ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 4η
Σύστημα 1 Β.Ε. υπό αρμονική διέγερση και απόσβεση – Σύστημα 1 Β.Ε. υπό κινηματική διέγερση – Εφαρμογές

Σύστημα 1 Β.Ε. υπό αρμονική διέγερση και απόσβεση

Στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, ασχοληθήκαμε με την απόκριση ενός δυναμικού συστήματος $m-c-k$ ενός βαθμού ελευθερίας, όταν σε αυτό ασκείται εξωτερική αρμονική διέγερση, δηλαδή όταν σε αυτό ασκείται δύναμη της μορφής:

$$F(t) = F_o \cos(\Omega t) = kX_{ST} \cos(\Omega t) \tag{1}$$

όπου F_o είναι το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης, Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη, k είναι η σταθερά του ελατηρίου του συστήματος και X_{ST} είναι το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος. Υπενθυμίζεται ότι ως Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος έχει ορισθεί η στατική μετατόπιση του συστήματος όταν σε αυτό ασκηθεί σταθερή εξωτερική δύναμη μέτρου F_o. Όταν όμως η ίδια εξωτερική δύναμη είναι αρμονική - και μετά το πέρας της μεταβατικής κατάστασης - το πλάτος ταλάντωσης X του συστήματος θα μεταβληθεί σε σχέση με το Στατικό Πλάτος σύμφωνα με τον συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$. Η μόνιμη απόκριση του συστήματος ακολουθεί την συχνότητα του διεγέρτη και δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = x_p(t) = X \cos(\Omega t - \vartheta) \tag{2}$$

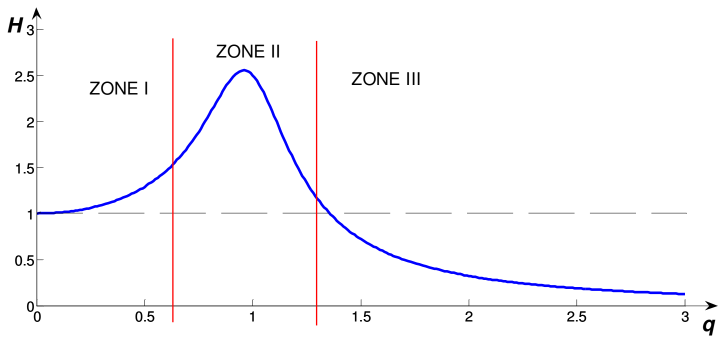
όπου X είναι το πλάτος ταλάντωσης της μόνιμης απόκρισης, Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη και ϑ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της μόνιμης απόκρισης του συστήματος και της συχνότητας του διεγέρτη. Ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ δίνεται από την σχέση:

$$\mathbb{H}(q,\zeta) = \frac{X}{X_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2q\zeta\right)^2}} \tag{3}$$

όπου ζ είναι ο λόγος απόσβεσης του συστήματος και q είναι ο λόγος της συχνότητας του διεγέρτη προς τη φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος ($q = (\Omega/\omega)$). Η φάση ϑ περιγράφεται από την εξίσωση (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Πίνακα 3):

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{-2q\zeta}{1-q^2}\right) \tag{4}$$

Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται μία τυπική μορφή της Εξ.(3), για δεδομένο και σταθερό λόγο απόσβεσης ζ και μεταβλητό λόγο q.



Σχήμα 1: Τυπική μορφή του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ συναρτήσει του λόγου q

Η φυσική ερμηνεία του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα, διότι μας πληροφορεί ότι σε ένα σύστημα μπορούμε να παρατηρήσουμε ιδιαιτέρως μεγάλη διαφοροποίηση της απόκρισης όχι μόνο μεταβάλλοντας το πλάτος F_o της διεγείρουσας δύναμης (βλ. Εξ.(1)) αλλά, κυρίως, μεταβάλλοντας τη συχνότητα της διέγερσης. Από αυτή τη φυσική ερμηνεία προέκυψε ο χαρακτηρισμός ‘δυναμικό σύστημα’, σε αντιδιαστολή με τον χαρακτηρισμό ‘στατικό σύστημα’, ο οποίος περιγράφει ένα σύστημα διεγειρόμενο από μία χρονικά σταθερή δύναμη. Με τον όρο ‘συχνότητα της διέγερσης’ εννοούμε το ρυθμό (αργό ή γρήγορο), με τον οποίο διεγείρουμε το σύστημα (επιβάλλουμε το εξωτερικό φορτίο στο σύστημα). Το κριτήριο, δε, για τον χαρακτηρισμό του ρυθμού διέγερσης (αργός ή γρήγορος) του συστήματος είναι ο λόγος q.

Από την ανωτέρω περιγραφή προκύπτει και μία ακόμα, πιο ουσιαστική, ερμηνεία της ιδιοσυχνότητας. Πιο συγκεκριμένα, η ιδιοσυχνότητα δεν εκφράζει μόνο την συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος, αλλά αποτελεί και μία εσωτερική χρονική σταθερά ενός δυναμικού συστήματος, με την οποία συγκρίνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, προκειμένου να αποφανθούμε εάν η εξωτερική διέγερση επιβάλλεται με αργό ή γρήγορο ρυθμό.

Ο λόγος, λοιπόν, του ρυθμού επιβολής της εξωτερικής διέγερσης (συχνότητα διεγέρτη) προς την εσωτερική χρονική σταθερά (ιδιοσυχνότητα) του συστήματος καθορίζει αυτό που ονομάζουμε ‘δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος’, ή, ισοδύναμα, ‘απόκριση δυναμικού συστήματος’.

Επιστρέφοντας στο Σχήμα 1, εντοπίζουμε τρεις χαρακτηριστικές περιοχές:

- τη στατική περιοχή (Ζώνη Ι), στην οποία κυριαρχούν οι ελαστικές δυνάμεις,
- την περιοχή συντονισμού (Ζώνη ΙΙ), στην οποία κυριαρχούν οι δυνάμεις απόσβεσης (η παρουσία του στοιχείου απόσβεσης είναι ο μοναδικός τρόπος για να μην αστοχήσει (‘σπάσει’) το διεγειρόμενο σύστημα και , κυρίως, γι’ αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε στοιχεία απόσβεσης στις μηχανές)
- την περιοχή υψίσυχνων διεγέρσεων (Ζώνη ΙΙΙ), στην οποία κυριαρχούν οι δυνάμεις αδρανείας και την οποία θα εξετάζουμε λεπτομερέστερα.

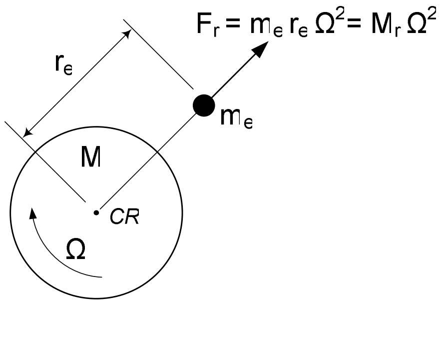
Πιο συγκεκριμένα για τη Ζώνη ΙΙΙ, από μαθηματικής απόψεως, καθώς ο λόγος q τείνει στο άπειρο, προκύπτει, από την Εξ.(3), ότι ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H}$ τείνει στο μηδέν. Από φυσικής/τεχνολογικής απόψεως, αυτό σημαίνει ότι καθώς αναγκάζουμε το σύστημα να ταλαντωθεί πάρα πολύ γρήγορα, το σύστημα, λόγω υψηλής αδρανείας, δεν προλαβαίνει να ανταποκριθεί και εκτελεί ταλάντωση με πάρα πολύ μικρός πλάτος. Με άλλα λόγια, στην προκειμένη περίπτωση, οι δυνάμεις αδρανείας παραλαμβάνουν και εξουδετερώνουν τις εξωτερικές διεγέρσεις. Αυτή η τεχνολογική παρατήρηση είναι εξαιρετικής σημασίας για την τεχνολογική εφαρμογή που ονομάζουμε ‘έδραση μηχανής’. Βάσει αυτής της παρατήρησης, σχεδιάζουμε τα δυναμικά συστήματα (κατασκευές) έτσι ώστε η ιδιοσυχνότητά τους να είναι πολύ χαμηλότερη από τη συχνότητα ταλάντωσης κατά τη λειτουργία του συστήματος, προκειμένου, με αυτόν τον τρόπο, να απομονώσουμε τις ταλαντώσεις.

