X}{X_{ST}} \right) = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}} \right) \tag{17}$$

Η Εξ.(17) αποτελεί την αδιαστατοποιημένη γραφή του πλάτους X της μόνιμης ταλάντωσης του δυναμικού συστήματος ως προς τον λόγο $\left(F_o/k\right)$, ο οποίος εκφράζει τη στατική μετατόπιση του συστήματος, δηλαδή το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος του συστήματος. Η στατική μετατόπιση εκφράζει τη μετατόπιση της μάζας m στο εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα, όταν σε αυτό επιβληθεί μία χρονικά σταθερή εξωτερική διέγερση F_o (Σχήμα 9).



Σχήμα 9: Στατική μετατόπιση δυναμικού συστήματος

Υπενθυμίζεται ότι στη διαμόρφωση του στατικού πλάτους συμμετέχει μόνον η σταθερά k του ελατηρίου και η εξωτερικά ασκούμενη δύναμη
Ορίζουμε τον ακόλουθο λόγο:

$$q = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \tag{18}$$

Ο λόγος q μας πληροφορεί σχετικά με το πόσο κοντά βρίσκεται η ιδιοσυχνότητα του συστήματος στη συχνότητα του ταλαντωτή (με άλλα λόγια, μας πληροφορεί για το πόσο κοντά βρισκόμαστε στο φαινόμενο του συντονισμού). Πιο συγκεκριμένα, όταν η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης Ω είναι πολύ μικρή ως προς την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος, τότε η τιμή του λόγου q τείνει να λάβει μηδενική τιμή. Όταν η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης Ω τείνει προς την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος, τότε η τιμή του λόγου q τείνει προς τη μονάδα. Τέλος, όταν η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης Ω είναι πολύ μεγάλη ως προς την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος, τότε η τιμή του λόγου q τείνει στο άπειρο.

Ο συνδυασμός των Εξ.(17,18), μαζί με τον ορισμό της ποσότητας f_o (σελ.6), δίδει:

$$\frac{X}{\left(F_o \big/ k \right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \tag{19}$$

Ο συγκεκριμένος λόγος καλείται ***συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης*** και ορίζεται ως:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{X}{X_{st}} \right) \tag{20}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(18,19,20) δίδει:

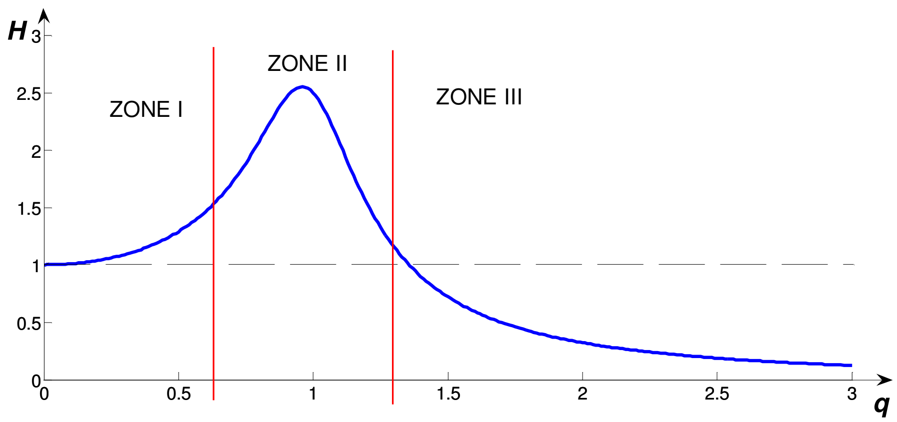
$$\mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \tag{21}$$

Ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης «$\mathbb{H}$» απαντά στο εξής ερώτημα: '*το πλάτος της ταλάντωσης ενός συστήματος με εξωτερική αρμονική διέγερση πλάτους F_o, είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο και κατά πόσο συγκριτικά με τη στατική μετατόπιση που θα είχε το σύστημα όταν σε* *αυτό επιβαλλόταν σταθερή εξωτερική δύναμη F_o;*’. Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το δεξί μέλος της Εξ.(21) με τη σταθερά k του ελατηρίου, προκύπτει:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{Xk}{X_{st}k}\right) = \left(\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{F_{st}}\right) \tag{22}$$

