

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

I

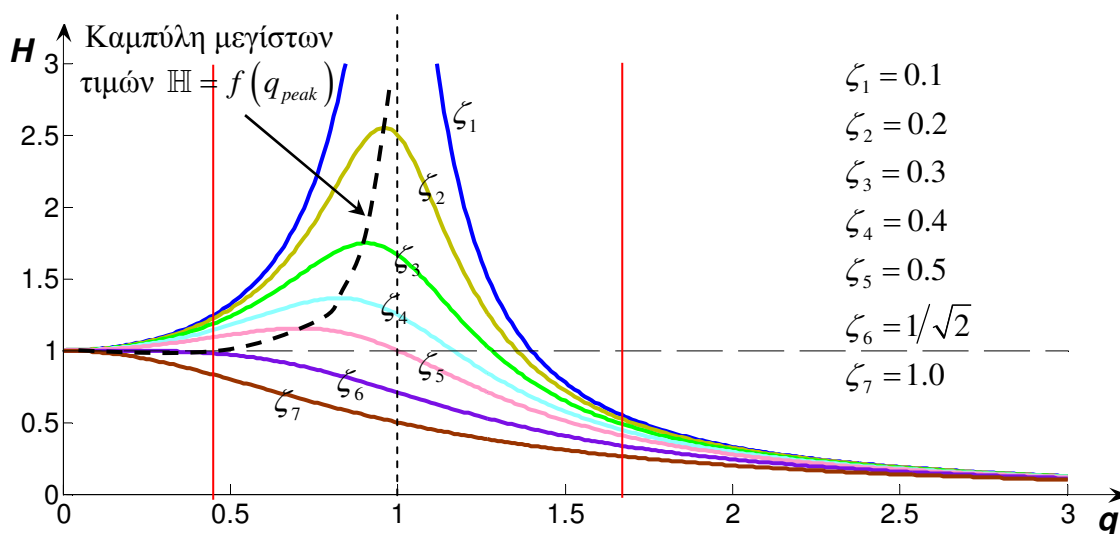
**Copyright © ΕΜΠ - Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών - Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών - 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.**

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Εκπαιδευτική Ενότητα 6^η Μεταβατικές Διεγέρσεις

Διευκρινιστικό Σχόλιο

Ένα πολύ ενδιαφέρον, από τεχνολογικής απόψεως, ερώτημα είναι το ακόλουθο: στην πράξη, καθώς σχεδιάζουμε μία κατασκευή, τι ακριβώς προσπαθούμε να αποφύγουμε; Την εμφάνιση συντονισμού, τη μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης που οφείλεται σε κάποια δυναμική φόρτιση (η οποία, για μη-μηδενική απόσβεση, συμβαίνει πριν το συντονισμό) ή κάτι άλλο; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι άμεση: προσπαθούμε να αποφύγουμε την αστοχία (καταστροφή) της κατασκευής, επιδιώκοντας την ικανοποίηση περιορισμών, οι οποίοι περιγράφονται από διάφορα πρότυπα (π.χ. Ευρωκώδικες) και σχετίζονται τόσο με την ικανότητα της κατασκευής να παραλάβει με ασφάλεια τα εξωτερικώς επιβαλλόμενα φορτία όσο και με τη λειτουργικότητα της κατασκευής. Μεταξύ αυτών των περιορισμών, υπάρχουν και περιορισμοί σχετικά με την ιδιοσυχνότητα της κατασκευής, προκειμένου να αποφευχθεί η εμφάνιση επικίνδυνων ταλαντώσεων, οι οποίες θα απειλήσουν την ακεραιότητα και τη λειτουργικότητα της κατασκευής. Αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} συναρτήσει του λόγου q και του λόγου απόσβεσης ζ (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/ Σχήμα 14, το εν λόγω σχήμα επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου).



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση του συντελεστού δυναμικής ενίσχυσης \mathbb{H} συναρτήσει του λόγου q για διάφορες τιμές του λόγου απόσβεσης ζ

Όπως προκύπτει από το Σχήμα 1, για $\zeta = 0$, ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} απειρίζεται για $q = q_{peak} = 1$. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι, πάντα για $\zeta = 0$ (μπλε καμπύλη στο Σχήμα 1), ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} αποκτά μία πάρα πολύ μεγάλη τιμή σε μία ολόκληρη περιοχή τιμών q κοντά στην τιμή q_{peak} . Με άλλα λόγια, μία κατασκευή με $\zeta = 0$ (μηδενικός λόγος απόσβεσης) θα είχε πρόβλημα όχι μόνον όταν $q = q_{peak} = 1$ αλλά και όταν

$q \in [q_{peak} - \delta, q_{peak} + \delta]$, όπου δ θετικός, πραγματικός αριθμός, διότι και ο απειρισμός του πλάτους ταλάντωσης της κατασκευής είναι ανεπιθύμητος αλλά και η εμφάνιση μεγάλων τιμών πλάτους ταλάντωσης είναι, ομοίως, ανεπιθύμητη. Από το Σχήμα 1, φαίνεται επίσης, ότι το ίδιο συμβαίνει και για μικρές τιμές του λόγου απόσβεσης (δηλαδή, σε μια ολόκληρη περιοχή τιμών του λόγου q , ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} αποκτά πολύ μεγάλες τιμές). Με άλλα λόγια, μία κατασκευή με μικρό λόγο απόσβεσης ζ θα είχε πρόβλημα εμφάνισης πολύ μεγάλου πλάτους ταλάντωσης όχι μόνον όταν $q = q_{peak}$ αλλά και όταν $q \in [q_{peak} - \delta, q_{peak} + \delta]$, όπου δ θετικός, πραγματικός αριθμός. Αντιθέτως, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος απόσβεσης μίας κατασκευής, τόσο μικρότερη είναι η μέγιστη τιμή του Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} . Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, κατά τη σχεδίαση μίας κατασκευής επιδιώκουμε ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} , υπό την επιβολή των προβλεπομένων φορτίων, να μην αποκτήσει επικίνδυνα υψηλή τιμή. Αυτό επιτυγχάνεται είτε σχεδιάζοντας την κατασκευή έτσι ώστε οι συχνότητες διέγερσης να είναι επαρκώς μακριά από την ιδιοσυχνότητα της κατασκευής (δηλαδή εκτός μίας ολόκληρης ζώνης $[q_{peak} - \delta, q_{peak} + \delta]$) είτε αυξάνοντας επαρκώς το λόγο απόσβεσης ζ της κατασκευής (δηλαδή χρησιμοποιώντας ισχυρούς αποσβεστήρες) είτε με συνδυασμό αυτών των δύο δυνατοτήτων. Τονίζεται ιδιαίτερος ότι η προτίμηση για αποφυγή μίας ολόκληρης ζώνης συχνοτήτων οφείλεται και στο γεγονός ότι υπάρχει πιθανότητα κάποια αρμονική συνιστώσα της διέγερσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 05) να προκαλέσει επικίνδυνη αύξηση του Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} . Επίσης, τονίζεται ιδιαίτερος ότι στην σχεδίαση μίας κατασκευής δεν λαμβάνεται υπόψη μόνον το πλάτος της ταλάντωσης, αλλά και το πλάτος της ταχύτητας και, κυρίως, το πλάτος της επιτάχυνσης διότι αυτό (το πλάτος επιτάχυνσης) εκφράζει πόσο βίαια (απότομα ή προοδευτικά) θα ασκηθεί ένα φορτίο στην κατασκευή.