Σχετικά με τη φύση της δύναμης, την οποία έχουμε επιλέξει ως εξωτερική διέγερση στην Εξ.(1), προκύπτει ένα ενδιαφέρον ερώτημα: γιατί επιλέξαμε αρμονική δύναμη και όχι δύναμη κάποιας άλλης μαθηματικής μορφής, π.χ. τετραγωνικής μορφής; Η απάντηση είναι διττή.

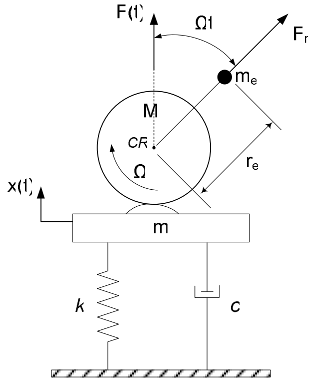
- Κατά πρώτον, διότι στις περιστροφικές μηχανές, οι οποίες, ιστορικά, αποτελούν ένα από τα κατ’ εξοχήν αντικείμενα μελέτης της Δυναμικής Μηχανών, εμφανίζονται, λόγω του φαινομένου της αζυγοσταθμίας, φυγόκεντρες δυνάμεις, οι οποίες εισάγουν στις μηχανές αρμονικές διεγέρσεις.
- Κατά δεύτερον, διότι κάθε μη-αρμονική ταλάντωση είναι δυνατόν να περιγραφεί χρησιμοποιώντας κατάλληλη σύνθεση αρμονικών ταλαντώσεων (π.χ. μέσω ανάλυσης Fourier). Συνεπώς, εάν γνωρίζουμε την απόκριση ενός συστήματος σε αρμονικές διεγέρσεις, είναι μαθηματικά δυνατόν να περιγράψουμε την απόκρισή του υπό την επιβολή μη-αρμονικής διέγερσης.

Εφαρμογή στην αζυγοσταθμία

Έστω ότι σε μία μηχανή υπάρχει ο περιστρεφόμενος άξονας μάζας M του Σχήματος 2α (άξονας κυκλικής διατομής), με κέντρο περιστροφής το σημείο (CR – Center of Rotation).



(α)



(β)

Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση φαινομένου αζυγοσταθμίας σε (α) περιστρεφόμενο άξονα μάζας M (β) περιστρεφόμενο άξονα μάζας M προσαρμοσμένο σε τυπικό σύστημα $m-c-k$

Διάφορες, τεχνολογικής φύσεως, αιτίες, όπως ατέλειες στην κατασκευή, ατέλειες στη συναρμολόγηση, ακόμα και από σπάσιμο μικρών τμημάτων υλικού της μηχανής στην οποία ανήκει ο άξονας, έχουν ως αποτέλεσμα το κέντρο περιστροφής του άξονα να μην ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της μηχανής. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι μία μάζα m_e, σε απόσταση r_e από το κέντρο περιστροφής, συμπεριφέρεται έκκεντρα κάτι που προκαλεί την ανάπτυξη μίας φυγόκεντρης δύναμης F_r, όπως απλοποιητικά απεικονίζεται στο Σχήμα 2α.

Η αναπτυσσόμενη φυγόκεντρος δύναμη ισούται με:

$$F_r = m_e r_e \Omega^2 \xrightarrow{M_r = m_e r_e} F_r = M_r \Omega^2 \tag{5}$$

όπου η ποσότητα M_r καλείται αζυγοστάθμητη ποσότητα και εκφράζεται σε kgm (χιλιόγραμμα επί μέτρο). Όπως φαίνεται και από την Εξ.(6), η φυγόκεντρος δύναμη F_r είναι ανάλογη της αζυγοστάθμητης ποσότητας M_r και ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας περιστροφής Ω. Εάν μία μηχανή με τον περιστρεφόμενο άξονα του Σχήματος 2α εδρασθεί κατακόρυφα χρησιμοποιώντας ένα τυπικό σύστημα $m-c-k$ (βλ Σχήμα 2β), τότε η προβολή της φυγόκεντρης δύναμης επί του κατακορύφου άξονα δίδει την ακόλουθη συνιστώσα:

$$F\left(t\right) = M_r \Omega^2 \cos\left(\Omega t\right) \tag{6}$$

Στην Εξ.(6), η ποσότητα $M_r\Omega^2$ εκφράζει το πλάτος της κατακόρυφης δύναμης $F\left(t\right)$, ενώ η ποσότητα $\cos\left(\Omega t\right)$ εκφράζει τη χρονική εξάρτηση. Από την Εξ.(6) προκύπτει ότι αρμονικές κατακόρυφες δυνάμεις είναι δυνατόν να εμφανισθούν λόγω περιστροφής έκκεντρων μαζών. Τις φυγόκεντρες αυτές δυνάμεις πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν στη διαδικασία της ζυγοστάθμισης (π.χ. ζυγοστάθμιση τροχών οχημάτων). Ένα απλό εμπειρικό παράδειγμα αζυγοσταθμίας αποτελεί το ποδήλατο: όταν οι τροχοί του είναι αζυγοστάθμητοι, τότε νιώθουμε μία αστάθεια (ένα τρέμουλο) στο τιμόνι. Με άλλα λόγια, η δυναμική συμπεριφορά μίας μηχανής επηρεάζεται σημαντικά από το φαινόμενο της αζυγοσταθμίας. Υπό την επίδραση, λοιπόν, της δύναμης $F\left(t\right)$ (βλ. Εξ.(6)), η μάζα m του συστήματος θα ταλαντωθεί και στην μόνιμη κατάσταση η συχνότητα απόκρισης του συστήματος θα είναι όμοια με αυτήν της διεγείρουσας δύναμης $F\left(t\right)$, ενώ το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m θα είναι X. Υπό την επίδραση μίας χρονικά σταθερής δύναμης μέτρου $F_o = M_r\Omega^2$, η μάζα m του συστήματος θα μετατοπισθεί κατά:

$$X_{ST} = \left(\frac{M_r\Omega^2}{k}\right) \tag{7}$$

Υπενθυμίζεται ότι η ποσότητα X_{ST} καλείται Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα03 / Εξ.10). Με βάση τον ορισμό του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης $\mathbb{H} = \left(X/X_{ST}\right)$ ((βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα03 / Εξ.20), προκύπτει:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{X}{M_r \Omega^2 / k} \right) \tag{8}$$

Εφαρμογή

Έστω μία περιστρεφόμενη μηχανή μάζας $m = 1000kg$, εδράζεται σε σταθερή βάση (π.χ. έδαφος), μέσω ενός συστήματος έδρασης, το οποίο, σε πρώτη προσέγγιση, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ένα ελατήριο σταθεράς k και από ένα στοιχείο απόσβεσης σταθεράς c. Λειτουργήσαμε τη μηχανή σε διάφορες συνθήκες λειτουργίας[1] (ισοδύναμα, σε διάφορες συχνότητες περιστροφής) και παρατηρήσαμε τα ακόλουθα:

- Στις 600ΣΑΛ (ΣΑΛ=**Σ**τροφές **Α**νά **Λ**επτό ή ισοδύναμα: RPM=**R**evolutions **P**er **M**inute), εμφανίστηκε **το μέγιστο πλάτος της μετατόπισης** της μηχανής και βρήκαμε (μέσω τεχνολογικής μέτρησης) ότι η επιτάχυνση, κατά τον κατακόρυφο άξονα, ήταν $A_M = 4.93\, m/\sec^2$.
- Στις κανονικές στροφές λειτουργίας 1500ΣΑΛ[2], βρήκαμε, πάλι μέσω τεχνολογικής μέτρησης, ότι η επιτάχυνση, κατά τον κατακόρυφο άξονα, ήταν $A_\Lambda = 7.308\, m/\sec^2$.

