

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ**

**ΜΗΧΑΝΩΝ**

**Ι**

**Copyright © ΕΜΠ - Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών - Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών - 2010.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.**

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

## Εκπαιδευτική Ενότητα 5<sup>η</sup> Μελέτη απόκρισης συστήματος σε αρμονική διέγερση με ανάλυση Fourier

### Εισαγωγικά στοιχεία

Στα προηγούμενα μαθήματα ασχοληθήκαμε με την απόκριση ενός δυναμικού συστήματος  $m - c - k$  ενός βαθμού ελευθερίας, όταν σε αυτό ασκείται εξωτερική αρμονική διέγερση. Τα βασικότερα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε είναι τα εξής:

- Η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος, στη μόνιμη απόκριση, ισούται με τη συχνότητα ταλάντωσης του διεγέρτη.
- Το πλάτος της μόνιμης απόκρισης είναι δυνατόν να είναι μικρότερο, ίσο ή και πολύ μεγαλύτερο της στατικής μετατόπισης (θεωρώντας στατική διέγερση), ανάλογα με την τιμή του λόγου  $q$  και την τιμή του λόγου απόσβεσης  $\zeta$  του συστήματος.

Επίσης, εξετάσαμε δύο βασικά τεχνολογικά παραδείγματα. Στο πρώτο παράδειγμα, μελετήσαμε τον τρόπο με τον οποίο μία περιστρεφόμενη αζυγοστάθμητη μάζα προκαλεί αρμονική διέγερση σε μία μηχανή. Στο δεύτερο παράδειγμα, γνωρίσαμε τον μηχανισμό μέσω του οποίου η επιβολή μίας κινηματικής διέγερσης στη βάση μίας μηχανής προκαλεί αρμονική διέγερση της μηχανής. Και στα δύο παραδείγματα, η διέγερση ήταν αρμονικής μορφής. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλα είδη διεγέρσεων. Πιο συγκεκριμένα, μία πρώτη κατηγοριοποίηση των διεγέρσεων είναι η εξής:

- Περιοδικές διεγέρσεις: πρόκειται για διεγέρσεις, οι οποίες επαναλαμβάνονται χρονικά με πανομοιότυπο τρόπο. Σε αυτήν την κατηγορία, ο πλέον χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος είναι η αρμονική διέγερση, ενώ το πλέον χαρακτηριστικό τεχνολογικό παράδειγμα είναι οι περιστρεφόμενες μηχανές με σταθερές στροφές λειτουργίας, όπως είναι οι μηχανές ηλεκτροπαραγωγής. Οι συγκεκριμένες μηχανές λειτουργούν σε σταθερές στροφές διότι πρέπει να παράξουν ρεύμα σταθερής συχνότητας. Σημειώνεται ότι όλες οι περιοδικές διεγέρσεις είναι δυνατόν να αναχθούν σε αρμονικές διεγέρσεις αξιοποιώντας την ανάλυση Fourier.
- Μεταβατικές διεγέρσεις: πρόκειται για διεγέρσεις, οι οποίες επιβάλλονται σταδιακά ή απότομα σε μία μηχανή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της κατηγορίας είναι η επιβολή ενός κρουστικού φορτίου σε μία κατασκευή, ή η απότομη διακοπή της λειτουργίας μίας μηχανής.
- Τυχαίες διεγέρσεις (ή, ισοδύναμα, στοχαστικές διεγέρσεις): πρόκειται για διεγέρσεις, η μορφή των οποίων καθορίζεται από υψηλό ποσοστό τυχαιότητας, δηλαδή η εμφάνισή τους δεν ακολουθεί κάποιον, γνωστό σε εμάς, αιτιοκρατικό κανόνα. Σε αυτήν την κατηγορία, υπάρχει πλήθος χαρακτηριστικών παραδειγμάτων, όπως είναι ο σεισμός, τα καιρικά φαινόμενα, ο κυματισμός της θάλασσας, η διαμόρφωση του οδοστρώματος, κοκ. Πιο συγκεκριμένα και αναφερόμενοι στο σεισμό, κάθε **συγκεκριμένος** σεισμός αποτελεί μία μεταβατική διέγερση, την επιτάχυνση της οποίας (επιτάχυνση του εδάφους) είμαστε σε θέση να μετρήσουμε. Ωστόσο, η καταμέτρηση ενός ή περισσότερων σεισμών δεν αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου να προλέξουμε ακριβώς την χρονική μορφή ενός μελλοντικού σεισμού. Με άλλα λόγια, οι σεισμικές διεγέρσεις, **ως σύνολο**,

δεν ξέρουμε τι θα περιέχουν. Εκείνο, λοιπόν, που μπορεί να κάνει ο Μηχανικός είναι, βάσει της καταγεγραμμένης σεισμικής δραστηριότητας, να εξαγάγει βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά, τα οποία θα χρησιμοποιήσει προκειμένου να μελετήσει την επάρκεια μίας κατασκευής έναντι σεισμού. Όσον αφορά στον κυματισμό της θάλασσας, ένα πλοίο, εν μέσω κακοκαιρίας, ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας του εξ αιτίας των κυμάτων. Κάθε **συγκεκριμένο** κύμα αποτελεί μία μεταβατική διέγερση. Ωστόσο, εάν θέλουμε να μελετήσουμε **στατιστικά** ένα πλοίο σε τρικυμία, θα πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πλοίου στο **σύνολο** των κυμάτων. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να μελετήσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά του κυματισμού της θάλασσας. Τέτοια χαρακτηριστικά αποτελούν το ύψος των κυμάτων, η απόσταση των διαδοχικών κυμάτων και η συχνότητα διαδοχικών κυμάτων. Μέσω αυτών των χαρακτηριστικών, είναι δυνατόν να περιγράψουμε έναν τυχαίο κυματισμό. Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μελέτη της ανάρτησης των οχημάτων. Βασικό στοιχείο σε μία τέτοια μελέτη αποτελεί η κυματομορφή του οδοστρώματος. Ωστόσο, κάθε οδόστρωμα έχει τη δική του κυματομορφή και επειδή δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε το σύνολο των δρόμων της γης, άρα και τις αντίστοιχες κυματομορφές, πρέπει, με κάποιον τρόπο, να αντλήσουμε επαρκή στοιχεία προκειμένου να λύσουμε το τεχνολογικό πρόβλημα της σχεδίασης των αναρτήσεων των οχημάτων. Αυτός ο τρόπος είναι η χρήση κοινών στατιστικών στοιχείων των οδοστρωμάτων. Σε αυτό το σημείο διευκρινίζεται ότι κάθε τυχαία διέγερση είναι δυνατόν, μέσω της ανάλυσης φάσματος, να αναχθεί σε ένα σύνολο αρμονικών διεγέρσεων.

Στο πλαίσιο του μαθήματος ‘Δυναμική Μηχανών Ι’ θα γνωρίσουμε καλύτερα τις περιοδικές και τις μεταβατικές διεγέρσεις, ενώ οι τυχαίες διεγέρσεις θα εξετασθούν στο πλαίσιο του μαθήματος ‘Δυναμική Μηχανών ΙΙ’. Διευκρινίζεται ότι η απόκριση σε αρμονική διέγερση αποτελεί τη βάση με την οποία αναλύουμε όχι μόνον τις περιοδικές διεγέρσεις αλλά και το σύνολο της δυναμικής συμπεριφοράς των μηχανών.

### **Ανάλυση περιοδικής συνάρτησης κατά Fourier**

Μία περιοδική συνάρτηση περιγράφεται από την ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$f(t) = f(t + T_p) \quad (1)$$

όπου  $t$  είναι η ελεύθερη μεταβλητή και  $T_p$  είναι η περίοδος. Βάσει της ανάλυσης Fourier, η περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$f(t) = f(t + T) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\Omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\Omega_n t) \quad (2)$$

Η συχνότητες  $\Omega_n$  των όρων του αναπτύγματος αποτελούν ακέραια πολλαπλάσια μίας συχνότητας  $\Omega$ , η οποία καλείται **βασική συχνότητα**. Με άλλα λόγια, ισχύει:

$$\Omega_n = n\Omega \quad (3)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(2,3) δίδει:

$$f(t) = f(t+T) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t) \quad (4)$$

Η, δε, βασική συχνότητα ορίζεται ως:

$$\Omega = \left( \frac{2\pi}{T_p} \right) \quad (5)$$

όπου  $T_p$  είναι η περίοδος επανάληψης. Οι συντελεστές  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$  ορίζονται ως εξής:

$$a_0 = \left( \frac{1}{T_p} \right) \int_0^{T_p} f(t) dt \quad a_n = \left( \frac{2}{T_p} \right) \int_0^{T_p} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \left( \frac{2}{T_p} \right) \int_0^{T_p} f(t) \sin(n\Omega t) dt \quad (6)$$

Η φυσική σημασία των ανωτέρω παραστάσεων είναι αρκετά ενδιαφέρουσα. Πιο συγκεκριμένα, η Εξ.(4) πληροφορεί τον τρόπο με τον οποίο μία περιοδική διέγερση είναι δυνατόν να εκφραστεί ως υπέρθεση αρμονικών διεγέρσεων. Με άλλα λόγια, εάν σε μία κατασκευή ασκείται μία περιοδική διέγερση, τότε αυτό είναι ισοδύναμο με την άσκηση μίας επαλληλίας αρμονικών διεγέρσεων, οι συχνότητες των οποίων είναι πολλαπλάσιες της βασικής συχνότητας  $\Omega$ . Οι συντελεστές  $a_n$  πληροφορούν σχετικά με το βαθμό ομοιότητας της συνάρτησης  $f$  με συνημίτονο, ενώ οι συντελεστές  $b_n$  πληροφορούν σχετικά με το βαθμό ομοιότητας της συνάρτησης  $f$  με ημίτονο.