όπου $F_{\varepsilon\lambda}$ είναι μέγιστη δύναμη στο ελατήριο που αναπτύσσεται στο σύστημα λόγω επιβολής εξωτερικής *αρμονικής* διέγερσης πλάτους F_o, ενώ F_{st} είναι η δύναμη στο ελατήριο λόγω επιβολής εξωτερικής *σταθερής* διέγερσης F_o. Συνεπώς, με την Εξ.(22), ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης «$\mathbb{H}$» απαντά και στο ακόλουθο ερώτημα: ‘*η δύναμη που αναπτύσσεται στο ελατήριο λόγω εξωτερικής αρμονικής διέγερσης πλάτους F_o, είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη και κατά πόσο συγκριτικά με την δύναμη που θα αναπτυσσόταν άμα η εξωτερική διέγερση F_o ήταν σταθερή*?’. Αντίστοιχα, το ίδιο ισχύει και για τις τάσεις της κατασκευής, δεδομένου ότι αυτές βρίσκονται σε αναλογία με τις ελαστικές δυνάμεις.

Όπως φαίνεται και από την Εξ.(21), η τιμή του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ εξαρτάται από δύο παραμέτρους: το λόγο απόσβεσης ζ και το λόγο q. Μία τυπική μορφή της γραφικής παράστασης του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ συναρτήσει του λόγου q παρουσιάζεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Γραφική παράσταση του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ συναρτήσει του λόγου q

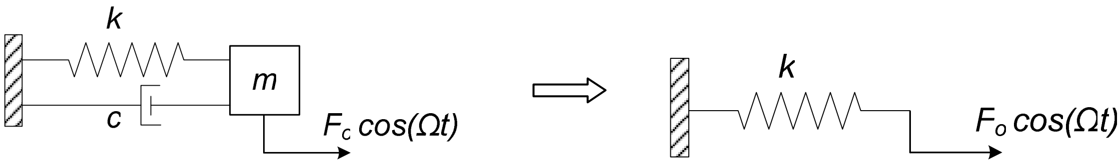
Όταν επιβάλλεται μία χρονικά σταθερή εξωτερική διέγερση, δηλαδή όταν ισχύει $\Omega = 0$, τότε θα είναι και $q = 0$ (βλ. Εξ.(18)), οπότε από την Εξ.(21) προκύπτει ότι:

$$\mathbb{H} = 1 \tag{23}$$

Συνεπώς, όλες οι καμπύλες της μορφής $\mathbb{H} = f(q)$ θα διέρχονται από τη θέση $\mathbb{H}(q=0)=1$ (μοναδιαία τεταγμένη επί την αρχή). Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10, η γραφική παράσταση $\mathbb{H} = f(q)$ είναι δυνατόν να διακριθεί σε τρεις χαρακτηριστικές ζώνες:

- **Ζώνη Ι:** ***Στατική περιοχή***

  Η συχνότητα Ω της εξωτερικής διέγερσης είναι πολύ μικρή, συγκριτικά με την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, η μάζα m του συστήματος, ακολουθώντας την εξωτερική διέγερση κινείται πολύ αργά (μικρή ταχύτητα) και μεταβάλλει την ταχύτητά της με πολύ αργό ρυθμό (μικρή επιτάχυνση). Έτσι, έπεται ότι οι δυνάμεις ελαστικότητας είναι εκείνες που κυριαρχούν και καθορίζουν την απόκριση του συστήματος (οι άλλες δυνάμεις είναι αμελητέες). Με άλλα λόγια, στην οριακή περίπτωση q→0, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται μόνο από ένα ελατήριο, το οποίο παραλαμβάνει τις εξωτερικές δυνάμεις (Σχήμα 11).



Σχήμα 11: Θεώρηση μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ για συχνότητες διέγερσης Ω πολύ μικρές συγκριτικά με την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος (q→0).

- **Ζώνη ΙΙ:** ***Περιοχή συντονισμού***

  Η συχνότητα Ω της εξωτερικής διέγερσης πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος (συντονισμός). Από την Εξ.(18) προκύπτει ότι στην περίπτωση του συντονισμού, δηλαδή όταν $\Omega = \omega$, ισχύει:

$$q = 1 \tag{24}$$

Από το συνδυασμό των Εξ.(21,24), προκύπτει:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{1}{2\zeta} \right) \tag{25}$$

Σύμφωνα με την Εξ.(25), στην περίπτωση του συντονισμού, η τιμή του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ είναι αντιστρόφως ανάλογη του λόγου απόσβεσης ζ. Ισοδύναμα, όσο μικρότερη είναι η τιμή του λόγου απόσβεσης ζ τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$. Θεωρητικά, καθώς ο λόγος απόσβεσης ζ τείνει στο μηδέν, ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ απειρίζεται:

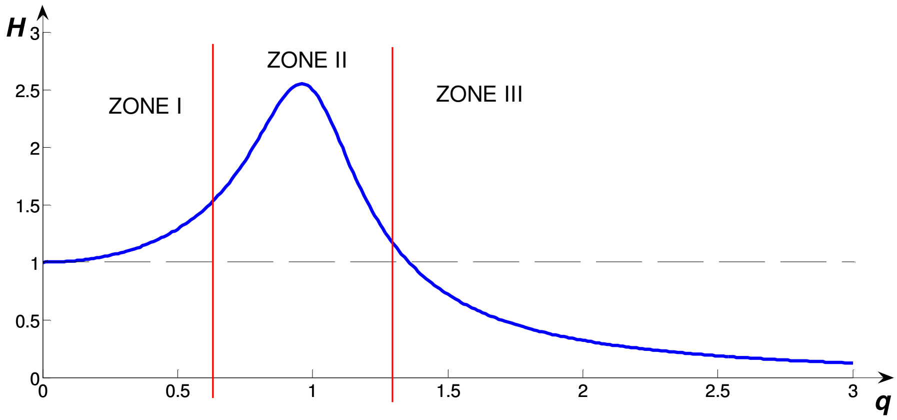
$$\zeta \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{H} \to \infty \tag{26}$$

Πρακτικά, μία κατασκευή με μικρό λόγο απόσβεσης ζ, επειδή δεν είναι δυνατόν να ταλαντωθεί με άπειρο πλάτος, θα αστοχήσει. Συνεπώς, στη Ζώνη ΙΙ (περιοχή συντονισμού) και για μικρούς λόγους απόσβεσης ζ, ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ λαμβάνει πολύ υψηλές τιμές. Οι δυνάμεις απόσβεσης (δυνάμεις ανάλογες της ταχύτητας) είναι εκείνες που κυριαρχούν, και συνεπώς οι εξωτερικές δυνάμεις παραλαμβάνονται από τον αποσβεστήρα.

- **Ζώνη ΙΙΙ:** ***Περιοχή υψίσυχνων διεγέρσεων***
  Η συχνότητα Ω της εξωτερικής διέγερσης είναι πολύ μεγάλη, συγκριτικά με την ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος. Ένα ενδιαφέρον σημείο είναι το γεγονός ότι για τιμές του λόγου q μεγαλύτερες από μία χαρακτηριστική τιμή και μακριά από τη Ζώνη Συντονισμού, ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ γίνεται μικρότερος της μονάδος. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης (ταλάντωση λόγω εξωτερικής διέγερσης) είναι σημαντικά μικρότερο από το στατικό πλάτος ταλάντωσης του συστήματος. Με άλλα λόγια, το σύστημα ταλαντώνεται με πάρα πολύ μικρό πλάτος, συγκριτικά με το στατικό πλάτος ταλάντωσης. Σε αυτήν την περίπτωση, ακριβώς επειδή η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι πολύ μεγάλη αλλά το πλάτος ταλάντωσης είναι μικρό, το κυρίαρχο στοιχείο είναι η επιτάχυνση (η ταχύτητα αλλάζει σημαντικά σε μικρό χρονικό διάστημα), οπότε οι εξωτερικές δυνάμεις παραλαμβάνονται από τις δυνάμεις αδρανείας, άρα από τη μάζα, του συστήματος.

Εύρεση μέγιστης τιμής δυναμικής ενίσχυσης Η

Στο Σχήμα 12 απεικονίζεται μια τυπική καμπύλη $\mathbb{H} = f(q)$. Ο διαχωρισμός στις τρεις Ζώνες είναι ποιοτικός.



Σχήμα 12: Γραφική παράσταση του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ συναρτήσει του λόγου q

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 12, η συνάρτηση $\mathbb{H} = f(q)$ εμφανίζει μία μέγιστη τιμή. Για την εύρεση εκείνης της τιμής, έστω q_{peak}, του λόγου q για την οποία μεγιστοποιείται η συνάρτηση $\mathbb{H} = f(q)$, αρκεί να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q} = 0 \tag{27}$$