Υποθέτοντας ότι η αζυγοστάθμητη ποσότητα M_r είναι υπεύθυνη για την αρμονική διέγερση της μηχανής κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, ζητείται ο προσδιορισμός των μεγεθών k, c του συστήματος έδρασης καθώς και της ποσότητας M_r. Διευκρινίζεται ότι οι μετρήσεις έχουν ληφθεί στη μόνιμη απόκριση, δηλαδή θεωρείται ότι η περιστρεφόμενη μηχανή έχει λειτουργήσει για επαρκές χρονικό διάστημα πριν από κάθε μέτρηση, ώστε η επίδραση της μεταβατικής απόκρισης να έχει μηδενισθεί. Υπό τη θεώρηση αυτή, οι μετρήσεις αφορούν σε πλάτη στη μόνιμη απόκριση. (**Παρατήρηση:** Η ανωτέρω άσκηση αφορά σε δοκιμή, η οποία είναι εφαρμόσιμη σε βιομηχανικό περιβάλλον).

Λύση

Μεταβάλλοντας τη συχνότητα του ρεύματος, με το οποίο τροφοδοτούμε τη μηχανή, πρακτικά μεταβάλλουμε τη συχνότητα με την οποία διεγείρουμε το σύστημα περιστρεφόμενη μηχανή / έδραση μηχανής. Από την καταγραφή των αποτελεσμάτων συχνότητας διέγερσης / πλάτος απόκρισης συστήματος, είναι δυνατόν να εντοπίσουμε σε ποια συχνότητα εξωτερικής διέγερσης το σύστημα εμφανίζει το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης. Θεωρώντας, σε πρώτη προσέγγιση ότι το σύστημα δεν διαθέτει στοιχείο απόσβεσης (η ορθότητα αυτής της υπόθεσης θα ελεγχθεί στο τέλος), προκύπτει ότι, προσεγγιστικά, η μετρηθείσα συχνότητα (στο μέγιστο πλάτος ταλάντωσης) αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού. Συνεπώς, ισχύει:

$$q_M = \sqrt{1-\zeta^2} \tag{9}$$

[1] Σε έναν τριφασικό επαγωγικό ηλεκτροκινητήρα, αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ηλεκτρονικών ισχύος. Ειδικότερα, με τα λεγόμενα thyristor αλλάζουμε τη συχνότητα του ρεύματος και έτσι ρυθμίζουμε τις στροφές μίας μηχανής.

[2] Λόγω του φαινομένου της ολίσθησης, στην πράξη οι κανονικές στροφές λειτουργίας είναι περίπου 1450ΣΑΛ.

όπου q_M ο λόγος $q = (\Omega/\omega)$ στην περίπτωση μέτρησης του μέγιστου πλάτους ταλάντωσης έστω περίπτωση 'Μ'). Δεχόμενοι ότι το εξεταζόμενο σύστημα έχει πολύ μικρή απόσβεση, δηλαδή ότι $\zeta \to 0$, προκύπτει:

$$q_M = \sqrt{1-\zeta^2} \xrightarrow{\zeta \to 0} q_M \approx 1 \tag{10}$$

Εξ ορισμού, ισχύει:

$$q_M = \left(\frac{\Omega_M}{\omega}\right) \tag{11}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(10,11) δίδει ότι:

$$\omega \approx \Omega_M \tag{12}$$

Επειδή θεωρήσαμε, σε πρώτη προσέγγιση, ότι το σύστημα μηχανή/έδραση περιλαμβάνει μόνο στοιχείο ελαστικότητας (ελατήριο σταθεράς k) και στοιχείο αδρανείας (μάζα συστήματος m), δηλαδή θεωρήσαμε ότι το σύστημα μηχανή/έδραση είναι ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13}$$

Συνδυάζοντας τις Εξ.(12,13), προκύπτει:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \approx \Omega_M \Rightarrow \Omega_M^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\Omega_M^2 \tag{14}$$

Για συμβατότητα στις μονάδες μέτρησης, εκφράζουμε τη συχνότητα Ω_M σε $(rad/\sec)$:

$$\Omega_M = 600\Sigma\mathrm{A}\Lambda = 600 \times \frac{2\pi}{60}\left(rad/\sec\right) = 600 \times \frac{6.28}{60}\left(rad/\sec\right) \Rightarrow \Omega_M = 62.8\left(rad/\sec\right) \tag{15}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(14), προκύπτει:

$$k = m\Omega^2 = 1000 \times 62.8^2 \left(N/m\right) = 3.94384 \times 10^6 \left(N/m\right) \Rightarrow k = 3.94 \times 10^6 \left(N/m\right) \tag{16}$$

Από τις Εξ.(3,8), προκύπτει:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{X}{M_r\Omega^2/k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2q\zeta\right)^2}} \tag{17}$$

Στην Εξ.(17), το εμφανιζόμενο πλάτος ταλάντωσης Χ είναι δυνατόν να υπολογισθεί μέσω της μετρούμενης επιτάχυνσης. Ειδικότερα, η απόκριση του συστήματος ισούται με (βλ. Εξ.2):

$$x(t) = x_p(t) = X\cos(\Omega t - \vartheta) \tag{18}$$

Η επιτάχυνση ισούται με τη δεύτερη χρονική παράγωγο της Εξ.(18), άρα ισχύει:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X \cos(\Omega t - \vartheta) \tag{19}$$

Το πλάτος της επιτάχυνσης ορίζεται ως:

$$A = \Omega^2 X \tag{20}$$

Επιλύοντας την Εξ.(20) ως προς το πλάτος ταλάντωσης X, προκύπτει:

$$\mathrm{X} = \left(\frac{A}{\Omega^2}\right) \tag{21}$$

Με άλλα λόγια, μετρώντας μέσω επιταχυνσιόμετρου την επιτάχυνση A και γνωρίζοντας σε ποια συχνότητα διέγερσης εμφανίζεται αυτή, είναι δυνατόν να υπολογισθεί το πλάτος ταλάντωσης X. Ο συνδυασμός των Εξ.(17,21) δίδει:

$$\left(\frac{\mathrm{A}/\Omega^2}{M_r\Omega^2/k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2q\zeta\right)^2}} \tag{22}$$

Γράφουμε την Εξ.(22) για την περίπτωση ‘Μ’ (περίπτωση μέτρησης μέγιστου πλάτους ταλάντωσης):

$$\left(\frac{\mathrm{A_M}/\Omega_{\mathrm{M}}^2}{M_r\Omega_{\mathrm{M}}^2/k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q_{\mathrm{M}}^2\right)^2 + \left(2q_{\mathrm{M}}\zeta\right)^2}} \tag{23}$$

Εισάγοντας την Εξ.(10) στην Εξ.(23) και εκτελώντας πράξεις, τελικά προκύπτει:

$$\left(\frac{\mathrm{A_M}/\Omega_{\mathrm{M}}^2}{M_r\Omega_{\mathrm{M}}^2/k}\right) = \frac{1}{2\zeta} \tag{24}$$

Γράφουμε την Εξ.(22) για την περίπτωση μέτρησης του πλάτους ταλάντωσης στη συχνότητα λειτουργίας (έστω περίπτωση ‘Λ’):

$$\left(\frac{\mathrm{A_\Lambda}/\Omega_{\Lambda}^2}{M_r\Omega_{\Lambda}^2/k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q_{\Lambda}^2\right)^2 + \left(2q_{\Lambda}\zeta\right)^2}} \tag{25}$$