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ

Η μαθηματική ερμηνεία των ανωτέρω παραστάσεων είναι, επίσης, αρκετά ενδιαφέρουσα. Πιο συγκεκριμένα, εάν θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$  ως διάνυσμα σε ένα χώρο συναρτήσεων και επίσης θεωρήσουμε μία βάση του χώρου από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο, τότε η σειρά Fourier αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο η συνάρτηση  $f$  περιγράφεται συναρτήσεως της εν λόγω βάσης (ή, ισοδύναμα, περιγράφει τις προβολές της συνάρτησης  $f$  στο σύστημα βάσης). Οι, δε, συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  αποτελούν τα εσωτερικά γινόμενα της συνάρτησης  $f$  με τις συναρτήσεις βάσης.

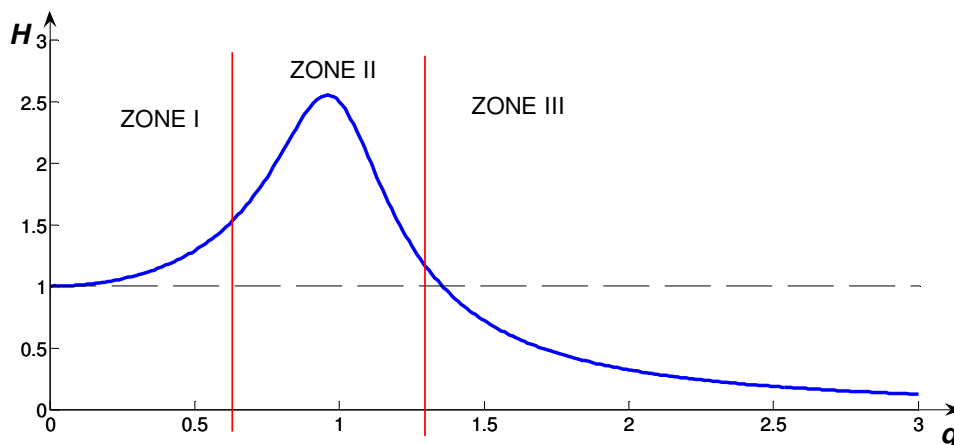
Σημειώνεται ότι η ενασχόληση με την ανάλυση Fourier, στην παρούσα φάση, αποσκοπεί και στην εξοικείωση με έννοιες, τις οποίες θα συναντήσουμε σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, όταν θα εξετάσουμε την ανάλυση σε ιδιοανύσματα (ισοδύναμα, ανάλυση σε ιδιοδιανύσματα). Η ιδιοανυσματική ανάλυση αποτελεί μία τεχνική, η οποία χρησιμοποιείται σε ευρύτατο φάσμα τεχνολογικών εφαρμογών.

Εκτός των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου, υπάρχει πλήθος άλλων συναρτήσεων, τις οποίες είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να αναπτύξουμε μία συνάρτηση σε

σειρά. Μία σύγχρονη προσέγγιση του θέματος αποτελούν οι λεγόμενες ‘συναρτήσεις κυματιδίων’ (wavelets), με τις οποίες είναι δυνατόν να περιγράψουμε και μεταβατικά φαινόμενα. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι συναρτήσεις κυματιδίων χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε τεχνολογικές εφαρμογές με μεταβατικές διεγέρσεις.

Αναφορικά με την αξιοποίηση της ανάλυσης Fourier σε προβλήματα δυναμικής, έστω το γνωστό, πλέον, μονοβάθμιο σύστημα  $m-c-k$  και έστω ότι θέλουμε να καταγράψουμε τη **μόνιμη** απόκρισή του σε σειρά Fourier. Όπως φαίνεται και από την Εξ.(2), αρκεί να εκτιμήσουμε την απόκριση του συστήματος σε κάθε μία από τις αρμονικές διεγέρσεις του αναπτύγματος Fourier και στο τέλος να αθροίσουμε τις επί μέρους συνεισφορές.

Μία πολύ βασική παρατήρηση σχετικά με την ανάπτυξη μίας συνάρτησης κατά Fourier αφορά στο πλήθος των απαιτούμενων όρων της σειράς. Από μαθηματικής απόψεως, απαιτείται ένα άπειρο πλήθος όρων (βλ. Εξ.(2)). Ωστόσο, από την οπτική γωνία του Μηχανικού και για τεχνολογικές εφαρμογές, απαιτείται μόνον ένα μικρό πλήθος τέτοιων όρων, προκειμένου να διαμορφωθεί μία αποδεκτή προσέγγιση της συνάρτησης (δηλαδή μία προσέγγιση στην οποία θα συμμετέχουν μόνον όροι με ουσιαστική συμβολή). Αυτό καθίσταται κατανοητό με τη βοήθεια του διαγράμματος ( $\mathbb{H}$  vs  $q$ ), δηλαδή του διαγράμματος Συντελεστού Δυναμικής Διέγερσης συναρτήσεως του λόγου  $q$  (βλ. Σχήμα 1 & Εκπαιδευτική Ενότητα 03 / Σχήμα 12).

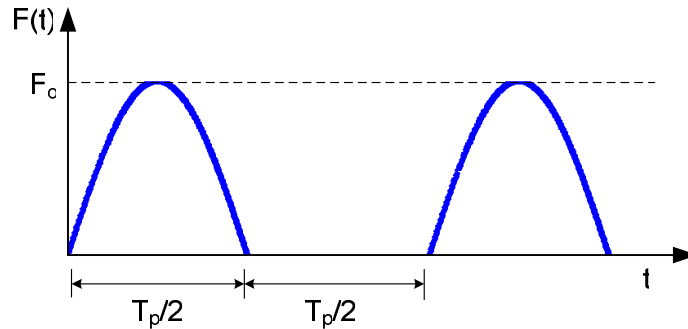


**Σχήμα 1:** Γραφική παράσταση του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης  $\mathbb{H}$  συναρτήσεως του λόγου  $q$

Από το Σχήμα 1 προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος  $q$ , δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα της διέγερσης από την φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος, τόσο μικρότερο είναι το πλάτος της απόκρισης του συστήματος. Συνεπώς, η συμβολή των αρμονικών υψηλότερας τάξεως (δηλαδή, των αρμονικών που σχετίζονται με υψηλές συχνότητες διέγερσης) στην απόκριση των κατασκευών καθίσταται πολύ μικρή, άρα, από τεχνικής απόψεως, είναι δυνατόν να αμελήσουμε όρους της σειράς Fourier, στους οποίους εμπλέκονται οι εν λόγω αρμονικές (αρμονικές με αμελητέα συμβολή).

### Εφαρμογή

Έστω η συνάρτηση  $F(t)$  του Σχήματος 2, δηλαδή έστω μία ημιτονοειδής συνάρτηση, στην οποία διατηρείται μόνον το θετικό τμήμα.



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της εξεταζόμενης συνάρτησης  $F(t)$

Η μαθηματική εξίσωση της συνάρτησης  $F(t)$  είναι:

$$F(t) = \begin{cases} F_o \sin(\Omega t) & 0 \leq t \leq T_p/2 \\ 0 & T_p/2 < t \leq T_p \end{cases} \quad (7)$$

Επίσης, έστω ότι η συνάρτηση  $F(t)$  απεικονίζει τη **διέγερση** ενός συστήματος, η φυσική ιδιοσυχνότητα του οποίου έστω ότι, για τις ανάγκες του παραδείγματος, ισούται με:

$$\omega = \left( \frac{8\pi}{3T_p} \right) \quad (8)$$

Ομοίως για λόγους απλότητας του παραδείγματος, έστω ότι το σύστημα χαρακτηρίζεται από μηδενική σταθερά απόσβεσης, δηλαδή έστω ότι ισχύει<sup>1</sup>:

$$c = 0 \quad (9)$$

Ζητείται η **μόνιμη απόκριση** του συστήματος σε ανάπτυγμα κατά Fourier και με επαρκές, για τεχνολογικούς σκοπούς, πλήθος όρων.