Θεωρητικά στοιχεία περί Μεταβατικών Διεγέρσεων

Στην Εκπαιδευτική Ενότητα 05 είχαμε ορίσει τις Μεταβατικές Διεγέρσεις ως διεγέρσεις, οι οποίες επιβάλλονται σταδιακά ή απότομα σε μία μηχανή. Από την καθημερινή μας ζωή μας, έχουμε πληθώρα παραδειγμάτων μεταβατικών διεγέρσεων, όπως είναι η ζύγιση ενός σώματος, η μεταφορά νερού μέσα σε ποτήρι επί δίσκου και η χρήση της βρύσης.

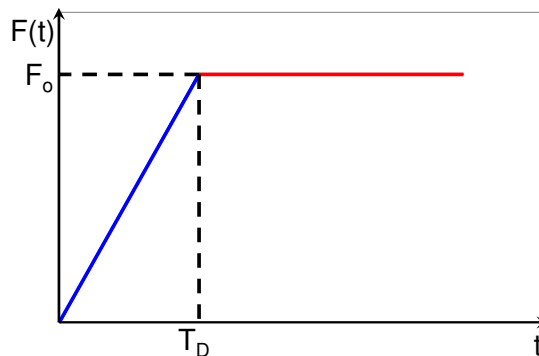
Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι θέλουμε να ζυγίσουμε ένα σώμα με έναν μικρό, επιτραπέζιο ζυγό (ζυγαριά). Παρατηρούμε ότι ο ζυγός, αρχικά, βρίσκεται σε ισορροπία (πριν από τη ζύγιση), στη συνέχεια ταλαντώνεται (μετά την τοποθέτηση του προς ζύγιση σώματος) και, τελικά, ισορροπεί εκ νέου. Με άλλα λόγια, όταν στη ζυγαριά τοποθετηθεί ένα βάρος, (χρονικά μεταβαλλόμενο, αλλά όχι επαναλαμβανόμενο, εξωτερικό φορτίο), τότε η ζυγαριά μετά από κάποιες ταλαντώσεις (μεταβατική κατάσταση), ισορροπεί εκ νέου (μόνιμη κατάσταση). Ο ρυθμός, δε, επιβολής του εν λόγω φορτίου (αργή ή γρήγορη τοποθέτηση του βάρους) επηρεάζει άμεσα και σημαντικά τηναπόκριση του συστήματος: όσο πιο προοδευτικά αποθέσουμε το σώμα επί του ζυγού, τόσο μικρότερες ταλαντώσεις θα εκτελέσει.

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα μεταβατικής διέγερσης είναι η μεταφορά νερού μέσα σε ποτήρι επί δίσκου. Έστω ότι είμαστε ακίνητοι και κρατάμε έναν δίσκο, επί του οποίου είναι τοποθετημένο ένα ποτήρι με νερό. Εάν, πολύ απότομα, αρχίσουμε να περπατάμε, τότε το νερό θα κινηθεί μέσα στο ποτήρι (θα ταλαντωθεί) με τέτοιον τρόπο, ώστε κάποια ποσότητα νερού θα βγει από το ποτήρι (το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι τόσο μεγάλο, ώστε το νερό θα ανυψωθεί περισσότερο από το ελεύθερο ύψος του ποτηριού). Αντιθέτως, εάν αρχίσουμε να περπατάμε προοδευτικά, θα διαπιστώσουμε ότι το νερό και πάλι θα κινηθεί (ταλαντωθεί) αλλά με πολύ ηπιότερο τρόπο. Αντίστοιχες παρατηρήσεις προκύπτουν εάν ήδη βρισκόμαστε σε κίνηση και ακινητοποιηθούμε: όσο πιο ομαλά ακινητοποιηθούμε, τόσο πιο ομαλή θα είναι και η κίνηση (ταλάντωση) του νερού μέσα στο ποτήρι. Διευκρινίζεται ότι είναι δυνατόν να κινηθούμε απότομα χωρίς να μεταβληθεί η στάθμη του νερού μέσα στο ποτήρι, αλλά τότε θα πρέπει, μαζί με την απότομη μεταβολή στη βάδιση, να κινήσουμε κατάλληλα και τον δίσκο (αυτού του είδους ο έλεγχος θα μας απασχολήσει σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα).

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η χρήση της βρύσης: όταν μία βρύση είναι εντελώς ανοικτή και τρέχει πολύ νερό, τότε εάν την κλείσουμε πολύ απότομα ακούμε έναν ήχο (γδούπο). Αυτός προκαλείται από την απότομη μεταβολή της πίεσης που εμείς επιβάλλουμε στο (υδραυλικό) σύστημα. Κάτι τέτοιο αποφεύγεται εάν κλείσουμε τη βρύση προοδευτικά.

Με βάση τα παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι η απότομη ή η προοδευτική επιβολή μίας εξωτερικής μεταβατικής διέγερσης σε ένα σύστημα επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά του συστήματος. Συνεπώς, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος, με τον οποίο η διάρκεια της μεταβατικής διέγερσης (του μεταβατικού φαινομένου) σε σχέση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, στο οποίο επιβάλλεται η διέγερση, καθορίζει την απόκριση του συστήματος. Αυτό αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσης Εκπαιδευτικής Ενότητας (Εκπαιδευτική Ενότητα 06).

Μία από τις πλέον απλές και συνήθεις μεταβατικές διεγέρσεις απεικονίζεται στο Σχήμα 2. Πρόκειται για μία διγραμμική συνάρτηση $F(t)$, δηλαδή για μία συνάρτηση με δύο γραμμικούς κλάδους. Στην προκειμένη περίπτωση, ο πρώτος κλάδος έχει μη-μηδενική κλίση, ενώ ο δεύτερος κλάδος έχει μηδενική κλίση.