Για συμβατότητα στις μονάδες μέτρησης, εκφράζουμε τη συχνότητα Ω_Λ σε $\left(rad/\sec\right)$.

$$\Omega_\Lambda = 1500\Sigma\mathrm{A}\Lambda = 1500 \times \frac{2\pi}{60}\left(rad/\sec\right) = 1500 \times \frac{6.28}{60}\left(rad/\sec\right) \Rightarrow \Omega_M = 156.5\left(rad/\sec\right) \tag{26}$$

Υπενθυμίζεται ότι η συχνότητα Ω_Λ, όπως και η συχνότητα Ω_M, ρυθμίζεται από εμάς κατά τη διεξαγωγή τη διαδικασία της μέτρησης. Σχετικά με το λόγο q_Λ, εξ ορισμού, ισχύει:

$$q_\Lambda = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\omega}\right) \tag{27}$$

Εισάγοντας την Εξ.(12) στην Εξ.(27), και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει:

$$q_\Lambda = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\right) = \left(\frac{156.5}{62.8}\right) = 2.49204 \Rightarrow q_\Lambda \approx 2.5 \tag{28}$$

Από τα ανωτέρω, προκύπτει ότι, για το σύστημα των Εξ.(23,25), ισχύουν τα εξής:

- Τα μεγέθη γωνιακών ταχυτήτων Ω_Λ και Ω_M είναι μετρήσιμα και θεωρούνται γνωστά
- Τα μεγέθη A_Λ και A_M είναι μετρήσιμα (μέσω επιταχυνσιομέτρων) και θεωρούνται γνωστά
- Το μέγεθος k υπολογίστηκε από την Εξ.(14)
- Το μέγεθος q_Λ υπολογίστηκε από την Εξ.(28)

Συνεπώς, ως άγνωστοι παραμένουν οι ποσότητες M_r και ζ. Ισοδύναμα, στο σύστημα των δύο εξισώσεων (23,25) υπάρχουν δύο άγνωστοι. Η λύση του εν λόγω συστήματος θα δώσει τις ποσότητες M_r και ζ. Προς αυτήν την κατεύθυνση, διαιρούμε κατά μέλη τις Εξ.(23,25):

$$\frac{\left(\dfrac{A_M/\Omega_M^2}{M_r\Omega_M^2/k}\right)}{\left(\dfrac{A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2}{M_r\Omega_\Lambda^2/k}\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{2\zeta}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}\right)} \tag{29}$$

Εκτελούμε πράξεις στην Εξ.(29):

$$\frac{\left(\dfrac{A_M/\Omega_M^2}{\cancel{M_r}\Omega_M^2/\cancel{k}}\right)}{\left(\dfrac{A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2}{\cancel{M_r}\Omega_\Lambda^2/\cancel{k}}\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{2\zeta}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}\right)} \Rightarrow \frac{\left(A_M/\Omega_M^2\Omega_M^2\right)}{\left(A_\Lambda/\Omega_\Lambda^2\Omega_\Lambda^2\right)} = \frac{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}{2\zeta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4} = \frac{\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}}{2\zeta} \Rightarrow 2\zeta\left(\frac{A_M\Omega_\Lambda^4}{A_\Lambda\Omega_M^4}\right) = \sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[2\zeta\left(\frac{\mathrm{A_M}\Omega_\Lambda^4}{\mathrm{A_\Lambda}\Omega_\mathrm{M}^4}\right)\right]^2=\left(\sqrt{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2}\right)^2\Rightarrow\left[2\zeta\left(\frac{\mathrm{A_M}\Omega_\Lambda^4}{\mathrm{A_\Lambda}\Omega_\mathrm{M}^4}\right)\right]^2=\left(1-q_\Lambda^2\right)^2+\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[2\zeta\left(\frac{\mathrm{A_M}\Omega_\Lambda^4}{\mathrm{A_\Lambda}\Omega_\mathrm{M}^4}\right)\right]^2-\left(2q_\Lambda\zeta\right)^2=\left(1-q_\Lambda^2\right)^2\Rightarrow\zeta^2\left[\left(2\frac{\mathrm{A_M}\Omega_\Lambda^4}{\mathrm{A_\Lambda}\Omega_\mathrm{M}^4}\right)^2-\left(2q_\Lambda\right)^2\right]=\left(1-q_\Lambda^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\zeta^2=\frac{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2}{\left[\left(2\frac{\mathrm{A_M}\Omega_\Lambda^4}{\mathrm{A_\Lambda}\Omega_\mathrm{M}^4}\right)^2-\left(2q_\Lambda\right)^2\right]}\Rightarrow\zeta=\pm\sqrt{\frac{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2}{\left[\left(2\left(\frac{\mathrm{A_M}}{\mathrm{A_\Lambda}}\right)\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\right)^4\right)^2-\left(2q_\Lambda\right)^2\right]}} \tag{30}$$

Από την Εξ.(30) προκύπτει ότι η Εξ.(29) διαθέτει δύο ρίζες αντιθέτου προσήμου. Η θετική ρίζα αντιστοιχεί σε υποκρίσιμη απόσβεση, ενώ η αρνητική ρίζα αντιστοιχεί σε ασταθή κατάσταση του συστήματος (το πλάτος της ταλάντωσης ενισχύεται διαρκώς και απεριόριστα, τείνοντας στο άπειρο). Από την εκφώνηση της άσκησης προκύπτει ότι, για διαφορετικές συχνότητες περιστροφής, το σύστημα ταλαντωνόταν με πεπερασμένο πλάτος: το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης που παρατηρήθηκε είχε πεπερασμένη τιμή, άρα δεν παρατηρήθηκε αστάθεια. Συνεπώς, διατηρούμε τη θετική ρίζα της Εξ.(29) και απορρίπτουμε την αρνητική ρίζα. Με αριθμητική αντικατάσταση των Εξ.(15,26,28,30), λαμβάνοντας υπ’ όψιν και τα μετρηθέντα μέγιστα πλάτη επιτάχυνσης, δίδει:

$$\zeta=\sqrt{\frac{\left(1-q_\Lambda^2\right)^2}{\left[\left(2\left(\frac{\mathrm{A_M}}{\mathrm{A_\Lambda}}\right)\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\right)^4\right)^2-\left(2q_\Lambda\right)^2\right]}}=\sqrt{\frac{\left(1-2.5^2\right)^2}{\left[\left(2\times\left(\frac{4.93}{7.303}\right)\times\left(\frac{156.5}{62.8}\right)^4\right)^2-\left(2\times2.5\right)^2\right]}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\zeta=\sqrt{\frac{27.562500}{\left[\left(2\times0.675065\times2.492038^4\right)^2-25\right]}}=\sqrt{\frac{27.562500}{\left[2711.367950-25\right]}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\zeta\approx0.1 \tag{31}$$

Παρατηρούμε ότι, πράγματι, προκύπτει μικρή τιμή για το λόγο απόσβεσης ζ. Εάν δεν προέκυπτε μικρή τιμή, τότε θα έπρεπε να προσδιορίσουμε το λόγο απόσβεσης ζ μέσω επαναληπτικής διαδικασίας.