### Λύση

**Βήμα 1:** Περιγραφή εξωτερικής διέγερσης  $F(t)$  ως ανάπτυγμα Fourier

Από την Εξ.(4), θα είναι:

$$F(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t) \quad (10)$$

<sup>1</sup> Στην πράξη, πάντοτε υπάρχει απόσβεση, η οποία συμμετέχει μόνο στη **μεταβατική** απόκριση του συστήματος. Η επίδραση της απόσβεσης, είτε ως υπερκρίσιμη είτε ως υποκρίσιμη επίδραση, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα θα πάψει να υπάρχει. Συνεπώς, στη μόνιμη απόκριση δεν υπάρχει συμμετοχή της απόσβεσης.

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $a_o$ ,  $a_n$  και  $b_n$  για διάφορες τιμές του μετρητή  $n$ . Από την Εξ.(6), με χρήση τυπολογίου, μετά από αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων, προκύπτει:

$$a_o = \left(\frac{1}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F(t) dt = \left(\frac{1}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t) dt = \left(\frac{F_o}{\pi}\right) \quad (11)$$

$$a_n = \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F(t) \cos(n\Omega t) dt = \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t) \cos(n\Omega t) dt = \begin{cases} 0 & n: \text{περιττός} \\ \left(\frac{2}{1-n^2}\right) \frac{F_o}{\pi} & n: \text{άρτιος} \end{cases} \quad (12)$$

$$b_n = \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F(t) \sin(n\Omega t) dt = \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t) \sin(n\Omega t) dt = \begin{cases} \frac{F_o}{\pi}, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} \quad (13)$$

Οι τιμές των συντελεστών  $a_o$ ,  $a_n$  και  $b_n$  για διάφορα  $n$  φαίνονται στον Πίνακα 1.

**Πίνακας 1:** Συντελεστές αναπτύγματος Fourier

$n$	$a_o$	$a_n$	$b_n$	$\left(\frac{a_2}{a_{n+2}}\right)$
0	$\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	-----	-----	-----
1	-----	0	$\left(\frac{F_o}{2}\right)$	-----
2	-----	$-\left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0.667\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	0	-----
3	-----	0	0	-----
4	-----	$-\left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{2}{15}\right) \approx -0.133\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	0	5.015
5	-----	0	0	-----
6	-----	$-\left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{2}{35}\right) \approx -0.0571\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	0	11.681
7	-----	0	0	-----
8	-----	$-\left(\frac{F_o}{\pi}\right)\left(\frac{2}{65}\right) \approx -0,03077\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	0	21.676

Από τον Πίνακα 1, παρατηρούμε ότι για  $n > 6$ , υπάρχει διαφορά μίας τάξης μεγέθους μεταξύ των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier για  $n=2$  και  $n=8$ , οπότε όροι με  $n > 6$  έχουν αμελητέα συνεισφορά. Συνεπώς, το ζητούμενο ανάπτυγμα προκύπτει αντικαθιστώντας στην Εξ.(10) τις τιμές του Πίνακα 1, μέχρι και τον όρο  $n=6$ :



$$F(t) = \left( \frac{F_o}{\pi} + \frac{F_o}{2} \sin(\Omega t) - \frac{2F_o}{3\pi} \cos(2\Omega t) - \frac{2F_o}{15\pi} \cos(4\Omega t) - \frac{2F_o}{3\pi} \cos(6\Omega t) \right) \quad (14)$$

Ισοδύναμα, ισχύει:

$$F(t) = F_o \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(\Omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(2\Omega t) - \frac{2}{15\pi} \cos(4\Omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(6\Omega t) \right) \quad (15)$$

Όπως φαίνεται και από την Εξ.(15), τελικά, από την οπτική γωνία του Μηχανικού, χρειαζόμαστε μόνον τις τέσσερις αρμονικές ( $\Omega$ ,  $2\Omega$ ,  $4\Omega$ ,  $6\Omega$ ) για την περιγραφή της  $F(t)$ , και όχι άπειρο πλήθος αρμονικών, όπως υπαγορεύει η οπτική γωνία των μαθηματικών.

Από το Βήμα 1, περιγράψαμε την εξωτερική διέγερση  $F(t)$  ως:

$$F(t) = F_o \left( \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\beta_1} \sin(\Omega t) - \underbrace{\frac{2}{3\pi}}_{\alpha_2} \cos(2\Omega t) - \underbrace{\frac{2}{15\pi}}_{\alpha_4} \cos(4\Omega t) - \underbrace{\frac{2}{3\pi}}_{\alpha_6} \cos(6\Omega t) \right) \quad (16)$$

δηλαδή, ως ανάπτυγμα μίας σειράς Fourier, στην οποία συμμετέχει μικρό πλήθος όρων (συνολικά, πέντε όροι). Ειδικότερα, ο πρώτος όρος της σειράς είναι μία σταθερή ποσότητα, ενώ οι υπόλοιποι τέσσερις όροι είναι αρμονικές ποσότητες. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογισθεί, **για κάθε** έναν όρο του αναπτύγματος (συνιστώσα διέγερσης), η αντίστοιχη συνιστώσα της **μόνιμης** απόκρισης του συστήματος (συνιστώσα απόκρισης).

### Βήμα 2: Υπολογισμός επί μέρους συνιστωσών απόκρισης

Όπως έχει ειπωθεί σε προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03):

- η **μόνιμη απόκριση** ενός συστήματος, υπό την επιβολή μίας **χρονικά σταθερής δύναμης**  $F_{ST}$  (στατική διέγερση), είναι χρονικά σταθερή (**στατική απόκριση**) και ισούται με:

$$X_{ST} = \left( \frac{F_{ST}}{k} \right) \quad (17)$$

- η **μόνιμη απόκριση** ενός συστήματος, υπό την επιβολή μίας **αρμονικής διέγερσης**  $F_n \cos(\Omega_n t)$  με συχνότητα διέγερσης  $\Omega_n$ , είναι **αρμονικής** μορφής με ιδιοσυχνότητα  $\Omega_n$ , δηλαδή ίσης με αυτήν της διεγείρουσας δύναμης, και ισούται με:

$$x_n = X_n \cos(\Omega_n t - \vartheta_n) \quad (18)$$

όπου  $X_n$  είναι το πλάτος της ταλάντωσης και  $\vartheta_n$  είναι η διαφορά φάσης μεταξύ διέγερσης και απόκρισης, ίσης προς (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Πίνακας 3):

$$\vartheta_n = \tan^{-1} \left( \frac{-2\zeta\omega\Omega_n}{\omega^2 - \Omega_n^2} \right) \xrightarrow{q_n = \left( \frac{\Omega_n}{\omega} \right)} \vartheta_n = \tan^{-1} \left( \frac{-2\zeta q_n}{1 - q_n^2} \right) \quad (19)$$

Σχετικά με τον υπολογισμό του πλάτους ταλάντωσης  $X_n$ , ήδη γνωρίζουμε, από το ορισμό του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης  $\mathbb{H}$  (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.20), ότι ισχύει:

$$\mathbb{H} = \left( \frac{X}{X_{st}} \right) \Rightarrow X = \mathbb{H} X_{st} \quad (20)$$

Η Εξ.(20) ισχύει όταν στο σύστημα επιβληθεί μία εξωτερική αρμονική διέγερση. Όταν, ωστόσο, επιβληθούν περισσότερες εξωτερικές αρμονικές διεγέρσεις, τότε θα πρέπει να γραφεί η Εξ.(20) για κάθε μία από τις διεγέρσεις αυτές. Συνεπώς, για τον  $n$ -οστή αρμονική διέγερση του αναπτύγματος της  $F(t)$  θα είναι:

$$X_n = \mathbb{H}_n X_{ST,n} \quad (21)$$

Στην Εξ.(21), το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος  $X_{ST,n}$  οφείλεται στην επιβολή της στατικής δύναμης  $F_{ST,n}$ , η οποία οφείλεται στη  $n$ -οστή αρμονική διέγερση του αναπτύγματος της  $F(t)$  και αριθμητικά ισούται με το πλάτος  $F_n$  της διέγερσης αυτής. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το πλάτος  $X_n$  πρέπει να υπολογίσουμε το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος  $X_{ST,n}$  και το Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης  $\mathbb{H}_n$ .