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση τυπικής μεταβατικής διέγερσης

Η μαθηματική εξίσωση της συνάρτησης $F(t)$ του Σχήματος 2 είναι:

$$F(t) = \begin{cases} F_o \left(\frac{t}{T_D} \right) & , 0 \leq t \leq T_D \\ F_o & , t > T_D \end{cases} \quad (1)$$

Η Εξ.(1) πληροφορεί ότι η $F(t)$, αρχικά (δηλαδή τη στιγμή έναρξης μέτρησης του χρονικού διαστήματος που μας ενδιαφέρει), έχει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια, και έως τη χρονική στιγμή T_D , η τιμή της $F(t)$ αυξάνεται με σταθερό ρυθμό (ανάλογα με την κλίση της $F(t)$, ο ρυθμός μπορεί να είναι αργός ή γρήγορος) έως την τιμή F_o . Τέλος, από τη χρονική στιγμή T_D και έπειτα, η τιμή της $F(t)$ διατηρείται σταθερή και ίση προς F_o (μόνιμη τιμή διέγερσης). Με άλλα λόγια, για ένα μεταβατικό χρονικό διάστημα $t \in [0, T_D]$, η τιμή της διέγερσης συνεχώς αυξάνεται έως ότου αποκτήσει την επιθυμητή μόνιμη τιμή F_o . Διευκρινίζεται ότι δεν υπάρχει απόλυτος τρόπος αριθμητικού προσδιορισμού της χρονικής στιγμής T_D (η χρονική στιγμή T_D εξαρτάται από την εκάστοτε τεχνολογική εφαρμογή). Ωστόσο, όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια, εκείνο που έχει εξαιρετική σημασία είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης της ποσότητας T_D με την ιδιοπερίοδο του συστήματος.

Ο υπολογισμός της απόκρισης ενός συστήματος, υπό την επιβολή μίας διέγερσης $F(t)$ όπως αυτής του Σχήματος 2, επιτυγχάνεται εξετάζοντας ξεχωριστά κάθε έναν κλάδο της $F(t)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η χρονική στιγμή T_D αποτελεί το πέρας του πρώτου κλάδου, αλλά, ταυτόχρονα, αποτελεί και την έναρξη του δευτέρου κλάδου. Πιο συγκεκριμένα, ας ονομάσουμε ‘Φάση Α’ τη χρονική περίοδο $t \in [0, T_D]$ και ‘Φάση Β’ τη χρονική περίοδο $t \in [T_D, \infty)$. Για κάθε Φάση, η απόκριση του συστήματος $x(t)$, όπως έχουμε εξετάσει στα προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03), αποτελείται από ένα ομογενές τμήμα $x_h(t)$ και από ένα μερικό (μόνιμο) τμήμα $x_p(t)$, δηλαδή ισχύει:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2)$$

Αρκεί, λοιπόν, να αναγνωρισθεί για κάθε μία Φάση με τι ισούται το ομογενές τμήμα και με τι ισούται το μόνιμο τμήμα, αντίστοιχα.

Για τη ‘Φάση Α’

Εάν θεωρήσουμε μία υποκρίσιμη απόσβεση (τυπική επιλογή για τεχνολογικές εφαρμογές), τότε, η μορφή της ομογενούς λύσεως της εξίσωσης ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)) \quad (3)$$

όπου ω είναι η φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος, ω_n είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την απόσβεση, ενώ A_1 και A_2 είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Η μορφή της μερικής λύσεως της εξίσωσης ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$x_p(t) = P_o + P_1 \left(\frac{t}{T_D} \right) \quad (4)$$

όπου P_o και P_1 είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Διευκρινίζεται ότι η μορφή της μερικής λύσεως, δηλαδή η μορφή της Εξ.(4), υπαγορεύεται από τη μορφή της διέγερσης (η διέγερση είναι γραμμικής μορφής, άρα γραμμικής μορφής θα είναι και η μερική λύση). Συνδυάζοντας τις Εξ.(2,3,4), προκύπτει:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)) + P_o + P_1 \left(\frac{t}{T_D} \right) \quad (5)$$

Η μερική λύση ονομάζεται μερική, επειδή πρέπει να ικανοποιεί από μόνη της τη διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{x}_p(t) + 2\zeta\omega\dot{x}_p(t) + \omega^2 x_p(t) = \left(\frac{F_o}{m} \right) \left(\frac{t}{T_D} \right) \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ.(4) στην Εξ.(6) και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει:

$$0 + 2\zeta\omega \left(\frac{P_1}{T_D} \right) + \omega^2 \left(P_o + P_1 \left(\frac{t}{T_D} \right) \right) = \left(\frac{F_o}{m} \right) \left(\frac{t}{T_D} \right) \quad (7)$$

Η Εξ.(7) γράφεται και ως εξής:

$$\left\{ 2\zeta\omega \left(\frac{P_1}{T_D} \right) + \omega^2 P_o \right\} + t \left(\frac{1}{T_D} \right) \left(\omega^2 P_1 - \frac{F_o}{m} \right) = 0 \quad (8)$$

Επειδή η Εξ.(7), άρα και η Εξ.(8), πρέπει να ισχύει για κάθε $t \in [0, T_D]$, έπεται ότι ο σταθερός όρος της Εξ.(8) πρέπει να είναι μηδενικός, όπως μηδενικός πρέπει να είναι και ο συντελεστής του όρου t . Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega \left(\frac{P_1}{T_D} \right) + \omega^2 P_o &= 0 \\ \omega^2 P_1 - \left(\frac{F_o}{m} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Η Εξ.(9) περιγράφει ένα γραμμικό σύστημα 2×2 , με αγνώστους τους συντελεστές P_o και P_1 . Επιλύοντας το εν λόγω σύστημα εξισώσεων, προκύπτει ότι:

$$\left\{ \begin{aligned} P_o &= -2\zeta\omega \left(\frac{P_1}{T_D} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -2\zeta \left(\frac{P_1}{T_D} \right) \left(\frac{1}{\omega} \right) = -P_1 \left(\frac{2\zeta}{\omega T_D} \right) \\ P_1 &= \left(\frac{F_o}{m} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} P_1 = \left(\frac{F_o}{k} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} P_o &= - \left(\frac{F_o}{k} \right) \left(\frac{2\zeta}{\omega T_D} \right) \\ P_1 &= \left(\frac{F_o}{k} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών A_1 και A_2 , αξιοποιούμε τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Έστω ότι το σύστημα δεν έχει ούτε αρχική μετατόπιση ούτε αρχική ταχύτητα. Από την Εξ.(5) και τη συνθήκη μηδενικής αρχικής μετατόπισης προκύπτει:

$$x(t) = 0 \Rightarrow e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)) + P_o + P_1 \left(\frac{t}{T_D} \right) = 0 \xrightarrow{t=0} A_1 + P_o = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = -P_o \xrightarrow{Eξ.(9)} A_1 = \left(\frac{F_o}{k} \right) \left(\frac{2\zeta}{\omega T_D} \right)$$
(11)

Από την Εξ.(5) και τη συνθήκη μηδενικής αρχικής ταχύτητας προκύπτει:

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)) + P_o + P_1 \left(\frac{t}{T_D} \right) \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ -\zeta\omega e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)) + e^{-\zeta\omega t} (-\omega_n A_1 \sin(\omega_n t) + \omega_n A_2 \cos(\omega_n t)) + P_1 \left(\frac{1}{T_D} \right) \right\} = 0$$

$$\xrightarrow{t=0} -A_1 \zeta \omega + \omega_n A_2 + P_1 \left(\frac{1}{T_D} \right) = 0 \Rightarrow A_2 = \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \left[A_1 \zeta \omega - \left(\frac{P_1}{T_D} \right) \right]$$
(12)

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(11) με τις Εξ.(9,10), προκύπτει:

$$A_2 = \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \left[A_1 \zeta \omega - \left(\frac{P_1}{T_D} \right) \right] = \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \left[\left(\frac{F_o}{k} \right) \left(\frac{2\zeta}{\omega T_D} \right) \zeta \omega - \left(\frac{\left(\frac{F_o}{k} \right)}{T_D} \right) \right] \Rightarrow A_2 = \left(\frac{F_o}{k} \right) \left(\frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_n T_D} \right)$$
(13)

Συνεπώς, η ‘Φάση Α’ είναι πλέον σαφώς προσδιορισμένη μέσω των Εξ.(5,10,11,13).

Για τη ‘Φάση Β’

Κινούμαστε με τρόπο αντίστοιχο με εκείνον που εφαρμόσαμε για τη μελέτη της ‘Φάσης Α’. Πιο συγκεκριμένα, στη ‘Φάση Β’ η απόκριση του συστήματος ισούται με:

$$x'(t) = x'_h(t) + x'_p(t)$$
(14)

όπου ως $x'_h(t)$ συμβολίζεται το ομογενές τμήμα και ως $x'_p(t)$ συμβολίζεται το μερικό (μόνιμο) τμήμα (προσοχή στο συμβολισμό: στο παρόν κείμενο χρησιμοποιούμε ' για δηλώσουμε τα μεγέθη της ‘Φάσης Β’ και όχι παράγωγο). Επειδή στη ‘Φάση Α’ θεωρήσαμε ότι το σύστημα χαρακτηρίζεται από υποκρίσιμη απόσβεση, το οποίο αποτελεί ένα χρονικά αναλλοίωτο χαρακτηριστικό του συστήματος, έπεται ότι και στη ‘Φάση Β’ η μορφή της ομογενούς λύσεως της εξίσωσης ισορροπίας του συστήματος θα είναι της μορφής:

$$x'_h(t) = e^{-\zeta\omega t} (A'_1 \cos(\omega_n t) + A'_2 \sin(\omega_n t))$$
(15)

όπου ω είναι η φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος, ω_n είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την απόσβεση, ενώ A_1' και A_2' είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Για τη 'Φάση Β', η μορφή της μερικής λύσεως της εξίσωσης ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\dot{x}'_p(t) = P'_o \quad (16)$$

όπου P'_o είναι προσδιοριστέος συντελεστής. Υπενθυμίζεται ότι η μορφή της μερικής λύσεως υπαγορεύεται από τη μορφή της διέγερσης, η οποία, σε αυτήν την περίπτωση είναι μία σταθερή συνάρτηση, άρα σταθερή συνάρτηση θα είναι και η μερική λύση. Συνδυάζοντας τις Εξ.(14,15,16), προκύπτει:

$$x'(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_1' \cos(\omega_n t) + A_2' \sin(\omega_n t)) + P'_o \quad (17)$$

Πάλι κατά τα γνωστά, η εξίσωση ισορροπίας του υπό εξέταση δυναμικού συστήματος, κανονικοποιημένης ως προς τη μάζα m του συστήματος και υπό την επίδραση της εν λόγω $F(t)$ για το χρονικό διάστημα $t \in [T_D, \infty)$, είναι:

$$\ddot{x}'_p(t) + 2\zeta\omega\dot{x}'_p(t) + \omega^2 x'_p(t) = \left(\frac{F_o}{m}\right) \quad (18)$$

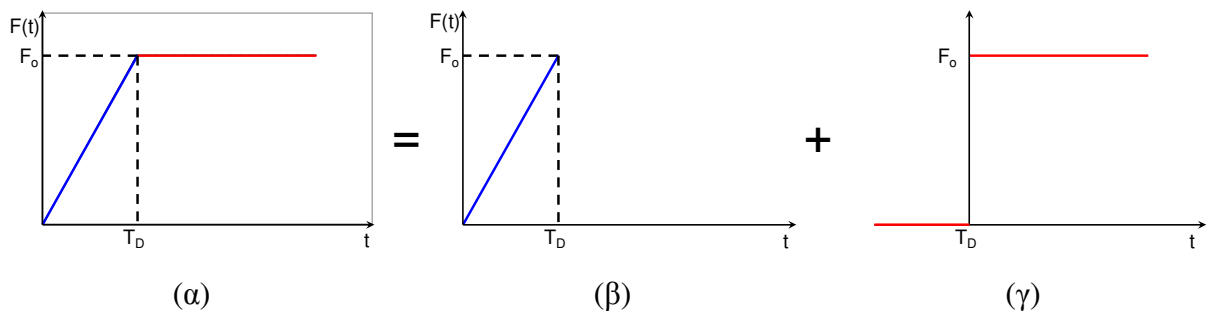
Αντικαθιστώντας την Εξ.(16) στην Εξ.(18) και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει:

$$0 + 0 + \omega^2 P'_o = \left(\frac{F_o}{m}\right) \quad (19)$$

Η Εξ.(19), επιλυόμενη ως προς P'_o , δίδει:

$$\omega^2 P'_o = \left(\frac{F_o}{m}\right) \Rightarrow P'_o = \left(\frac{1}{\omega^2}\right) \left(\frac{F_o}{m}\right) \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} P'_o = \left(\frac{F_o}{k}\right) \quad (20)$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών A_1' και A_2' , αξιοποιούμε τις αρχικές συνθήκες της 'Φάσης Β' (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση διέγερσης: (α) συνολική διέγερση, (β) 'Φάση Α', (γ) 'Φάση Β'

Ειδικότερα, προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι οι αρχικές συνθήκες της ‘Φάσης Β’ είναι οι τελικές συνθήκες της ‘Φάσης Α’. Δηλαδή, ισχύει:

$$\begin{aligned} x'(0) &= x(T_D) = x_D \\ \dot{x}'(0) &= \dot{x}(T_D) = v_D \end{aligned} \quad (21)$$

Με άλλα λόγια, η ‘Φάση Β’ μπορεί να θεωρηθεί ως μία νέα χρονική περίοδος, με αρχή μέτρησης χρόνου τη χρονική στιγμή T_D και με αρχικές συνθήκες αυτές που υπαγορεύει η Εξ.(20). Εάν $x_D = v_D = 0$, τότε το σύστημα στη ‘Φάση Β’ υφίσταται, απλά, μία στατική καταπόνηση. Σε διαφορετική περίπτωση, το σύστημα ‘κληρονομεί’ από τη ‘Φάση Α’ μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε υφίσταται μία δυναμική καταπόνηση (αρχικά θα ταλαντωθεί και μετά θα ηρεμήσει στη νέα θέση ισορροπίας). Συνδυάζοντας τις Εξ.(17,21), και μετά από εκτέλεση πράξεων, τελικά προκύπτει:

$$x'(t) = \underbrace{\left(\frac{F_o}{k}\right)}_{X_{ST}} \left\{ e^{-\zeta\omega t} [f_1 \cos(\omega_n t) + f_2 \sin(\omega_n t)] + 1 \right\} \quad (22)$$

όπου $f_1 = f_1(x_D)$ και $f_2 = f_2(x_D, v_D)$ είναι σταθεροί συντελεστές στην Εξ.(22).