Επιλύοντας την Εξ.(24) ως προς την αζυγοστάθμητη ποσότητα M_r, προκύπτει:

$$\left(\frac{\mathrm{A_M}/\Omega_\mathrm{M}^2}{M_r\Omega_\mathrm{M}^2/k}\right)=\frac{1}{2\zeta}\Rightarrow M_r=\left(2\zeta\left(\frac{\mathrm{A_M}/\Omega_\mathrm{M}^2}{\Omega_\mathrm{M}^2/k}\right)\right)\Rightarrow M_r=\left(\frac{2\zeta k\mathrm{A_M}}{\Omega_\mathrm{M}^4}\right) \tag{32}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(32), προκύπτει:

$$M_r = \left(\frac{2\zeta k \mathrm{A_M}}{\Omega_{\mathrm{M}}^4} \right) = \left(\frac{2 \times 0.1 \times \left(3.94 \times 10^6\right) \times 4.93}{62.8^4} \right) = \left(\frac{3.884840 \times 10^6}{15.553874 \times 10^6} \right) \Rightarrow M_r = 0.2497\mathrm{kgm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_r \approx 0.25\mathrm{kgm} \tag{33}$$

Τέλος, από τον ορισμό του λόγου απόσβεσης ζ (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01/Εξ.14), ισχύει:

$$\zeta = \frac{c}{2\omega m} \Rightarrow c = 2\zeta\omega m \tag{34}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(34), προκύπτει:

$$c = 2\zeta\omega m = 2 \times 0.1 \times 62.8 \times 1000 \left({N\sec}/{m} \right) \Rightarrow c = 1.256 \times 10^4 \left({N\sec}/{m} \right) \tag{35}$$

Σημαντικές παρατηρήσεις:

1. Όπως φαίνεται και από την Εξ.(20), σε μία αρμονική ταλάντωση, το πλάτος της επιτάχυνσης A είναι ανάλογο του πλάτους της μετατόπισης X, με σταθερά αναλογίας ***το τετράγωνο*** της συχνότητας διέγερσης Ω. Συνεπώς, στο σημείο λειτουργίας των 1500ΣΑΛ, ισχύει:

$$\left(\frac{A}{\mathrm{X}} \right) = \Omega^2 \Rightarrow \left(\frac{A}{\mathrm{X}} \right) = 156.5^2 = 24492.25 \Rightarrow \left(\frac{A}{\mathrm{X}} \right) \approx 25000 \tag{36}$$

Με άλλα λόγια, το μέγεθος X είναι, περίπου, 25000 φορές μικρότερο του μεγέθους A. Πιο συγκεκριμένα, με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(21), προκύπτει:

$$\mathrm{X}_\Lambda = \left(\frac{A_\Lambda}{\Omega_\Lambda^2} \right) = \left(\frac{7.38}{156.6^2} \right) = 3.0132 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \approx 301.3\mu\mathrm{m} \tag{37}$$

Συνεπώς, με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης, διαπιστώνουμε ότι ενώ το πλάτος της επιτάχυνσης είναι της τάξεως μεγέθους της επιτάχυνσης της βαρύτητας, για την οποία διαθέτουμε κατάλληλα όργανα μέτρησης, το πλάτος της μετατόπισης είναι τέσσερεις τάξης μεγέθους μικρότερο.

2. Από την Εξ.(5), φαίνεται ότι η αζυγοστάθμητη ποσότητα M_r ισούται με το γινόμενο ενός μοχλοβραχίονα r_e επί μία μάζα m_e. Συνεπώς, ο προσδιορισμός της ποσότητας M_r δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα τις ποσότητες r_e και m_e. Αντιθέτως, η ίδια τιμή M_r είναι δυνατόν να αντιστοιχεί σε μία μικρή μάζα, η οποία βρίσκεται μακριά από τον άξονα περιστροφής, ή σε μία μεγάλη μάζα, η οποία βρίσκεται κοντά στον άξονα περιστροφής. Ως εκ τούτου, σε έναν συμπαγή φορέα, η γνώση της τιμής M_r δεν επαρκεί για τον ακριβή χωρικό προσδιορισμό της έκκεντρης μάζας m_e. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις, η αντιμετώπιση της αζυγοσταθμίας είναι αρκετά εύκολη, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των τροχών ενός οχήματος: το ελαστικό (επίσωτρο) είναι τοποθετημένο στην περιφέρεια της ζάντας (σώτρο) και τυχόν αζυγοσταθμία της μάζας του ελαστικού διορθώνεται εύκολα τοποθετώντας μικρά βάρη στην περιφέρεια της ζάντας.

3. Στην αρχή της επίλυσης του προβλήματος υποθέσαμε ότι ο λόγος απόσβεσης ζ είναι πολύ μικρός και στη συνέχεια ελέγξαμε κατά πόσο η προκύπτουσα τιμή του λόγου ζ όντως δικαίωνε την αρχική μας υπόθεση. Γενικά, στις τεχνολογικές εφαρμογές, τιμές του λόγου ζ της τάξεως του 10% θεωρούνται μικρές. Εάν προέκυπτε μεγάλη τιμή του λόγου ζ, π.χ. $\zeta = 0.4$, τότε θα έπρεπε:

a. να χρησιμοποιηθεί, για την περίπτωση ‘Μ’, η Εξ.(25) κατάλληλα εκπεφρασμένη (αντί της Εξ.(24)), δηλαδή:

$$\left(\frac{A_M / \Omega_M^2}{M_r \Omega_M^2 / k} \right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q_M^2\right)^2 + \left(2 q_M \zeta\right)^2}} \tag{38}$$

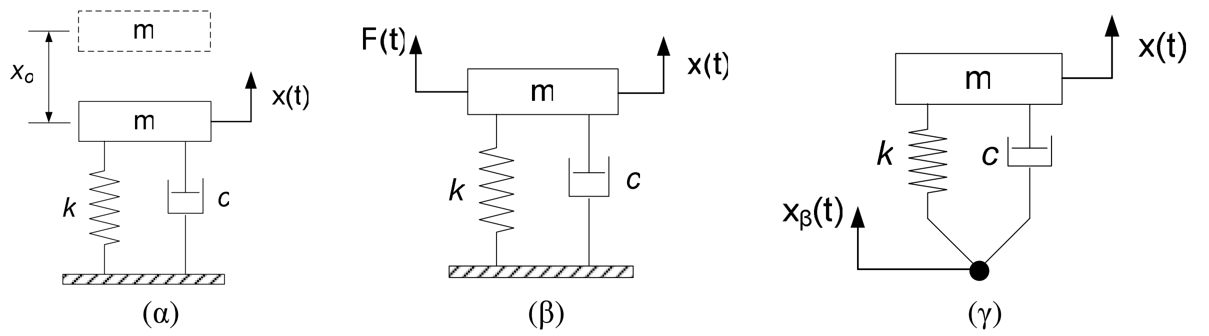
b. να χρησιμοποιηθεί για το λόγο q_M η σχέση υπολογισμού του στην περίπτωση του συντονισμού, δηλαδή (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.28):

$$q_M = \sqrt{1-2\zeta^2} \tag{39}$$

c. να επιλυθεί το σύστημα των τριών εξισώσεων (Εξ.(25,37,38) με τους τρεις αγνώστους M_r, ζ και ω. Για την επίλυση του συστήματος, είναι δυνατή η χρήση οποιασδήποτε αριθμητικής μεθόδου.

Σύστημα 1 Β.Ε. υπό κινηματική διέγερση – Εφαρμογή
Θεωρητικά Στοιχεία

Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει την περίπτωση απόκρισης $x(t)$ ενός δυναμικού συστήματος $m-c-k$ ενός βαθμού ελευθερίας, όταν σε αυτό επιβάλλονται: α) αρχικές συνθήκες (x_o, υ_o) (Σχήμα 3α), ή β) εξωτερική διέγερση $F(t)$ (Σχήμα 3β).