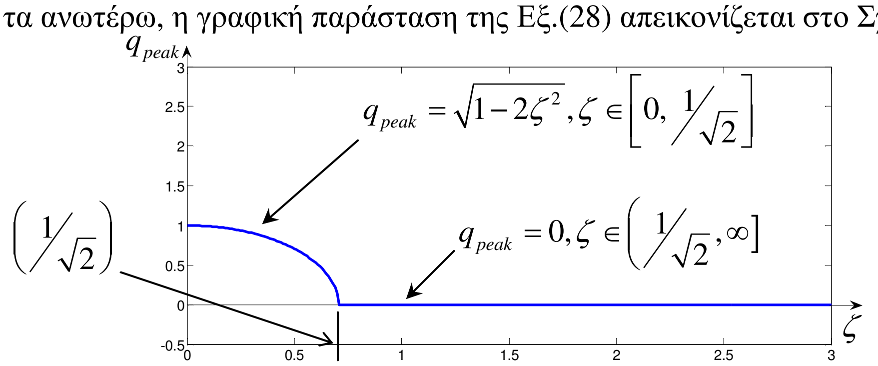
Ο συνδυασμός των Εξ.(21,27), μετά την εκτέλεση πράξεων, οδηγεί στη λύση:

$$q_{peak} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{28}$$

Από την Εξ.(28) και θεωρώντας $\zeta \geq 0$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

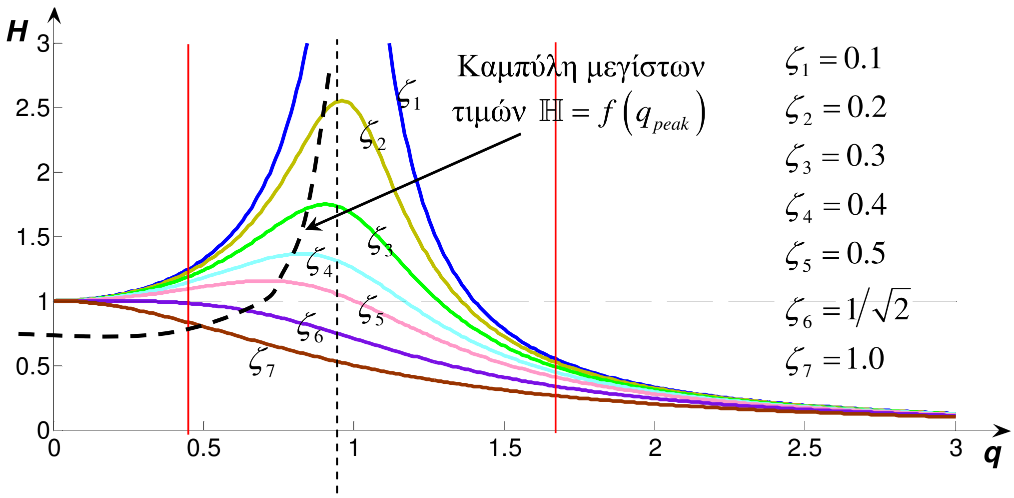
- Για $\zeta = 0 \Rightarrow q_{peak} = 1$, δηλαδή σε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση ***χωρίς*** απόσβεση, το σύστημα θα εμφανίσει το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης όταν επιτευχθεί συντονισμός ($\Omega = \omega$).
- Για $1-2\zeta^2 > 0 \Rightarrow 1 > 2\zeta^2 > 0 \Rightarrow \left(1/\sqrt{2}\right) > \zeta > 0$, η τιμή q_{peak} εξαρτάται από την τιμή του λόγου απόσβεσης ζ : όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή ζ τόσο μικρότερη είναι η τιμή q_{peak}. Αυτό σημαίνει ότι σε διάγραμμα $\mathbb{H} = f(q)$, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή ζ τόσο η μέγιστη τιμή Η μετατοπίζεται προς τα αριστερά. Με άλλα λόγια, σε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση ***με μεγάλη*** απόσβεση, το σύστημα θα εμφανίσει το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης όχι όταν $\Omega = \omega$ αλλά σε πολύ μικρότερες συχνότητες διεγέρτη.
- Για $1-2\zeta^2 < 0 \Rightarrow 1 < 2\zeta^2 \Rightarrow \left(1/\sqrt{2}\right) < \zeta$, η Εξ.(28) δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε το σύστημα δεν εμφανίζει μέγιστο πλάτος ταλάντωσης και είναι $q_{peak} = 0$.

Με βάση τα ανωτέρω, η γραφική παράσταση της Εξ.(28) απεικονίζεται στο Σχήμα 13.



Σχήμα 13: Γραφική παράσταση της τιμής q_{peak} για διάφορες τιμές του λόγου απόσβεσης ζ

Στο Σχήμα 14 απεικονίζεται ένα σμήνος καμπυλών $\mathbb{H} = f(q)$ για διάφορες τιμές του λόγου απόσβεσης και ο γεωμετρικός τόπος των μεγίστων τιμών $\mathbb{H} = f(q_{peak})$ των καμπυλών.