Η φυσική ερμηνεία της Εξ.(22) είναι ενδιαφέρουσα. Ο πρώτος όρος της αγκύλης εκφράζει την αποσβενόμενη ταλάντωση την οποία θα εκτελέσει το σύστημα εξ αιτίας των αρχικών συνθηκών που κληρονομεί το σύστημα από τη ‘Φάση Α’. Ο δεύτερος όρος της αγκύλης πληροφορεί ότι η μετατόπιση του συστήματος θα ήταν ίση προς το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος, εάν οι αρχικές συνθήκες της ‘Φάσης Β’ ήταν μηδενικές. Με άλλα λόγια, η Εξ.(22) στην περίπτωση μη-μηδενικών αρχικών συνθηκών της ‘Φάσης Β’ εκφράζει την ταλάντωση του συστήματος γύρω από τη θέση του Ισοδύναμου Στατικού Πλάτους X_{ST} , ενώ στην περίπτωση μηδενικών αρχικών συνθηκών της ‘Φάσης Β’ εκφράζει τη σταθερή μετατόπιση X_{ST} του συστήματος.

Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο αποτελεί ο υπολογισμός της μέγιστης τιμής $x'(t)$ της Εξ.(22) καθώς και η χρονική στιγμή, στην οποία εμφανίζεται αυτή η μέγιστη τιμή. Πιο συγκεκριμένα, η Εξ.(22) γράφεται και ως εξής:

$$x'(t) = \underbrace{\left(\frac{F_o}{k}\right)}_{X_{ST}} \underbrace{e^{-\zeta\omega t} [f_1 \cos(\omega_n t) + f_2 \sin(\omega_n t)]}_{\text{συντελεστής εκθετικής μείωσης } X_{ST}} + \underbrace{\left(\frac{F_o}{k}\right)}_{X_{ST}} \quad (23)$$

Όπως έχουμε ήδη γνωρίσει (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03), το πλάτος της απόκριση ενός συστήματος με υποκρίσιμη απόσβεση, δηλαδή ενός συστήματος όπως το εξεταζόμενο, βαίνει εκθετικά μειούμενο. Στην Εξ.(23), το πλάτος X_{ST} βαίνει εκθετικά μειούμενο, με τον ρυθμό που ορίζει ο σημειούμενος συντελεστής εκθετικής μείωσης. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή του πρώτου όρου του αθροίσματος της Εξ.(23) σημειώνεται όταν έχουμε μηδενική μείωση,

δηλαδή όταν έχουμε μηδενική απόσβεση, και ισούται με X_{ST} . Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος ισούται σταθερά με X_{ST} , οπότε η μέγιστη τιμή $x'(t)$ της Εξ.(22) ισούται με:

$$\max \{x(t)\} = 2 \underbrace{\left(\frac{F_o}{k} \right)}_{X_{ST}} \quad (24)$$

Με άλλα λόγια, η μέγιστη τιμή $\max \{x(t)\}$ που μπορεί να λάβει το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με το διπλάσιο του Ισοδύναμου Στατικού Πλάτους X_{ST} . Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εάν θεωρήσουμε ότι $\zeta = 0$ και ακολουθήσουμε την τυπική μαθηματική οδό, δηλαδή εάν επιλύσουμε την εξίσωση:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad (25)$$

πρώτα για τη ‘Φάση Α’, έπειτα για τη ‘Φάση Β’ και επιλέξουμε τη μεγαλύτερη εκ των δύο τιμών. Διαισθητικά, αναμένουμε το μέγιστο πλάτος $\max \{x(t)\}$ να εμφανισθεί στη ‘Φάση Β’, διότι κατά τη διάρκεια της ‘Φάσης Α’ διαρκώς προσδίδεται ενέργεια στο σύστημα, ή, ισοδύναμα, ‘οι ταλαντώσεις συσσωρεύονται κατά τη ‘Φάση Α’’, κατάσταση η οποία ‘κληρονομείται’ στη ‘Φάση Β’. Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι η απλοποιητική παραδοχή μηδενικής απόσβεσης είναι ‘από την ασφαλή πλευρά’, εννοώντας ότι με αυτήν την παραδοχή θα προκύψει αποτέλεσμα συντηρητικότερο της πραγματικότητας. Ακολουθώντας τη μαθηματική οδό, μετά από εκτέλεση πράξεων, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\left(\frac{X_{\max}}{X_{ST}} \right) = 1 + \sqrt{\left[\frac{\sin(\omega T_D)}{\omega T_D} \right]^2 + \left[\frac{1}{\omega T_D} (1 - \cos(\omega T_D)) \right]^2} \quad (26)$$

όπου ως X_{\max} συμβολίζεται το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος, το οποίο, όπως φανερώνει η Εξ.(26), εξαρτάται από το γινόμενο της φυσικής ιδιοσυχνότητας ω του συστήματος επί τη χρονική διάρκεια T_D της μεταβατικής διέγερσης. Διευκρινίζεται ότι εάν θεωρήσουμε μη-μηδενική απόσβεση, τότε είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί η ίδια διαδικασία, απλά η τελική εξίσωση θα είναι διαφορετική από την Εξ.(26). Επίσης, διευκρινίζεται ότι η Εξ.(26) ισχύει για τη ‘Φάση Β’ (εάν επιλύσουμε την Εξ.(25) και για τις δύο Φάσεις, θα διαπιστώσουμε ότι στη ‘Φάση Β’ εμφανίζεται η μεγαλύτερη τιμή του πλάτους της ταλάντωσης).