Σχήμα 3: Σχηματική αναπαράσταση διέγερσης δυναμικού συστήματος $m-c-k$ ενός βαθμού ελευθερίας: (α) με επιβολή οριακής συνθήκης, (β) με επιβολή εξωτερικής δύναμης και (γ) με επιβολή κινηματικής συνθήκης

Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη της διέγερσης του συστήματος αυτού, όταν η βάση του εκτελεί αρμονική κίνηση (Σχήμα 3γ), ή, ισοδύναμα, όταν, στη βάση του συστήματος, επιβάλλεται κινηματική συνθήκη $x_\beta(t)$ της μορφής:

$$x_\beta(t) = X_\beta \cos(\Omega t) \tag{40}$$

Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3γ, επειδή το ***κάτω άκρο*** του ελατηρίου και του στοιχείου απόσβεσης είναι σταθερά συνδεδεμένα με την κινούμενη βάση, έπεται ότι η κατακόρυφη κίνηση του εν λόγω άκρου θα ισούται με την κατακόρυφη κίνηση $x_\beta(t)$ της βάσης. Επίσης, επειδή το ***άνω άκρο*** του ελατηρίου και του στοιχείου απόσβεσης είναι σταθερά συνδεδεμένα με τη μάζα m (βλ. Σχήμα 3γ), έπεται ότι η κατακόρυφη κίνηση του εν λόγω άκρου θα ισούται με την κατακόρυφη κίνηση $x(t)$ της μάζας. Συνεπώς, τόσο στο ελατήριο όσο και στον αποσβεστήρα, οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις οφείλονται στη σχετική μετακίνηση και των δύο άκρων. Θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, ισχύει:

$$F_c = c\left(\dot{x} - \dot{x}_\beta\right) \tag{41}$$

και

$$F_k = k\left(x - x_\beta\right) \tag{42}$$

Υπενθυμίζεται ότι για τις περιπτώσεις του Σχήματος 3α και 3β, εφόσον η βάση είναι ακίνητη, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01):

$$F_c = c\dot{x} \quad \text{και} \quad F_k = kx \tag{43}$$

Συνεχίζοντας με το Σχήμα 3γ, η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$m\ddot{x} + c\left(\dot{x} - \dot{x}_\beta\right) + k\left(x - x_\beta\right) = 0 \tag{44}$$

όπου ως x συμβολίζεται η κατακόρυφη μετατόπιση της μάζας m, ενώ ως x_β συμβολίζεται η κατακόρυφη μετατόπιση της βάσης. Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(44) και μεταφέροντας στο δεξί μέλος της εξίσωσης τους όρους που σχετίζονται με τη γνωστή κινηματική διέγερση $x_\beta(t)$, προκύπτει:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{c\dot{x}_\beta + kx_\beta}_{F_\mu(t)} \tag{45}$$

Παρατηρώντας την Εξ.(45), διαπιστώνουμε ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι μη-μηδενικό. ***Με άλλα λόγια, η επιβολή της κατακόρυφης κινηματικής διέγερσης στη βάση του συστήματος προκαλεί την εμφάνιση μίας δύναμης διέγερσης*** $F_\mu(t)$, ίσης με:

$$F_\mu(t) = c\dot{x}_\beta + kx_\beta \tag{46}$$

Συνεπώς, και στην περίπτωση επιβολής κινηματικής διέγερσης προκαλείται δυναμική απόκριση. Χαρακτηριστικό φυσικό παράδειγμα αποτελεί ο σεισμός: όταν λάβει χώρας ένας σεισμός, τότε τα κτήρια θα ταλαντωθούν λόγω επιβαλλόμενης κινηματικής διέγερσης $x_\beta(t)$. Αντικαθιστώντας την Εξ.(40) στην Εξ.(46), προκύπτει:

$$\begin{aligned} F_\mu(t) &= F_{\mu,o}\cos(\Omega t-\varphi) \\ \varphi &= \tan^{-1}(-2\zeta q) \end{aligned} \tag{47}$$

όπου ως φ συμβολίζεται η διαφορά φάση μεταξύ κινηματικής διέγερσης και απόκρισης (βλ. Παράρτημα ‘Α’). Για να εξετάσουμε το σύστημα θα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κινηματική αυτή διέγερση προκαλεί αρμονική διέγερση $F_\mu(t)$ που δίνεται από την Εξ. (46). Από την Εκπαιδευτική Ενότητα 03 μάθαμε ότι το σύστημα θα ταλαντωθεί με συχνότητα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη, και η απόκριση του συστήματος θα ισούται με:

$$x(t) = X\cos(\Omega t-\varphi) \tag{48}$$

όπου x είναι η απόκριση (ταλάντωση) του συστήματος, X είναι το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος, Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη και φ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ απόκρισης και διέγερσης.

Στην περίπτωση της ***αρμονικής διέγερσης*** του συστήματος $m-c-k$ 1 Β.Ε. (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03) ορίσαμε το Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης $\mathbb{H}$. Στην περίπτωση της ***αρμονικής κινηματικής διέγερσης*** του εν λόγω συστήματος, ορίζεται ο Συντελεστής Μεταδοτικότητος (**TR**ansmissibility factor – TR) ως ο λόγος του πλάτους X της κατακόρυφης απόκρισης του συστήματος προς το πλάτος X_β της εξωτερικής κινηματικής διέγερσης της βάσης:

$$TR(q,\zeta) = \left(\frac{X}{X_\beta}\right) \tag{49}$$

Από την Εξ.(47) και τον ορισμό του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης $\mathbb{H}$ (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03):

$$\mathbb{H} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2}}\right) \tag{50}$$

καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$TR = \mathbb{H}\left(\sqrt{1+\left(2\zeta q\right)^2}\right) \tag{51}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(50,51) δίδει:

$$TR = \left(\frac{\sqrt{1+(2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}} \right) \qquad (52)$$

Η φυσική σημασία του Συντελεστού Μεταδοτικότητος TR είναι εξαιρετικά χρήσιμη διότι:

- Πληροφορεί σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο η κινηματική διέγερση x_β της βάσης μεταφέρεται στο σύστημα, π.χ. πώς μεταφέρεται η ταλάντωση ενός σεισμού σε ένα κτήριο, ή πώς μεταφέρεται η ταλάντωση μίας βάσης (π.χ. τραπέζι) σε μία ευαίσθητη μετρητική διάταξη που είναι τοποθετημένη επάνω στο τραπέζι, ή πώς μεταφέρεται στο αμάξωμα μία ταλάντωση από τον τροχό ενός οχήματος, κοκ.
- Ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης $\mathbb{H}$ μπορεί να ταυτιστεί με το Συντελεστή Μεταδοτικότητας TR όταν $\zeta \to 0$ (αμελητέα απόσβεση) ή/και όταν $q \to 0$ (πολύ υψίσυχνη διέγερση). Γενικά, ο συντελεστής TR αποτελεί μία τεχνική διόρθωση του συντελεστού $\mathbb{H}$, αλλά έχει τον ίδιο τεχνολογικό ρόλο.

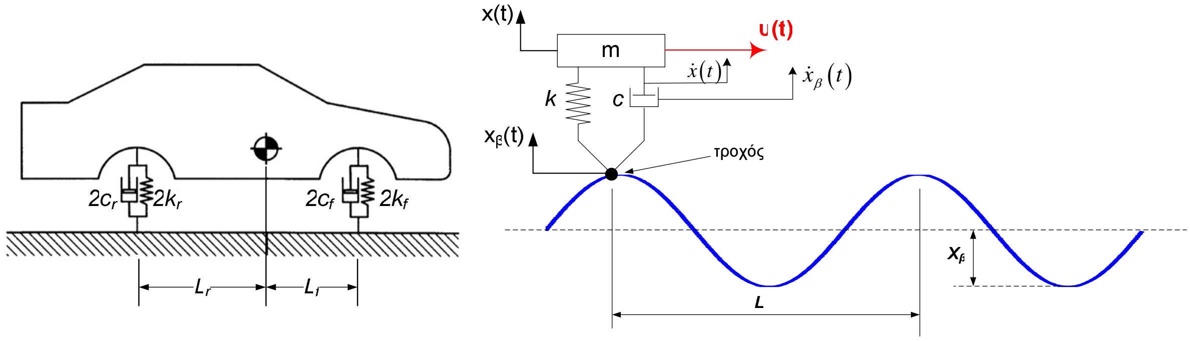
Εφαρμογή

Έστω όχημα μάζας $m = 1000kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 144\,km/h$ επί οδοστρώματος αρμονικής διαμόρφωσης. Έστω ότι η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του οδοστρώματος ισούται με $L = 12.56m$, ενώ το πλάτος της αρμονικής διαμόρφωσης είναι $X_\beta = 5cm$ (δηλαδή το βάθος λακκούβας είναι $2X_\beta$). Το όχημα θεωρείται, προσεγγιστικά, ως δυναμικό σύστημα $m-c-k$ ενός βαθμού ελευθερίας, με σταθερά ελατηρίου $k = 10^5\,N/m$ και στοιχείο απόσβεσης με σταθερά $c = 4\times10^3\,Ns/m$. Ζητούνται:

a. το πλάτος X_{144} των κατακορύφων μετατοπίσεων (κατακορύφων ταλαντώσεων) του οχήματος, όταν αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 144\,km/h$
b. η σταθερή ταχύτητα U_Σ, με την οποία, όταν κινείται το όχημα, εμφανίζεται συντονισμός, καθώς και το πλάτος X_Σ της κατακόρυφης απόκρισης (κατακόρυφης ταλάντωσης) του οχήματος στην περίπτωση αυτή
c. το πλάτος $X_\Sigma^{'}$ της κατακόρυφης ταλάντωσης του οχήματος στην περίπτωση συντονισμού, εάν χαθεί το 50% της ικανότητας απόσβεσης της ανάρτησης του οχήματος (δηλαδή, όταν συμβεί $c^{'} = c/2$, ή, ισοδύναμα, αστοχήσουν τα μισά στοιχεία απόσβεσης του οχήματος).

Λύση

Στο Σχήμα 4 αναπαρίσταται σχηματικά ένα κινούμενο όχημα. Ειδικότερα, στο Σχήμα 4α απεικονίζεται ένα όχημα με διαφορετικά χαρακτηριστικά ανάρτησης στον πρόσθιο και οπίσθιο άξονα, ενώ στο Σχήμα 4β απεικονίζεται μία απλοποιημένη προσέγγιση οχήματος ως σύστημα $m-c-k$ ενός βαθμού ελευθερίας, στο οποίο η μάζα του οχήματος είναι σημειακή, και όχι κατανεμημένη, ενώ η συνολική δράση της ανάρτησης του οχήματος ανάγεται στη δράση ενός ελατηρίου σταθεράς k και ενός αποσβεστήρα σταθεράς c. Στο Σχήμα 4β, το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ επί οδοστρώματος, η επιφάνεια του οποίου είναι ημιτονοειδής (εξ ου και η ονομασία 'οδόστρωμα αρμονικής διαμόρφωσης').



(α) (β)

Σχήμα 4: Σχηματική αναπαράσταση (α) οχήματος κινούμενου επί επιπέδου οδοστρώματος και (β) απλοποιημένης θεώρησης οχήματος κινουμένου επί αρμονικού οδοστρώματος

Θεωρώντας ότι ο τροχός παρακολουθεί τη διαμόρφωση του οδοστρώματος (θεωρούμε ότι δεν υπάρχει "lift-off"), έπεται ότι ο τροχός εκτελεί μία κατακόρυφη μετατόπιση της μορφής:

$$x_\beta(t) = X_\beta \cos(\Omega t) \tag{53}$$

όπου η συχνότητα Ω είναι ανάλογη της ταχύτητας του οχήματος και του μήκους της λακούβας (βλέπε Εξ.(56,57,58)). Διευκρινίζεται, δε, ότι η επίδραση της βαρύτητας αποτελεί μία στατική υπέρθεση, άρα δεν αποτελεί την αιτία της ταλάντωσης.

Ερώτημα (α)

Για τον υπολογισμό του πλάτους X_{144} των κατακορύφων μετατοπίσεων του οχήματος, όταν αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 144\,km/h$, ο συνδυασμός των Εξ.(48,50) δίδει:

$$TR = \left(\frac{X_{144}}{X_\beta}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+(2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}}\right) \Rightarrow X_{144} = X_\beta \left(\frac{\sqrt{1+(2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}}\right) \tag{54}$$

Ακριβώς επειδή θεωρούμε ότι ο τροχός παρακολουθεί το οδόστρωμα (δεν αποκολλάται από αυτό), έπεται ότι το πλάτος X_β της κατακόρυφης μετατόπισης του οχήματος θα ισούται με το ύψος της αρμονικής διαμόρφωσης. Συνεπώς, βάσει της Εξ.(54), απομένει ο υπολογισμός του λόγου q και του λόγου απόσβεσης ζ. Ο λόγος q ισούται με:

$$q = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \tag{55}$$

Η συχνότητα Ω της κατακόρυφης μετατόπισης του οχήματος θα ισούται με τη συχνότητα με την οποία το όχημα συναντά τις λακκούβες, δηλαδή ισχύει:

$$\Omega = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \tag{56}$$

όπου T είναι ο χρόνος που μεσολαβεί (περίοδος) προκειμένου το όχημα, από μία κορυφή του οδοστρώματος, να φθάσει στην αμέσως επόμενη. Συνεπώς θα ισχύει:

$$\upsilon = \left(\frac{L}{T}\right) \Rightarrow T = \left(\frac{L}{\upsilon}\right) \tag{57}$$

όπου υ είναι η σταθερή ταχύτητα κίνησης του οχήματος και L η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του οδοστρώματος. Ο συνδυασμός των Εξ.(56,57), μετά από πράξεις και αφού μετατραπούν τα $\left(km/h\right)$ σε $\left(m/\sec\right)$, δίδει:

$$\Omega = 2\pi\left(\frac{\upsilon}{L}\right) = 2\times 6.28\times\left(144\times\frac{1000}{3600}\right)\times\frac{1}{12.56} \Rightarrow \Omega = 20\frac{rad}{\sec} \tag{58}$$

Η φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος ισούται με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^5}{1000}}\frac{rad}{\sec} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{\sec} \tag{59}$$

Συνεπώς, βάσει των Εξ.(55,58,59), ο λόγος q ισούται με:

$$q = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{20}{10} \Rightarrow q = 2 \tag{60}$$

Ο λόγος απόσβεσης ζ ισούται με:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} = \frac{4\times 10^3}{2\times 1000\times 10} \Rightarrow \zeta = 0.2 \tag{61}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος απόσβεσης $\zeta = 0.2$ δεν είναι αμελητέος. Από τον συνδυασμό των Εξ.(54,60,61), τελικά προκύπτει:

$$X_{144} = X_\beta\left(\frac{\sqrt{1+\left(2\zeta q\right)^2}}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2}}\right) = 5\times\left(\frac{\sqrt{1+\left(2\times 0.2\times 2\right)^2}}{\sqrt{\left(1-2^2\right)^2+\left(2\times 0.2\times 2\right)^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{144} = 5\times\left(\frac{\sqrt{1+0.64}}{\sqrt{9+0.64}}\right) = 5\times\sqrt{\frac{1.64}{9.64}} \Rightarrow X_{144} = 2.062cm \tag{62}$$

Επομένως, το ζητούμενου πλάτος είναι $X_{144} = 2.062cm$.