Για τον υπολογισμό του Ισοδύναμου Στατικού Πλάτους  $X_{ST,n}$ , παρατηρούμε ότι (βλ.Εξ.(16)):

$$F_1 = (1/2) F_o \xrightarrow{\alpha_1=(1/2)} F_1 = \alpha_1 F_o \quad (22)$$

$$F_2 = (-2/3\pi) F_o \xrightarrow{\alpha_2=(-2/3\pi)} F_2 = \alpha_2 F_o \quad (23)$$

$$F_4 = (-2/15\pi) F_o \xrightarrow{\alpha_4=(-2/15\pi)} F_4 = \alpha_4 F_o \quad (24)$$

$$F_6 = (-2/35\pi) F_o \xrightarrow{\alpha_6=(-2/35\pi)} F_6 = \alpha_6 F_o \quad (25)$$

Από τις Εξ.(22,23,24,25) είναι φανερό ότι η στατική δύναμη  $F_{ST,n}$  γράφεται ως εξής:

$$F_{ST,n} = F_n = \alpha_n F_o \quad (26)$$

Συνεπώς, το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος  $X_{ST,n}$ , το οποίο οφείλεται στην επιβολή μίας στατικής δύναμης  $F_{ST,n}$ , ισούται με:

$$X_{ST,n} = \frac{F_{ST,n}}{k} = \frac{\alpha_n F_o}{k} \xrightarrow{X_{ST}=(F_o/k)} X_{ST,n} = \alpha_n X_{ST} \quad (27)$$

Για τον υπολογισμό του Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης  $\mathbb{H}$ , ήδη γνωρίζουμε ότι ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.21):

$$\mathbb{H}_n = \frac{1}{\sqrt{(1-q_n^2)^2 + (2\zeta q_n)^2}} \quad (28)$$

Για μηδενικό λόγο απόσβεσης  $\zeta$ , όπως στην εξεταζόμενη περίπτωση, ισχύει:

$$\mathbb{H}_n = \frac{1}{\sqrt{(1-q_n^2)^2}} \quad (29)$$

Για κάθε έναν όρο του αναπτύγματος της  $F(t)$ , ο λόγος  $q_n$ , εξ ορισμού, θα είναι:

$$q_n = \left( \frac{\Omega_n}{\omega} \right) \quad (30)$$

Ωστόσο, από την εκφώνηση δίδεται ότι ισχύει (βλ. και Εξ.(8)):

$$\omega = \left( \frac{8\pi}{3T_p} \right) \quad (31)$$

Επίσης, από την εκφώνηση δίδεται ότι ισχύει:

$$\Omega_n = n\Omega \quad (32)$$

Εξ ορισμού, δε, για την ιδιοσυχνότητα  $\Omega$  ισχύει:

$$\Omega = \left( \frac{2\pi}{T_p} \right) \quad (33)$$

Ο συνδυασμός των Εξ(30,31,32,33), δίδει:

$$q_n = \left( \frac{\Omega_n}{\omega} \right) = \left( \frac{n\Omega}{\omega} \right) = \left( \frac{n \left( \frac{2\pi}{T_p} \right)}{\left( \frac{8\pi}{3T_p} \right)} \right) = n \left( \frac{6}{8} \right) \Rightarrow q_n = 0.75n \quad (34)$$

### Σύνοψη Διαδικασίας

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε στην ακόλουθη διαδικασία υπολογισμού:

- Γράφουμε την εξωτερική διέγερση του συστήματος στη μορφή της Εξ.(16), η οποία επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου:

$$F(t) = F_o \left( \underbrace{\frac{1}{\alpha_0}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_1}} \sin(\Omega t) - \underbrace{\frac{2}{\alpha_2}} \cos(2\Omega t) - \underbrace{\frac{2}{\alpha_4}} \cos(4\Omega t) - \underbrace{\frac{2}{\alpha_6}} \cos(6\Omega t) \right) \quad (35)$$

όπου οι συντελεστές  $\alpha_n$  είναι αυτοί που σημειώνονται στην Εξ.(35).

- Για τον **σταθερό** όρο του αναπτύγματος της Εξ.(35):
  - αναγνωρίζουμε στην εν λόγω εξίσωση την αντίστοιχη στατική δύναμη  $F_{ST}$  (στην εξεταζόμενη εφαρμογή είναι  $F_{ST} = (F_o/\pi)$ ),
  - υπολογίζουμε την αντίστοιχη σταθερή απόκριση από την Εξ.(17) (στην εξεταζόμενη εφαρμογή είναι  $X_{ST} = (F_{ST}/k) = (F_o/\pi k)$ ).
- Για κάθε **αρμονικό** όρο του αναπτύγματος της Εξ.(35):
  - αναγνωρίζουμε στην εν λόγω εξίσωση τον αντίστοιχο συντελεστή  $\alpha_n$ ,
  - εκτιμούμε το πλάτος της αρμονικής δύναμης  $F_n$  από τις Εξ.(26,35),
  - εντοπίζουμε την αντίστοιχη συχνότητα διέγερσης  $\Omega_n$  από την Εξ.(35),
  - υπολογίζουμε το λόγο  $q_n$  από την Εξ.(34),
  - υπολογίζουμε το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος  $X_{ST}$  από την Εξ.(27),
  - υπολογίζουμε το Συντελεστή Δυναμικής Διέγερσης  $\mathbb{H}$  από την Εξ.(28),
  - υπολογίζουμε το πλάτος της απόκρισης  $X_n$  από την Εξ.(21), και
  - υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης  $\vartheta_n$  από την Εξ.(19).

Με βάση τα προαναφερθέντα, σχηματίζεται ο Πίνακας 1.

**Πίνακας 1:** Στοιχεία για τον υπολογισμό αρμονικών συνιστωσών απόκρισης

$n$	$\alpha_n$	$X_{ST,n} = \alpha_n \left( \frac{F_o}{k} \right)$	$q_n = \left( \frac{n\Omega}{\omega} \right)$	$\mathbb{H}$	$X_n = \mathbb{H}_n X_{ST,n}$	$\vartheta_n$
1	$\left( \frac{1}{2} \right)$	$\left( \frac{1}{2} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	0.75	$\left( \frac{16}{7} \right)$	$\left( \frac{8}{7} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	0
2	$\left( -\frac{2}{3\pi} \right)$	$\left( -\frac{2}{3\pi} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	1.50	$\left( \frac{4}{5} \right)$	$\left( -\frac{8}{15\pi} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	180°
4	$\left( -\frac{2}{15\pi} \right)$	$\left( -\frac{2}{15\pi} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	3.00	$\left( \frac{1}{8} \right)$	$\left( -\frac{1}{60\pi} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	180°
6	$\left( -\frac{2}{35\pi} \right)$	$\left( -\frac{2}{35\pi} \right) \times \left( \frac{F_o}{k} \right)$	4.50	~ 0	~ 0	180°

Με βάση τον Πίνακα 1, ο λόγος των συντελεστών για τα πλάτη  $X_{n=2}$  και  $X_{n=4}$  είναι:

$$\left( \frac{\left( \frac{8}{15\pi} \right)}{\left( \frac{1}{60\pi} \right)} \right) = \frac{\left( \frac{8}{15\pi} \right)}{\left( \frac{1}{60\pi} \right)} = 32 \quad (36)$$

Αυτό σημαίνει ότι η συμβολή του όρου  $n=4$  είναι 32 φορές μικρότερη από τη συμβολή του όρου  $n=6$ , οπότε από τεχνολογικής απόψεως, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι η συμβολή των όρων με  $n \geq 4$  είναι αμελητέα.

Πιο λεπτομερής ανάλυση σχετικά με τους υπολογισμούς των μεγεθών του Πίνακα 1 παρατίθεται στο Παράρτημα 'Β'.

**Βήμα 3:** Άθροιση όλων των επί μέρους συνιστωσών απόκρισης του Βήματος 2

Η **συνολική μόνιμη** απόκριση  $x(t)$  του συστήματος γράφεται ως εξής:

$$x(t) = X_{ST} + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \vartheta_n) \quad (37)$$

όπου  $X_{ST}$  είναι η απόκριση που οφείλεται στο σταθερό όρο του αναπτύγματος  $F(t)$  (βλ. Εξ.(16), 1<sup>ος</sup> όρος),  $X_n$  είναι το πλάτος της ταλάντωσης που προκαλείται από τον  $n$ -οστό όρο του αναπτύγματος της  $F(t)$  και  $\vartheta_n$  είναι η αντίστοιχη διαφορά φάσης. Μία **προσέγγιση** για τη **συνολική μόνιμη** απόκριση  $x(t)$  του συστήματος βρίσκεται αθροίζοντας τις επί μέρους αποκρίσεις του Βήματος 2. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις Εξ.(17,18), καθώς και τον Πίνακα 1, προκύπτει (αμελώντας όρους μικρής συμμετοχής):

$$x(t) \approx X_{ST} + X_1 \sin(\Omega t - \vartheta_1) + X_4 \cos(4\Omega t - \vartheta_4) \quad (38)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(38) με στοιχεία από τον Πίνακα 1, προκύπτει:

$$x(t) = \left( \left( \frac{F_o}{\pi k} \right) + \left( \frac{8}{7} \right) \left( \frac{F_o}{k} \right) \sin(\Omega t - 0) - \left( \frac{8}{15\pi} \right) \left( \frac{F_o}{k} \right) \cos(2\Omega t - \pi) \right) \quad (39)$$

Από την τριγωνομετρία, είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$\cos(a - \pi) = -\cos(a) \quad (40)$$

Από το συνδυασμό των Εξ.(39,40), μετά από εκτέλεση πράξεων, προκύπτει ότι η προσέγγιση για τη **συνολική μόνιμη** απόκριση  $x(t)$  του εξεταζομένου συστήματος ισούται με:

$$x(t) = \left( \frac{F_o}{k} \right) \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \right) + \left( \frac{8}{7} \right) \sin(\Omega t) + \left( \frac{8}{15\pi} \right) \cos(2\Omega t) \right\} \quad (41)$$

Από την Εξ.(41), καθίσταται φανερό ότι η απόκριση  $x(t)$  είναι μία σύνθεση αρμονικών ταλαντώσεων γύρω από τη θέση, η οποία καθορίζεται από τον σταθερό όρο του αναπτύγματος  $F(t)$  (βλ. Εξ. 16, 1<sup>ος</sup> όρος).