Μεταβατική Διέγερση σε μονοβάθμιο σύστημα $m-c-k$

Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει την απόκριση ενός μονοβάθμιου συστήματος $m-c-k$ όταν σε αυτό επιβάλλεται είτε αρχική συνθήκη μετατόπισης/ταχύτητας, είτε κινηματική διέγερση, είτε αρμονική διέγερση. Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η επιβολή διγραμμικής μεταβατικής διέγερσης της μορφής του Σχήματος 2 στο εν λόγω σύστημα $m-c-k$. Για

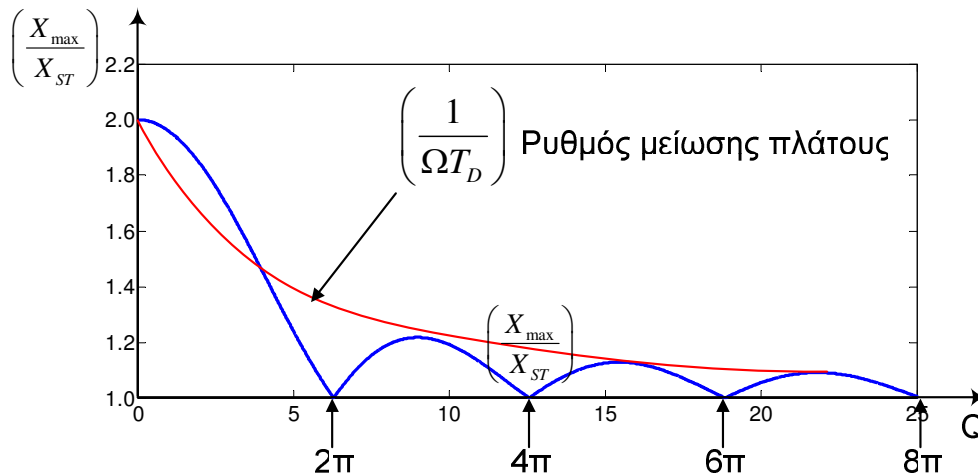
αυτήν την περίπτωση, μέσω της ανάλυσης της προηγούμενης ενότητας, καταλήξαμε στην ακόλουθη έκφραση για το λόγο του μεγίστου πλάτους ταλάντωσης προς το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος:

$$\left(\frac{X_{\max}}{X_{ST}}\right) = 1 + \sqrt{\left[\frac{\sin(\omega T_D)}{\omega T_D}\right]^2 + \left[\frac{1}{\omega T_D}(1 - \cos(\omega T_D))\right]^2} \quad (27)$$

όπου X_{\max} είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος, X_{ST} είναι το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος, ω είναι η φυσική ιδιοσυχνότητα του συστήματος και T_D η χρονική διάρκεια της μεταβατικής διέγερσης. Όπως καθίσταται φανερό από την Εξ.(27), το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι συνάρτηση **μόνον του γινομένου** της φυσικής ιδιοσυχνότητας ω του συστήματος επί τη χρονική διάρκεια T_D της μεταβατικής διέγερσης. Ορίζουμε το εν λόγω γινόμενο ως Q , δηλαδή ισχύει:

$$Q = \omega T_D \xrightarrow{\omega = \left(\frac{2\pi}{T}\right)} Q = \left(\frac{2\pi}{T}\right) T_D \Rightarrow Q = 2\pi \left(\frac{T_D}{T}\right) \quad (28)$$

Όπως φαίνεται από την Εξ.(28), η ποσότητα Q ισούται με το λόγο της χρονικής διάρκειας T_D της μεταβατικής διέγερσης προς τη φυσική ιδιοπερίοδο T του θεωρούμενου συστήματος. Συνεπώς, από τις Εξ.(27,28) έπεται ότι το πλάτος της ταλάντωσης ενός συστήματος εξαρτάται αποκλειστικά από τον λόγο Q . Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η γραφική παράσταση του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) συναρτήσει της ποσότητας Q (βλ. Σχήμα 4)

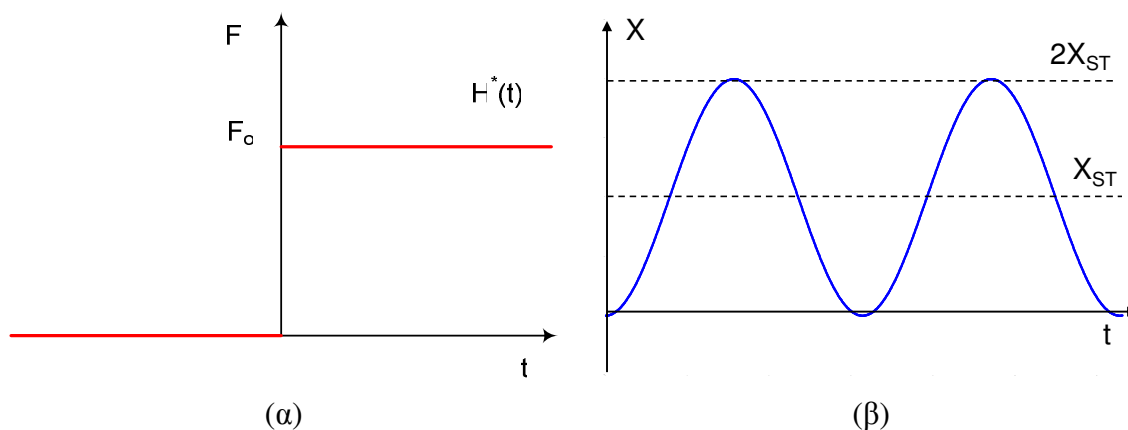


Σχήμα 4: Γραφική παράσταση του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) συναρτήσει της ποσότητας Q

Από το Σχήμα 4 προκύπτουν πολλές και ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις:

- Η μέγιστη τιμή του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) είναι 2. Δηλαδή, το μέγιστο πλάτος X_{\max} της ταλάντωσης το πολύ να γίνει διπλάσιο του Ισοδύναμου Στατικού Πλάτους X_{ST} . Αυτή η παρατήρηση έρχεται σε συμφωνία με την αντίστοιχη εκτίμηση, η οποία διατυπώθηκε προηγουμένως (βλ. σελ.6.11).

- Η μέγιστη τιμή του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) εμφανίζεται μόνον όταν $Q = 0$. Με άλλα λόγια, η μέγιστη τιμή εμφανίζεται όταν η φυσική ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος τείνει στο μηδέν (ισοδύναμα, η φυσική ιδιοπερίοδος T του συστήματος τείνει στο άπειρο) ή όταν η χρονική διάρκεια T_D της μεταβατικής διέγερσης τείνει στο μηδέν. Πρακτικά, αυτό μπορεί να συμβεί όταν επιβάλλουμε απότομα ένα φορτίο σε ένα δυναμικό σύστημα μηδενικής απόσβεσης. Από μαθηματικής απόψεως, η απότομη επιβολή μία διέγερσης περιγράφεται από τη λεγόμενη ‘συνάρτηση Heaviside’ (βλ. Σχήμα 5α). Η συγκεκριμένη συνάρτηση εμφανίζει ασυνέχεια στη χρονική στιγμή $t=0$. Με τον τρόπο αυτόν, δηλώνεται μαθηματικά η *ακαριαία* μεταβολή μίας ποσότητας, η οποία, στην προκειμένου περίπτωση, αντιστοιχεί σε εξωτερική διέγερση. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι εξετάζουμε τη συνάρτηση Heaviside *σε όλο το χρονικό πεδίο ορισμού* της (και όχι μόνον σε εκείνο το χρονικό διάστημα στο οποίο έχει μη-μηδενική τιμή). Ως εκ τούτου, η απόκριση ενός συστήματος σε διέγερση Heaviside είναι ταλαντωτική. Στο Σχήμα 5β απεικονίζεται η περίπτωση απόκρισης για $Q = 0$.