Ερώτημα (b)

Στην περίπτωση του συντονισμού, ο λόγος q ισούται με μονάδα:

$$q = 1 \tag{63}$$

Συνεπώς, θα ισχύει:

$$q = \frac{\Omega}{\omega} = 1 \Rightarrow \Omega = \omega \xrightarrow{\text{Εξ.17}} \frac{2\pi}{T} = \omega \xrightarrow{\text{Εξ.18}} \frac{2\pi}{\left(L/\upsilon_\Sigma\right)} = \omega \Rightarrow \upsilon_\Sigma = \left(L/2\pi\right)\omega \tag{64}$$

όπου ως υ_Σ συμβολίζεται η σταθερή ταχύτητα με την οποία εάν κινηθεί το όχημα τότε θα επέλθει συντονισμός. Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$\upsilon_\Sigma = \omega\frac{L}{2\pi} = 10\times\frac{12.56}{6.28}\left(\frac{m}{\sec}\right) \Rightarrow \upsilon_\Sigma = 20\left(\frac{m}{\sec}\right) = 20\times\frac{3600}{1000}\left(\frac{km}{h}\right) \Rightarrow \upsilon_\Sigma = 72\left(\frac{km}{h}\right) \tag{65}$$

Η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού είναι ενδιαφέρουσα. Έστω ότι οδηγούμε ένα όχημα με μαλακές αναρτήσεις, δηλαδή με αναρτήσεις χαμηλής ιδιοσυχνότητας, επί ανωμάλου οδοστρώματος, π.χ. οδόστρωμα με χαλίκια. Όσο ταχύτερα κινούμαστε, τόσο υψηλότερη καθίσταται η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης και τόσο μεγαλύτερος θα είναι ο λόγος q. Συνεπώς, θα προκαλείται υψίσυχνη διέγερση του οχήματος, και ως εκ τούτου το όχημα δεν θα ταλαντώνεται. Αν και σε αυτήν την περίπτωση θα αποφεύγονται οι ταλαντώσεις, ωστόσο η κίνηση επί ανωμάλου οδοστρώματος με υψηλή ταχύτητα δεν αποτελεί την σωστή λογική οδήγησης.

Επίσης, στην περίπτωση του συντονισμού, η Εξ.(54) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$TR = \left(\frac{X_\Sigma}{X_\beta}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+(2\zeta)^2}}{\sqrt{(2\zeta)^2}}\right) \Rightarrow X_\Sigma = X_\beta\left(\frac{\sqrt{1+4\zeta^2}}{\sqrt{4\zeta^2}}\right) \tag{66}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(66) με την Εξ.(61), προκύπτει:

$$X_\Sigma = 5\times\left(\frac{\sqrt{1+4\times0.2^2}}{\sqrt{4\times0.2^2}}\right) = 5\times\left(\frac{\sqrt{1+0.16}}{\sqrt{0.16}}\right) = 5\times\sqrt{\frac{1.16}{0.16}} \Rightarrow X_\Sigma = 13.462cm \tag{67}$$

Επομένως, η ζητούμενη ταχύτητα είναι $\upsilon_\Sigma = 72\,km/h$ και το ζητούμενο πλάτος είναι $X_\Sigma = 13.462cm$.

Ερώτημα (c)

Εάν απολεσθεί το 50% της ικανότητας απόσβεσης του οχήματος, τότε η νέα σταθερά απόσβεσης c' του οχήματος θα είναι:

$$c' = 0.5c \tag{68}$$

Από την Εξ.(61), προκύπτει ότι ο λόγος απόσβεσης ζ είναι ανάλογος της σταθεράς απόσβεσης, οπότε μείωση της σταθεράς απόσβεσης κατά 50% συνεπάγεται μείωση του λόγου απόσβεσης ζ κατά 50%, οπότε ο νέος λόγος απόσβεσης ζ' θα ισούται με:

$$\zeta' = 0.5\zeta = 0.5 \times 0.2 \Rightarrow \zeta' = 0.1 \quad (69)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(66), προκύπτει:

$$X'_{\Sigma} = X_{\beta}\left(\frac{\sqrt{1+4\zeta'^2}}{\sqrt{4\zeta'^2}}\right) = 5 \times \left(\frac{\sqrt{1+4\times 0.1^2}}{\sqrt{4\times 0.1^2}}\right) = 5 \times \left(\frac{\sqrt{1+0.04}}{\sqrt{0.04}}\right) = 5 \times \left(\sqrt{\frac{1.04}{0.04}}\right) \Rightarrow$$

$$X'_{\Sigma} = 5 \times \left(\sqrt{\frac{1.04}{0.04}}\right) \Rightarrow X'_{\Sigma} = 25.495cm \quad (70)$$

Επομένως, το ζητούμενο πλάτος είναι $X'_{\Sigma} = 25.494cm$, τιμή που δηλώνει ότι το όχημα θα χάσει την επαφή με το οδόστρωμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 'Α': Υπολογισμός διαφοράς φάσης φ

Η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος είναι (βλ. Εξ.(6)):

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\underbrace{c\dot{x}_\beta+kx_\beta}_{F_\mu(t)} \qquad \text{Α.(1)}$$

Η κινηματική διέγερση είναι:

$$x_\beta(t)=X_\beta\cos(\Omega t) \qquad \text{Α.(2)}$$

Συνεπώς ισχύει:

$$\dot{x}_\beta(t)=-\Omega X_\beta\sin(\Omega t) \qquad \text{Α.(3)}$$

Η απόκριση του συστήματος είναι:

$$x(t)=X\cos(\Omega t-\varphi) \qquad \text{Α.(4)}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ.(Α.3,Α.4) στην Εξ.(Α.1), προκύπτει:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_\beta+kx_\beta \Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-\Omega cX_\beta\sin(\Omega t)+kX_\beta\cos(\Omega t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kX_\beta\left(-\Omega\left(\frac{c}{k}\right)\sin(\Omega t)+\cos(\Omega t)\right)\xrightarrow[\omega^2=(k/m)]{c=2\zeta\omega m}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kX_\beta\left(-\Omega\left(\frac{2\zeta\cancel{\omega}\cancel{m}}{\omega^{\cancel{2}}\cancel{m}}\right)\sin(\Omega t)+\cos(\Omega t)\right)\Rightarrow \qquad \text{Α.(5)}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kX_\beta\left(-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)2\zeta\sin(\Omega t)+\cos(\Omega t)\right)\xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kX_\beta\left(-2\zeta q\sin(\Omega t)+\cos(\Omega t)\right)$$

Ορίζουμε την ακόλουθη ποσότητα:

$$\tan\varphi=-2\zeta q\Rightarrow\varphi=\tan^{-1}(-2\zeta q) \qquad \text{Α.(6)}$$

Εισάγοντας την Εξ.(Α.6) στην Εξ,(Α.5), προκύπτει:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kX_\beta\left(\tan\varphi\sin(\Omega t)+\cos(\Omega t)\right)=kX_\beta\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin(\Omega t)+\cos(\Omega t)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\left(\frac{kX_\beta}{\cos\varphi}\right)\left(\sin\varphi\sin(\Omega t)+\cos\varphi\cos(\Omega t)\right)\Rightarrow \qquad \text{Α.(7)}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\left(\frac{kX_\beta}{\cos\varphi}\right)\cos(\Omega t-\varphi)$$

Από την τριγωνομετρία, γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\Rightarrow\left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)+1=\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\Rightarrow\tan^2\varphi+1=\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)=1+\tan^2\varphi\xrightarrow{\tan\varphi=-2\zeta q}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)=1+(2\zeta q)^2\Rightarrow\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)=\sqrt{1+(2\zeta q)^2} \qquad \text{Α.(8)}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Α.7,Α.8) δίδει:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kX_\beta\sqrt{1+(2\zeta q)^2}\cos(\Omega t-\varphi) \qquad \text{Α.(9)}$$

Αδιαστατοποιώντας την Εξ.(Α.9), προκύπτει:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = X_\beta \left(\frac{k}{m}\right)\sqrt{1+\left(2\zeta q\right)^2}\cos\left(\Omega t - \varphi\right) \qquad \text{A.(10)}$$

Το δεξί μέλος της Εξ.(Α.9) γράφεται και ως εξής:

$$F_\mu\left(t\right) = \underbrace{X_\beta \left(\frac{k}{m}\right)\sqrt{1+\left(2\zeta q\right)^2}}_{F_{\mu,o}}\cos\left(\Omega t - \varphi\right) \qquad \text{A.(11)}$$

Με άλλα λόγια, είναι δυνατόν να γράψουμε την κινηματική διέγερση ως αρμονικό όρο, εάν ορίσουμε τη διαφορά φάσης φ όπως περιγράφεται τόσο στην Εξ.(8) όσο και στην Εξ.(Α.6).