### Παρατηρήσεις

1. Από την Εξ.(41) προκύπτει ότι, από τεχνολογικής απόψεως, τελικά χρειάζονται μόνον τρεις όροι για την περιγραφή της συνολικής μόνιμης απόκρισης  $x(t)$ , σε αντίθεση με την μαθηματική προσέγγιση, η οποία απαιτεί τη χρήση απείρου πλήθους όρων.

- Ο σταθερός όρος  $a_0$  στην Εξ.(10) εκφράζει μία Ισοδύναμη Στατική Φόρτιση, δηλαδή είναι ο μέσος όρος της δύναμης, η οποία ασκείται στο σύστημα κατά τη διάρκεια του εξεταζόμενου χρονικού διαστήματος.
- Από την τριγωνομετρία, είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$\sin(a) = \cos(a + \pi/2) \quad (42)$$

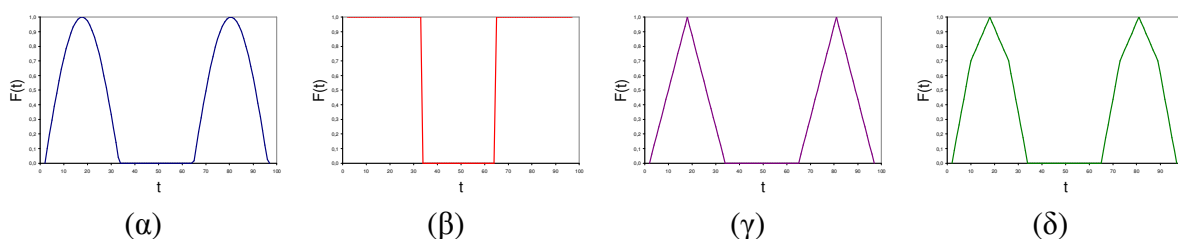
Με άλλα λόγια, μεταξύ της συνάρτησης ημίτονο και της συνάρτησης συνημίτονο υπάρχει διαφορά φάσης ( $\pi/2$ ), συνεπώς κάθε ημιτονοειδής ποσότητα γράφεται ως συνημιτονοειδής και αντίστροφα. Συνεπώς, για τον ημιτονοειδή όρο του αναπτύγματος της  $F(t)$ , η διέγερση είναι της μορφής:

$$F_1 \sin(\Omega t) = F_1 \cos(\Omega t + \pi/2) \quad (43)$$

και η αντίστοιχη απόκριση είναι:

$$X_1 \cos(\Omega t + \pi/2 - \vartheta_1) = X_1 \cos(\Omega t - \vartheta_1 + \pi/2) = X_1 \sin(\Omega t - \vartheta_1) \quad (44)$$

- Δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποιο είναι το πλήθος των όρων που απαιτούνται για την επαρκή ανάπτυξη μίας συνάρτησης  $F(t)$  κατά Fourier. Ωστόσο, το απαιτούμενο πλήθος όρων σχετίζεται με το βαθμό ομοιότητας της συνάρτησης  $F(t)$  με τη συνάρτηση ημίτονο (ή, ισοδύναμα, με τη συνάρτηση συνημίτονο). Συνεπώς, όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η ομοιότητα, τόσο λιγότεροι όροι απαιτούνται. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις του Σχήματος 3. Μεταξύ αυτών, διαισθητικά, εκτιμούμε ότι η συνάρτηση του Σχήματος (3β) απαιτεί τους περισσότερους όρους, ενώ η συνάρτηση του Σχήματος (3α) απαιτεί τους λιγότερους όρους, μεταξύ των εν λόγω συναρτήσεων, για την ανάπτυξη κατά Fourier.



**Σχήμα 3:** Θετικά ορισμένες συναρτήσεις  $F(t)$ : (α) ημιτονοειδής παλμός, (β) τετραγωνικός παλμός, (γ) τριγωνικός παλμός και (δ) κατά τμήματα πολυωνυμικός παλμός

Ακριβέστερα, δεν μιλάμε για ‘μικρότερο ή μεγαλύτερο πλήθος όρων’ αλλά για ‘ρυθμό μείωσης των όρων συναρτήσεως της τάξης της αρμονικής’.

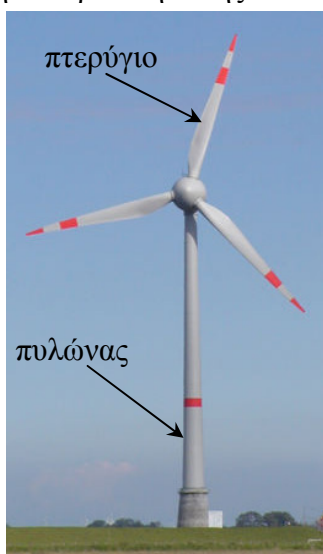
### Τεχνολογικές εφαρμογές

Η ανάλυση Fourier έχει πολύ μεγάλη αξία σε πλήθος τεχνολογικών εφαρμογών, δύο χαρακτηριστικές εκ των οποίων είναι οι ανεμογεννήτριες (Α/Γ) και το πηδάλιο των πλοίων.

Έστω μία τυπική μορφή Α/Γ οριζοντίου άξονα, η οποία εδράζεται σε έναν κατακόρυφο πυλώνα (βλ. Σχήμα 4α) και έστω ότι φυσάει σταθερός άνεμος κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα πτερύγια της (Α/Γ). Εάν τα πτερύγια της (Α/Γ) είναι ακίνητα, τότε ο πυλώνας θα δέχεται ένα, χρονικά σταθερό, καμπτικό φορτίο (στατική φόρτιση). Εάν, όμως, τα πτερύγια της (Α/Γ) περιστρέφονται, τότε ο πυλώνας θα δέχεται ένα, χρονικά μεταβαλλόμενο, καμπτικό φορτίο (δυναμική φόρτιση) λόγω της διαδοχικής κάλυψης και αποκάλυψης του πυλώνα από τα πτερύγια (όταν ένα πτερύγιο είναι μπροστά από τον πυλώνα, τον ‘καλύπτει’/‘κρύβει’ από τον άνεμο). Το εν λόγω φορτίο είναι περιοδικό με συχνότητα ίση προς το γινόμενο του πλήθους των πτερυγίων επί την ταχύτητα περιστροφής (σε μία Α/Γ με ένα πτερύγιο και σε μία πλήρη περιστροφή του άξονα της Α/Γ, ο πυλώνας καλύπτεται μία φορά, αλλά σε μία Α/Γ με  $n$  πτερύγια και σε μία πλήρη περιστροφή του άξονα της Α/Γ, ο πυλώνας καλύπτεται  $n$  φορές). Συνεπώς, η, με αυτόν τον τρόπο, δυναμική διέγερση του πυλώνα συνίσταται στην εμφάνιση διαφόρων αρμονικών συνιστωσών διέγερσης. Διευκρινίζεται ότι σε μία τυπική (Α/Γ), το μήκος των πτερυγίων είναι συγκρίσιμο του ύψους του πυλώνα (βλ. Σχήμα 4α), συνεπώς η δυναμική φόρτιση του πυλώνα, με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι σημαντική.

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό τεχνολογικό παράδειγμα αποτελεί το πηδάλιο στα πλοία. Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου ένα πλοίο να εκτελέσει έναν ελιγμό (αλλαγή πορείας) κατά τον πλου του, το πηδάλιο τοποθετείται σε εστραμμένη, ως προς τον διαμήκη άξονα του πλοίου, θέση. Εξ αιτίας της περιστροφής της έλικας (προπέλα), αναπτύσσεται δυναμική φόρτιση στο πηδάλιο, με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν της (Α/Γ).

Σε αυτές, λοιπόν, τις περιπτώσεις, η σχεδίαση πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να αποφεύγεται ο συντονισμός, δηλαδή η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής να μην ταυτίζεται με τη συχνότητα των εν λόγω διεγέρσεων. Σε διαφορετική περίπτωση, εμφανίζονται πολύ ισχυρές, θέτοντας σε κίνδυνο την ακεραιότητα της κατασκευής.