Σχήμα 14: Γραφική παράσταση του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ συναρτήσει του λόγου q για διάφορες τιμές του λόγου απόσβεσης ζ

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 14:

- όλες οι καμπύλες της μορφής $\mathbb{H}= f\left(q\right)$ διέρχονται από τη θέση $\mathbb{H}\left(q=0\right)=1$
- όσο μικρότερος είναι ο λόγος απόσβεσης ζ , τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή $\mathbb{H}= f\left(q\right)$
- όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος απόσβεσης ζ , τόσο νωρίτερα του συντονισμού ($\Omega=\omega$) εμφανίζεται το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης

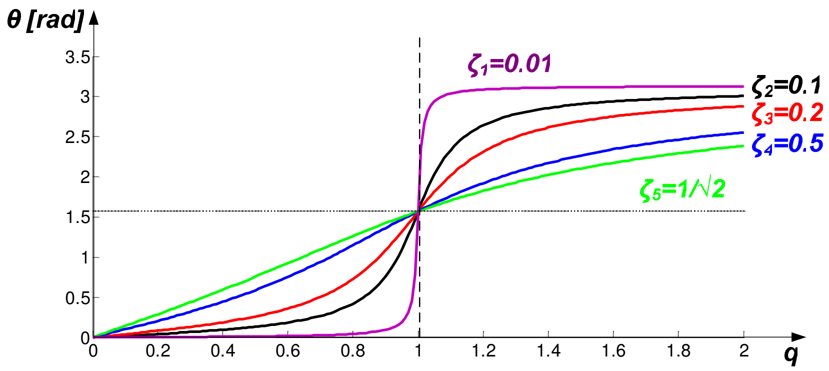
Ένα ενδιαφέρον σημείο αποτελεί η συσχέτιση της διαφοράς φάσης ϑ (διαφορά φάσης μεταξύ απόκρισης του συστήματος λόγω εξωτερικής διέγερσης και συχνότητας διεγέρτη) με το λόγο q. Όπως αναφέρθηκε και στον Πίνακα 3, η διαφορά φάσης ϑ ορίζεται ως εξής:

$$\vartheta=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right) \tag{29}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(18,29) τελικά δίδει:

$$\vartheta=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta q}{1-q^2}\right) \tag{30}$$

Στο Σχήμα 15 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της Εξ.(30), συναρτήσει του λόγου q και θεωρώντας διάφορες τιμές για το λόγο απόσβεσης ζ .



Σχήμα 15: Γραφική παράσταση της διαφοράς φάσης ϑ συναρτήσει του λόγου q για διάφορες τιμές του λόγου απόσβεσης ζ

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 15, η τιμή της διαφοράς φάσης ϑ τείνει στη μηδενική τιμή καθώς ο λόγος q τείνει στη μηδενική τιμή. Με άλλα λόγια, όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι πάρα πολύ μικρότερη της συχνότητας του συστήματος, τότε η απόκριση του συστήματος και η εξωτερική διέγερση είναι συμφασικές ($\vartheta=0$), δηλαδή η απόκριση του συστήματος και η εξωτερική διέγερση λαμβάνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους. Στην περίπτωση του συντονισμού ($\Omega=\omega$), η διαφορά φάσης ϑ γίνεται $\vartheta=\left(\pi/2\right)$, δηλαδή η απόκριση του συστήματος μεγιστοποιείται όταν μηδενίζεται η εξωτερική διέγερση. Τέλος, όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι πάρα πολύ μεγαλύτερη της συχνότητας του συστήματος, η διαφορά φάσης ϑ γίνεται $\vartheta=2\pi$. Επίσης, στο ίδιο Σχήμα φαίνεται ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του λόγου απόσβεσης ζ τόσο μεγαλύτερο είναι το πεδίο συχνοτήτων εντός του οποίου η απόκριση του συστήματος και η εξωτερική διέγερση έχουν σταθερή διαφορά φάσης ϑ. Π.χ. για $\zeta = 0.01$ (μωβ καμπύλη) φαίνεται ότι πριν την περιοχή συντονισμού ($\Omega = \omega$) και για ένα πολύ μεγάλο εύρος τιμών του λόγου q, τουλάχιστον για $q \in [0, 0.8]$, η εξωτερική διέγερση και η απόκριση του συστήματος είναι συμφασικές. Όσο αυξάνεται ο λόγος απόσβεσης ζ, τόσο μικρότερο καθίσταται το προαναφερθέν διάστημα. Οριακά, καθώς ο λόγος απόσβεσης ζ τείνει προς τη μηδενική τιμή, η καμπύλη $\vartheta = f(q)$ καθίσταται ασυνεχής στη θέση $q = 1$ (συντονισμός).