Σχήμα 5: (α) συνάρτηση Heaviside $H^*(t)$ και (β) γραφική παράσταση της απόκρισης για διέγερση Heaviside και με $Q = 0$

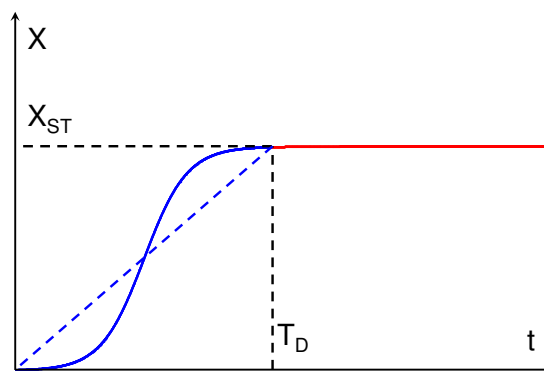
- Η ελάχιστη τιμή του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) είναι 1. Δηλαδή, το σύστημα, υπό συνθήκες, είναι δυνατόν να παραμείνει ακίνητο με μετατόπιση ίση με το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος X_{ST} . Για τιμές Q σημαντικά διαφορετικές από $Q = k(2\pi), k \in \mathbb{Z}_+$, ο λόγος (X_{\max}/X_{ST}) βαίνει μειούμενος καθώς ο λόγος Q αυξάνεται. Θεωρητικά, όταν λόγος Q τείνει στο άπειρο, ο λόγος (X_{\max}/X_{ST}) τείνει στη μονάδα. Αυτό συμβαίνει κατά την επιβολή χρονικά σταθερής δύναμης ή κατά την εξαιρετικά αργή επιβολή, σε σχέση με την φυσική ιδιοπερίοδο της κατασκευής, μιας χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης.
- Η ελάχιστη τιμή του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) εμφανίζεται επίσης για τιμές Q ίσες με ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας (2π) . Με άλλα λόγια, το σύστημα είναι δυνατόν να παραμείνει ακίνητο όταν ο λόγος της χρονικής διάρκειας T_D της μεταβατικής διέγερσης

προς τη φυσική ιδιοπερίοδο T του θεωρούμενου συστήματος είναι ακέραιος αριθμός (βλ. Εξ(28)).

- Η κλίση του λόγου (X_{\max}/X_{ST}) γύρω από τις τιμές $Q = k(2\pi), k \in \mathbb{Z}_+$ είναι πολύ μεγάλη. Αυτό σημαίνει ότι εάν η εκτίμησή μας για την τιμή $Q = k(2\pi), k \in \mathbb{Z}_+$ αποκλίνει έστω και λίγο από την ακριβή τιμή, τότε το σύστημα θα εμφανίσει μεγάλα πλάτη ταλάντωσης, ακριβώς λόγω της πολύ οξείας μορφής που έχει η γραφική παράσταση (X_{\max}/X_{ST}) vs Q στις θέσεις $Q = k(2\pi), k \in \mathbb{Z}_+$ (βλ. Σχήμα 4). Για το λόγο αυτό, είναι τεχνικά δύσκολο να ‘πιάσουμε’ ακριβώς τις τιμές $Q = k(2\pi), k \in \mathbb{Z}_+$ και να πετύχουμε πλήρη περιστολή των ταλαντώσεων.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, προκύπτει ότι οι διαφορετικοί τρόποι ελαχιστοποίησης του πλάτους ταλάντωσης σε ένα σύστημα είναι οι εξής:

1. Επιδιώκουμε ο λόγος Q να τείνει στο άπειρο, π.χ. δεν επιβάλλουμε φορτία στο σύστημα με αργό και σταδιακό τρόπο και όχι με απότομο (κρουστικό) τρόπο.
2. Επιδιώκουμε ο λόγος Q να καταστεί ίσος με $Q = k(2\pi), k \in \mathbb{Z}_+$ και ειδικότερα ίσος με $k = 1$, οπότε έχουμε και τη συντομότερη μεταβατική περίοδο, Αυτό σημαίνει ότι εμείς ρυθμίζουμε κατάλληλα τη διάρκεια της μεταβατικής διέγερσης, ώστε ο χρόνος μίας ταλάντωσης του συστήματος (δηλαδή, η φυσική ιδιοπερίοδος T του συστήματος) να τελειώνει σε χρόνο T_D και να μην ‘κληρονομείται’ κάποια ταλάντωση σε επόμενη χρονική φάση (κληρονομούνται μηδενικές αρχικές συνθήκες). Αυτό αποτυπώνεται γραφικά στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Μεταβατική απόκριση με μοναδιαίο λόγο (T_D/T)

Τεχνολογικές εφαρμογές

Η σημασία της αποφυγής εμφάνισης μεγάλου πλάτους μεταβατικής ταλάντωσης είναι καθοριστική σε όλα τα δυναμικά συστήματα, με χαρακτηριστικά τεχνολογικά παραδείγματα την επισκευή κατασκευών στο διάστημα, το χειρισμός γερανών και η διαχείριση υδραυλικών δικτύων (π.χ. δίκτυα ύδρευσης).

Στις διαστημικές εφαρμογές, όταν οι αστροναύτες πραγματοποιούν κάποια εργασία εκτός διαστημοπλοίου (διαστημικού οχήματος), όπως επισκευές ή χειρισμούς βραχιόνων, προσέχουν ιδιαίτερα τις κινήσεις τους (π.χ. δουλεύουν αργά), προκειμένου να αποφύγουν να θέσουν σε αέναη ταλάντωση κάποιο δομικό στοιχείο (π.χ. βραχίονας οχήματος), το οποίο για λόγους μείωσης βάρους, είναι ελαφρύ και εύκαμπτο, ενώ επιπρόσθετα απουσιάζει και ο αέρας, η τριβή με τον οποίο προσφέρει σημαντική ικανότητα απόσβεσης ταλαντώσεων των κατασκευών.