(α)



(β)

**Σχήμα 4:** (α) Ανεμογεννήτρια οριζοντίου άξονα και (β) πηδάλιο πλοίου

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι με τη **σειρά Fourier** είναι δυνατόν να **αναλύσουμε** μία οποιαδήποτε **περιοδική διέγερση** σε **αρμονικές συνιστώσες**. Συνεπώς, ξέρουμε πλέον πώς να διαχειριστούμε μία περιοδική διέγερση. Ωστόσο, οι διεγέρσεις δεν είναι πάντοτε περιοδικές. Σε περίπτωση, λοιπόν, μη-περιοδικής διέγερσης, αρκεί, με κάποιον τρόπο, να μετατρέψουμε τη μη-περιοδική διέγερση σε περιοδική. Η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε ένα χρονικό παράθυρο σημαντικά μεγαλύτερης διάρκειας από τη χρονική διάρκεια εξέλιξης του μη-περιοδικού φαινομένου που θέλουμε να μελετήσουμε. Για παράδειγμα, ο σεισμός είναι ένα μη-περιοδικό φαινόμενο μικρής διάρκειας, π.χ. ενός λεπτού. Ωστόσο, από την οπτική γωνία του Μηχανικού, είναι δυνατόν να τον θεωρήσουμε ως περιοδικό φαινόμενο με περίοδο, π.χ. μισής ώρας. Η επιλογή της περιόδου γίνεται με κριτήριο την εξασφάλιση επαρκούς χρόνου ώστε το διεγειρόμενο σύστημα, π.χ. κτήριο, να έχει ηρεμήσει πλήρως. Το μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο αναλύουμε μη-περιοδικά φαινόμενα (συμπεριλαμβανομένων και των μεταβατικών φαινομένων), είναι ο λεγόμενος **‘μετασχηματισμός Fourier’**. Πρόκειται για τη μαθηματική επέκταση της ανάπτυξης σε σειρά Fourier, όταν η περίοδος τείνει στο άπειρο, κάτι με το οποίο θα ασχοληθούμε σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα.

---



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Για τον συντελεστή  $a_o$ :

$$a_o = \left(\frac{1}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t) dt = \left(\frac{F_o}{T_p}\right) \int_0^{T_p} \sin(\Omega t) dt = \left(\frac{1}{T_p}\right) \int_0^{T_p/2} F_o \sin(\Omega t) dt + \left(\frac{1}{T_p}\right) \int_{T_p/2}^{T_p} F_o \sin(\Omega t) dt$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται, διότι στο διάστημα  $t \in \left[\frac{T_p}{2}, T_p\right]$ , η συνάρτηση  $F(t)$  έχει μηδενική τιμή.

$$\text{Αλλαγή μεταβλητών: } \tau = \Omega t \Rightarrow d\tau = \Omega dt \Rightarrow dt = \left(\frac{d\tau}{\Omega}\right)$$

$$\tau = \Omega t = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right) t \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow \tau = 0 \\ t = \left(\frac{T_p}{2}\right) \rightarrow \tau = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right) \left(\frac{T_p}{2}\right) = \pi \end{cases}$$

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$a_o = \left(\frac{F_o}{T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin \tau \left(\frac{d\tau}{\Omega}\right) = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin \tau d\tau$$

Από τυπολόγιο:

$$\int \sin(ax) dx = -\left(\frac{1}{a}\right)(\cos ax) + C$$

Χρήσιμη ποσότητα:

$$\Omega T_p = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right) T_p \Rightarrow \Omega T_p = 2\pi$$

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$\begin{aligned} a_o &= \left(\frac{F_o}{T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin \tau \left(\frac{d\tau}{\Omega}\right) = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin \tau d\tau = \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) [-\cos \tau]_0^{\pi} = \\ &= \left(-\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) [\cos \pi - \cos 0] = \left(-\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) [-1 - 1] = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right) \xrightarrow{\Omega T_p = 2\pi} \left(\frac{2F_o}{2\pi}\right) \\ &\Rightarrow a_o = \left(\frac{F_o}{\pi}\right) \end{aligned}$$

**Για τον συντελεστή  $a_n$  :**

$$a_n = \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F(t) \cos(n\Omega t) dt = \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t) \cos(n\Omega t) dt =$$

$$= \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_0^{T_p/2} F_o \sin(\Omega t) \cos(n\Omega t) dt + \left(\frac{2}{T_p}\right) \int_{T_p/2}^{\pi} F_o \sin(\Omega t) \cos(n\Omega t) dt$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται, διότι στο διάστημα  $t \in \left[\frac{T_p}{2}, T_p\right]$ , η συνάρτηση  $F(t)$  έχει μηδενική τιμή.

Αλλαγή μεταβλητών: όπως και προηγουμένως

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$a_n = \left(\frac{2F_o}{T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \cos(n\tau) \left(\frac{dt}{\Omega}\right) = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \cos(n\tau) d\tau$$

Από τυπολόγιο:

$$\int \sin(bx) \cos(ax) dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} + C, a \neq b$$

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$a_n = \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \cos(n\tau) d\tau \left. \vphantom{\int_0^{\pi} \sin(\tau) \cos(n\tau) d\tau} \right\} \rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} \sin(bx) \cos(ax) dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} + C, a \neq b$$

$$\xrightarrow[\tau=x]{b=1, a=n} \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right) \left[ \frac{\cos[(n-1)x]}{2(n-1)} - \frac{\cos[(n+1)x]}{2(n+1)} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{2F_o}{\Omega T_p}\right) \left[ \frac{\cos(nx) \cos(x) + \sin(nx) \sin(x)}{2(n-1)} - \frac{\cos(nx) \cos(x) - \sin(nx) \sin(x)}{2(n+1)} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) \left[ (n+1) \frac{\cos(nx) \cos(x) + \sin(nx) \sin(x)}{(n-1)} - (n-1) \frac{\cos(nx) \cos(x) - \sin(nx) \sin(x)}{(n+1)} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) \left[ \frac{(n+1) [\cos(nx) \cos(x) + \sin(nx) \sin(x)] - (n-1) [\cos(nx) \cos(x) - \sin(nx) \sin(x)]}{(n+1)(n-1)} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{F_o}{\Omega T_p}\right) \left[ \frac{(n+1-n+1)(\cos(nx) \cos(x)) + (n+1+n-1)(\sin(nx) \sin(x))}{(n+1)(n-1)} \right]_0^{\pi} =$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a_n &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left[ \frac{2(\cos(nx)\cos(x)) + 2n(\sin(nx)\sin(x))}{(n^2 - 1)} \right]_0^\pi = \\
 &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left( \frac{1}{(n^2 - 1)} \right) \left[ 2(\cos(n\pi)\cos(\pi)) + 2n(\sin(n\pi)\sin(\pi)) \right] \\
 &\quad - \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left( \frac{1}{(n^2 - 1)} \right) \left[ 2(\cos(n0)\cos(0)) + 2n(\sin(n0)\sin(0)) \right] = \\
 &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left( \frac{1}{(n^2 - 1)} \right) \left[ 2(\cos(n\pi)\cos(\pi)) - 2(\cos(0)\cos(0)) \right] = \\
 &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left( \frac{1}{(n^2 - 1)} \right) \left[ 2(\cos(n\pi))(-1) - 2 \right] = \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left( \frac{-2}{(n^2 - 1)} \right) [\cos(n\pi) + 1] = \\
 &= \left( \frac{F_o}{2\pi} \right) \left( \frac{2}{(1 - n^2)} \right) [\cos(n\pi) + 1] = \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [\cos(n\pi) + 1]
 \end{aligned}$$

Εάν  $n$  περιττός:

$$a_n = \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [\cos(n\pi) + 1] = \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [\cos(\pi) + 1] = \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [-1 + 1] \Rightarrow a_n = 0$$

Εάν  $n$  άρτιος:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [\cos(n\pi) + 1] = \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [\cos(0) + 1] = \left( \frac{F_o}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(1 - n^2)} \right) [1 + 1] \Rightarrow \\
 \Rightarrow a_n &= \left( \frac{2}{(1 - n^2)} \right) \left( \frac{F_o}{\pi} \right)
 \end{aligned}$$

Για τον συντελεστή  $b_n$  :

$$b_n = \left( \frac{2}{T_p} \right) \int_0^{T_p} F(t) \sin(n\Omega t) dt = \left( \frac{2}{T_p} \right) \int_0^{T_p} F_o \sin(\Omega t) \sin(n\Omega t) dt =$$

$$= \left( \frac{2}{T_p} \right) \int_0^{T_p/2} F_o \sin(\Omega t) \sin(n\Omega t) dt + \left( \frac{2}{T_p} \right) \int_{T_p/2}^{\pi} F_o \sin(\Omega t) \sin(n\Omega t) dt$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται, διότι στο διάστημα  $t \in \left[ \frac{T_p}{2}, T_p \right]$ , η συνάρτηση  $F(t)$  έχει μηδενική τιμή.

Αλλαγή μεταβλητών: όπως και προηγουμένως

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$b_n = \left( \frac{2F_o}{T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \sin(n\tau) \left( \frac{dt}{\Omega} \right) = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \sin(n\tau) d\tau$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**Περίπτωση Α:**  $n = 1$

Ισχύει:

$$b_n = \left( \frac{2F_o}{T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \sin(n\tau) \left( \frac{dt}{\Omega} \right) = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \sin(n\tau) d\tau \xrightarrow{n=1}$$

$$\rightarrow b_n = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin(\tau) \sin(\tau) d\tau = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin^2(\tau) d\tau$$

Από τυπολόγιο:

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$$

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$b_n = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \int_0^{\pi} \sin^2(\tau) d\tau \left. \begin{array}{l} \\ \int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \end{array} \right\} \xrightarrow{a=1} b_n = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \left[ \left[ \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\tau)}{4} \right]_0^{\pi} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \left[ \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{4} \right) - \left( \frac{0}{2} - \frac{\sin(2 \times 0)}{4} \right) \right] \right] = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right) \xrightarrow{\Omega T_p = 2\pi}$$

$$\rightarrow b_n = \left( \frac{2F_o}{2\pi} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow b_n = \left( \frac{F_o}{2} \right)$$

**Περίπτωση Β:  $n > 1$**

Τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\begin{aligned} \sin(\tau) \sin(n\tau) &= \frac{2 \sin(\tau) \sin(n\tau)}{2} = \\ &= \frac{\sin(\tau) \sin(n\tau) + \cos(\tau) \cos(n\tau) + \sin(\tau) \sin(n\tau) - \cos(\tau) \cos(n\tau)}{2} = \\ &= \frac{[\sin(\tau) \sin(n\tau) + \cos(\tau) \cos(n\tau)] - [\cos(\tau) \cos(n\tau) - \sin(\tau) \sin(n\tau)]}{2} = \\ &= \frac{\cos(n\tau - \tau) - \cos(n\tau + \tau)}{2} = \frac{\cos[(n-1)\tau]}{2} - \frac{\cos[(n+1)\tau]}{2} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} b_n &= \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \int_0^\pi \sin(\tau) \sin(n\tau) d\tau = \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \int_0^\pi \left( \frac{\cos[(n-1)\tau]}{2} + \frac{\cos[(n+1)\tau]}{2} \right) d\tau \right\} = \\ &= \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \int_0^\pi \frac{\cos[(n-1)\tau]}{2} d\tau + \int_0^\pi \frac{\cos[(n+1)\tau]}{2} d\tau \right\} = \\ &= \left( \frac{2F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{\sin[(n-1)\tau]}{\cancel{2}(n-1)} \right]_0^\pi + \left[ \frac{\sin[(n+1)\tau]}{\cancel{2}(n+1)} \right]_0^\pi \right\} = \\ &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{\sin[(n-1)\tau]}{(n-1)} \right]_0^\pi + \left[ \frac{\sin[(n+1)\tau]}{(n+1)} \right]_0^\pi \right\} = \\ &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{\sin[(n-1)\pi]}{(n-1)} - \frac{\sin[(n-1)0]}{(n-1)} \right] + \left[ \frac{\sin[(n+1)\pi]}{(n+1)} - \frac{\sin[(n+1)0]}{(n+1)} \right] \right\} = \\ &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{\sin[(n-1)\pi]}{(n-1)} - \frac{\cancel{\sin[(n-1)0]}}{(n-1)} \right] + \left[ \frac{\sin[(n+1)\pi]}{(n+1)} - \frac{\cancel{\sin[(n+1)0]}}{(n+1)} \right] \right\} = \\ &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{\sin[(n-1)\pi]}{(n-1)} + \frac{\sin[(n+1)\pi]}{(n+1)} \right] \right\} = \\ &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{(n+1) \sin[(n-1)\pi] + (n-1) \sin[(n+1)\pi]}{(n+1)(n-1)} \right] \right\} = \\ &= \left( \frac{F_o}{\Omega T_p} \right) \left\{ \left[ \frac{(n+1) \cancel{\sin[(n-1)\pi]} + (n-1) \cancel{\sin[(n+1)\pi]}}{(n^2 - 1)} \right] \right\} \Rightarrow b_n = 0 \end{aligned}$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Λεπτομερής υπολογισμός αρμονικών συνιστωσών απόκρισης

Με βάση όσα αναφέρονται στις σελίδες (8-10), συμπληρώνουμε τον Πίνακα Β.1, με τις συμμετέχουσες, στην εξεταζόμενη εφαρμογή, συνιστώσες διέγερσης καθώς και τις αντίστοιχες αποκρίσεις τους.

**Πίνακας Β.2:** Συμμετέχουσες συνιστώσες διέγερσης και αντίστοιχες συνιστώσες απόκρισης

n	Συνιστώσα διέγερσης		Συνιστώσα απόκρισης	
	Εξίσωση υπολογισμού	Περιγραφή	Εξίσωση υπολογισμού	Περιγραφή
0	$\left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	Στατική φόρτιση μέτρου $F_{ST} = \left(\frac{F_o}{\pi}\right)$	$X_{ST} = \left(\frac{F_{ST}}{k}\right)$	Στατική απόκριση $X_{ST}$
1	$\left(\frac{F_o}{2} \sin(\Omega t)\right)$	Αρμονική διέγερση πλάτους $\left(\frac{F_o}{2}\right)$ και συχνότητας $\Omega$	$\left(X_1 \sin(\Omega t - \vartheta_1)\right)$	Αρμονική απόκριση πλάτους $X_1$ , με συχνότητα $\Omega$ και διαφορά φάσης $\vartheta_1$
2	$\left(-\frac{2F_o}{3\pi} \cos(2\Omega t)\right)$	Αρμονική διέγερση πλάτους $\left(-\frac{2F_o}{3\pi}\right)$ και συχνότητας $2\Omega$	$\left(X_2 \cos(2\Omega t - \vartheta_2)\right)$	Αρμονική απόκριση πλάτους $X_2$ , με συχνότητα $2\Omega$ και διαφορά φάσης $\vartheta_2$
3	-----	-----	-----	-----
4	$\left(-\frac{2F_o}{15\pi} \cos(4\Omega t)\right)$	Αρμονική διέγερση πλάτους $\left(-\frac{2F_o}{15\pi}\right)$ και συχνότητας $4\Omega$	$\left(X_4 \cos(4\Omega t - \vartheta_4)\right)$	Αρμονική απόκριση πλάτους $X_4$ , με συχνότητα $4\Omega$ και διαφορά φάσης $\vartheta_4$
5	-----	-----	-----	-----
6	$\left(-\frac{2F_o}{35\pi} \cos(6\Omega t)\right)$	Αρμονική διέγερση πλάτους $\left(-\frac{2F_o}{35\pi}\right)$ και συχνότητας $6\Omega$	$\left(X_6 \cos(6\Omega t - \vartheta_6)\right)$	Αρμονική απόκριση πλάτους $X_6$ , με συχνότητα $6\Omega$ και διαφορά φάσης $\vartheta_6$

Τελικά, από το συνδυασμό των Εξ(17,21,28,34), προκύπτει το πλάτος της ταλάντωσης  $X_n$  :

$$X_n = \alpha_n \left(\frac{F_o}{k}\right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1-q_n^2)^2 + (2\zeta q_n)^2}} \right) \quad (\text{B.1})$$

Ακολουθεί λεπτομερής υπολογισμός για κάθε μία συνιστώσα απόκρισης. Ειδικότερα:

- Για τον πρώτο όρο του αναπτύγματος (σταθερός όρος), από την Εξ.(16), αναγνωρίζουμε ότι το μέτρο της στατικής δύναμης είναι  $F_{ST} = (F_o/\pi)$ , οπότε η αντίστοιχη συνιστώσα μόνιμης απόκρισης είναι:

$$X_0 = X_{ST} = \left( \frac{F_o}{k} \right) \quad (\text{B.2})$$

- Για τον δεύτερο όρο του αναπτύγματος, από την Εξ.(16), αναγνωρίζουμε ότι  $n=1$ , το μέτρο της αρμονικής διέγερσης είναι  $F_{ST,n} = F_{ST,1} = (F_o/2\pi)$ , η αντίστοιχη συχνότητα διέγερσης  $\Omega_n$  είναι  $\Omega_1 = 1\Omega = \Omega$ , ο λόγος  $q_n$  είναι (βλ. Εξ.(34):

$$q_n = 0.75n \xrightarrow{n=1} q_1 = 0.75 \quad (\text{B.3})$$

η διαφορά φάσης  $\vartheta_n$  (για  $n=1$ ) είναι (βλ. Εξ.(19) & Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Σχήμα15):

$$\vartheta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{-2\zeta q_1}{1 - q_1^2} \right) \xrightarrow[q_1=0.75 < 1]{\zeta=0} \vartheta_1 = 0 \quad (\text{B.4})$$

και το πλάτος της αντίστοιχης συνιστώσας απόκρισης  $X_n$  είναι (βλ. Εξ.(B.1):

$$\begin{aligned} X_1 &= \left( \frac{F_{ST,1}}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - q_1^2)^2}} \right) = \left( \frac{(F_o/2\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.75^2)^2}} \right) = \left( \frac{(F_o/2\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.5625)^2}} \right) = \\ &= \left( \frac{(F_o/2\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{0.4375^2}} \right) = \left( \frac{(F_o/2\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{0.4375} \right) \Rightarrow X_1 \approx 1.143 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

- Για τον τρίτο όρο του αναπτύγματος, από την Εξ.(16), αναγνωρίζουμε ότι  $n=2$ , το μέτρο της αρμονικής διέγερσης είναι  $F_{ST,n} = F_{ST,2} = (-2F_o/3\pi)$ , η αντίστοιχη συχνότητα διέγερσης  $\Omega_n$  είναι  $\Omega_2 = 2\Omega$ , ο λόγος  $q_n$  είναι (βλ. Εξ.(34):

$$q_n = 0.75n \xrightarrow{n=2} q_2 = 1.50 \quad (\text{B.6})$$

η διαφορά φάσης  $\vartheta_n$  (για  $n=2$ ) είναι (βλ. Εξ.(19) & Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Σχήμα15):

$$\vartheta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta q_2}{1 - q_2^2} \right) \xrightarrow[q_2=1.50 > 1]{\zeta=0} \vartheta_2 = \pi \quad (\text{B.7})$$

και το πλάτος της αντίστοιχης συνιστώσας απόκρισης  $X_n$  είναι (βλ. Εξ.(B.1):

$$X_2 = \left( \frac{F_{ST,2}}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - q_2^2)^2}} \right) = \left( \frac{(-2F_o/3\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - 1.50^2)^2}} \right) = \left( \frac{(-2F_o/3\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - 2.25)^2}} \right) =$$

$$= \left( \frac{\left( \frac{-2F_o}{3\pi} \right)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(-1.25)^2}} \right) = \left( \frac{\left( \frac{-2F_o}{3\pi} \right)}{k} \right) \left( \frac{1}{1.25} \right) \Rightarrow X_2 = -0.533 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \quad (\text{B.8})$$

- Για τον τέταρτο όρο του αναπτύγματος, από την Εξ.(16), αναγνωρίζουμε ότι  $n=4$ , το μέτρο της αρμονικής διέγερσης είναι  $F_{ST,n} = F_{ST,4} = (-2F_o/15\pi)$ , η αντίστοιχη συχνότητα διέγερσης  $\Omega_n$  είναι  $\Omega_4 = 4\Omega$ , ο λόγος  $q_n$  είναι (βλ. Εξ.(34):

$$q_n = 0.75n \xrightarrow{n=4} q_2 = 3.00 \quad (\text{B.9})$$

η διαφορά φάσης  $\mathcal{G}_n$  (για  $n=4$ ) είναι (βλ. Εξ.(19) & Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Σχήμα15):

$$\mathcal{G}_4 = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta q_4}{1 - q_4^2} \right) \xrightarrow[\zeta=0]{q_4=3>1} \mathcal{G}_4 = \pi \quad (\text{B.10})$$

και το πλάτος της αντίστοιχης συνιστώσας απόκρισης  $X_n$  είναι (βλ. Εξ.(B.1):

$$\begin{aligned} X_4 &= \left( \frac{F_{ST,4}}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - q_4^2)^2}} \right) = \left( \frac{\left( \frac{-2F_o}{15\pi} \right)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - 3^2)^2}} \right) = \left( \frac{\left( \frac{-2F_o}{15\pi} \right)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - 9)^2}} \right) = \\ &= \left( \frac{\left( \frac{-2F_o}{15\pi} \right)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(-8)^2}} \right) = \left( \frac{\left( \frac{-2F_o}{15\pi} \right)}{k} \right) \left( \frac{1}{8} \right) \Rightarrow X_4 = -0.0166 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

- Για τον πέμπτο όρο του αναπτύγματος, από την Εξ.(16), αναγνωρίζουμε ότι  $n=6$ , το μέτρο της αρμονικής διέγερσης είναι  $F_{ST,n} = F_{ST,6} = (-2F_o/35\pi)$ , η αντίστοιχη συχνότητα διέγερσης  $\Omega_n$  είναι  $\Omega_6 = 6\Omega$ , ο λόγος  $q_n$  είναι (βλ. Εξ.(34):

$$q_n = 0.75n \xrightarrow{n=6} q_2 = 4.50 \quad (\text{B.12})$$

η διαφορά φάσης  $\mathcal{G}_n$  (για  $n=6$ ) είναι (βλ. Εξ.(19) & Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Σχήμα15):

$$\mathcal{G}_6 = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta q_6}{1 - q_6^2} \right) \xrightarrow[\zeta=0]{q_6=4.5>1} \mathcal{G}_6 = \pi \quad (\text{B.13})$$

και το πλάτος της αντίστοιχης συνιστώσας απόκρισης  $X_n$  είναι (βλ. Εξ.(B.1):



$$\begin{aligned} X_6 &= \left( \frac{F_{ST,6}}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1-q_6^2)^2}} \right) = \left( \frac{(-2F_o/35\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1-4.5^2)^2}} \right) = \left( \frac{(-2F_o/35\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(1-20.25)^2}} \right) = \\ &= \left( \frac{(-2F_o/35\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(-19.25)^2}} \right) = \left( \frac{(-2F_o/35\pi)}{k} \right) \left( \frac{1}{19.25} \right) \Rightarrow X_6 = -0.00297 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \quad \text{(B.14)} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας μεταξύ τους τα πλάτη  $X_2, X_4, X_6$  διαπιστώνουμε ότι:

$$X_2 = -0.533 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \gg \left\{ X_4 = -0.0166 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right), X_6 = -0.00297 \left( \frac{F_o}{k} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \right\} \quad \text{(B.15)}$$

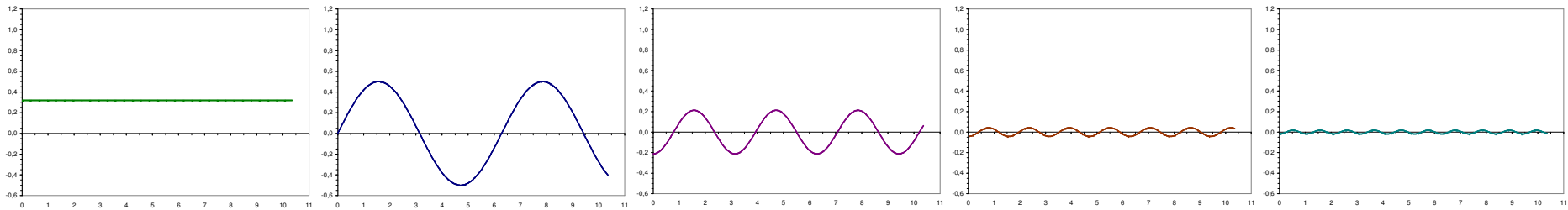
Συνεπώς, οι όροι  $n_4$  και  $n_6$  εμφανίζουν πολύ μικρή συμμετοχή και, από τεχνολογική προσέγγιση, αμελούνται.

---

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Ανάπτυγμα συνάρτησης  $F(t)$  κατά Fourier**

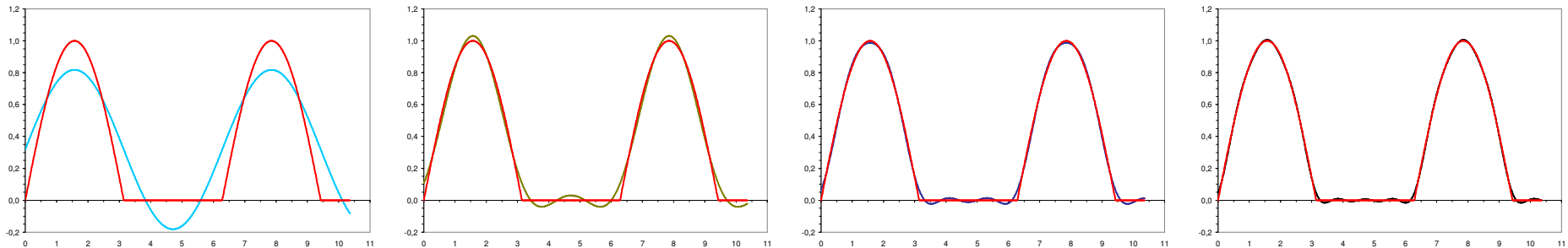
Για την καλύτερη κατανόηση της ανάπτυξης της συνάρτησης  $F(t)$  κατά Fourier, παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις των συνιστωσών.

**Πίνακας Γ.1:** Αρμονικές συνιστώσες του αναπτύγματος της  $F(t)$  κατά Fourier



(Αρμονική Συνιστώσα #1)    (Αρμονική Συνιστώσα #2)    (Αρμονική Συνιστώσα #3)    (Αρμονική Συνιστώσα #4)    (Αρμονική Συνιστώσα #5)

**Πίνακας Γ.2:** Προσέγγιση της διέγερσης  $F(t)$  (καμπύλη με κόκκινο χρώμα) χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος όρων του, κατά Fourier, αναπτύγματος της  $F(t)$



(Προσέγγιση με 2 όρους) =  
(Αρμονική Συνιστώσα #1) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #2)

(Προσέγγιση με 3 όρους) =  
(Αρμονική Συνιστώσα #1) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #2) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #3)

(Προσέγγιση με 4 όρους) =  
(Αρμονική Συνιστώσα #1) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #2) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #3) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #4)

(Προσέγγιση με 5 όρους) =  
(Αρμονική Συνιστώσα #1) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #2) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #3) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #4) +  
(Αρμονική Συνιστώσα #5)