Ο χειρισμός ενός γερανού αποτελεί ένα ακόμα χαρακτηριστικό τεχνολογικό παράδειγμα σχετικά με την καθοριστική σημασία του πλάτους των ταλαντώσεων. Ένας γερανός είναι μία ανυψωτική και μεταφορική μηχανή, η οποία χρησιμοποιείται κατά κόρον σε διάφορους χώρους εργασίας, όπως ναυπηγεία, λατομεία, εργοστάσια, κ.ο.κ. Ένα σοβαρό πρόβλημα χειρισμού αφορά στη μεταφορά του ανηρτημένου φορτίου (δηλαδή, του φορτίου που είναι κρεμασμένο στο γάντζο του γερανού). Ειδικότερα, κατά την επιτάχυνση, το ανηρτημένο φορτίο, λόγω αδρανείας, τείνει να ‘μένει πιο πίσω’ από τον κινούμενο γερανό. Επίσης, κατά την επιβράδυνση, το εν λόγω φορτίο, πάλι λόγω αδρανείας, τείνει να συνεχίσει να κινείται. Ως αποτέλεσμα αυτής της αδρανειακής συμπεριφοράς, ο γερανός, πολύ απλοποιητικά, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ένας μονοβάθμιος ταλαντωτής (εκκρεμές) με ιδιοπερίοδο T ίση με¹:

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)} \quad (29)$$

όπου L είναι το ελεύθερο μήκος του συρματοσχοίνου και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Όσο δε, μακρύτερο είναι το συρματοσχοίνο τόσο πιο έντονη θα είναι και η ταλάντωση του φορτίου. Για παράδειγμα, όταν $L = 3m$ (μικρό μήκος συρματοσχοίνου), η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T_{3m} = 2\pi \sqrt{3/9.81} \Rightarrow T_{3m} \approx 3.47 \text{ sec} \quad (30)$$

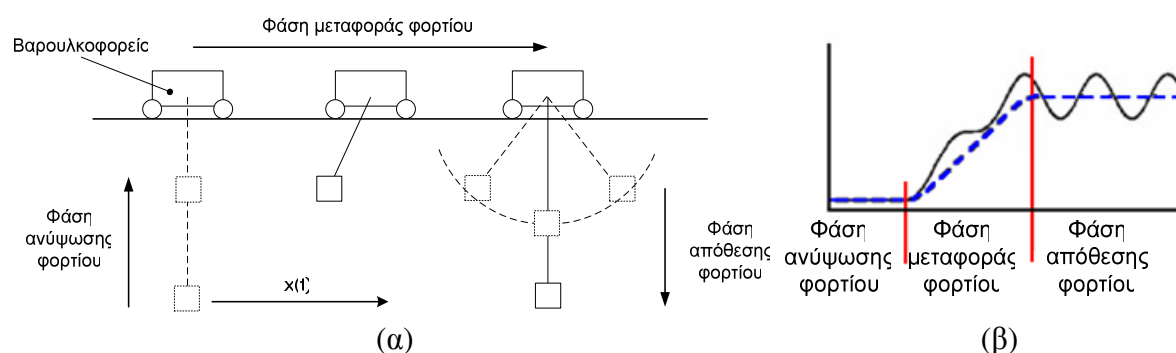
Αντίστοιχα, όταν $L = 25m$ (μεγάλο μήκος συρματοσχοίνου), η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T_{25m} = 2\pi \sqrt{25/9.81} \Rightarrow T_{25m} \approx 10.03 \text{ sec} \quad (31)$$

Λόγω, λοιπόν, της αδρανειακής συμπεριφοράς του, το ανηρτημένο φορτίο θα εμφανίζει ταλαντωτική κίνηση. Ωστόσο, κατά την διαδικασία μεταφοράς και απόθεσης ενός ανηρτημένου φορτίου είναι εντελώς ανεπιθύμητη η εμφάνιση ταλαντώσεων. Αρκετά διαφωτιστικό είναι το Σχήμα 7. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 7α απεικονίζονται οι βασικές φάσεις στην ανύψωση/μεταφορά φορτίου. Αρχικά, το βαρουλκοφορείο είναι ακίνητο και το,

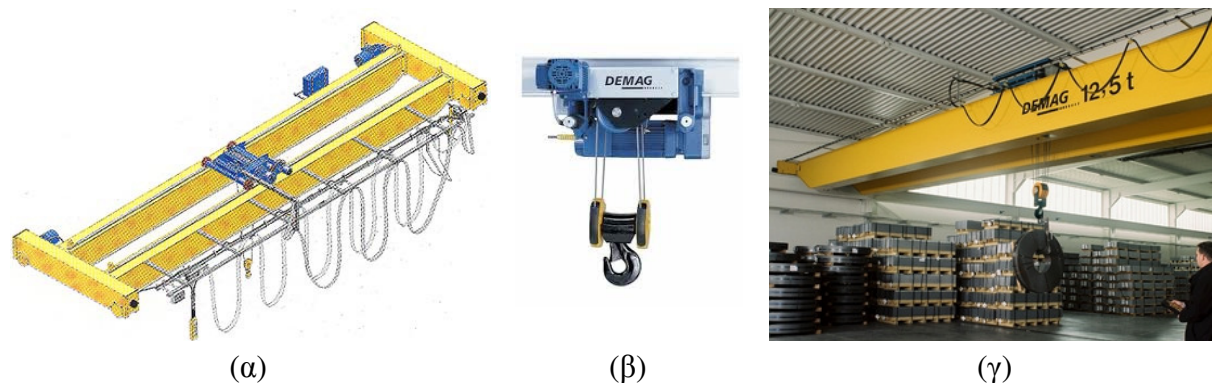
¹ Η ακριβής λύση είναι: $T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)} \left(1 + \frac{1}{16} \theta^2 + \frac{11}{3072} \theta^4 + \frac{173}{737280} \theta^6 + \dots\right)$. Η Εξ.(29) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για μικρές γωνίες ταλάντωσης θ .

ανηρτημένο στο γάντζο του βαρούλκου, φορτίο (ανηρτημένη μάζα) ανυψώνεται σταδιακά.(φάση ανύψωσης φορτίου). Στη συνέχεια το βαρουλκοφορείο κινείται και το ανηρτημένο φορτίο, λόγω αδρανείας, ακολουθεί την κίνηση του βαρουλκοφορείου με ελαφρά υστέρηση (φάση μεταφοράς φορτίου). Ακινητοποιούμε το βαρουλκοφορείο στην επιθυμητή θέση, αλλά το ανηρτημένο φορτίο, λόγω αδρανείας, θα εκτελέσει ταλαντωτική κίνηση. Αφού ηρεμήσει το ανηρτημένο φορτίο, το χαμηλώνουμε σταδιακά στην επιθυμητή θέση (φάση απόθεσης φορτίου). Η ταλαντωτική κίνηση του ανηρτημένου φορτίου καθ' όλη τη διάρκεια της προαναφερόμενης διαδικασίας παρουσιάζεται ως μαύρη, συνεχής γραμμή στο Σχήμα 7β.



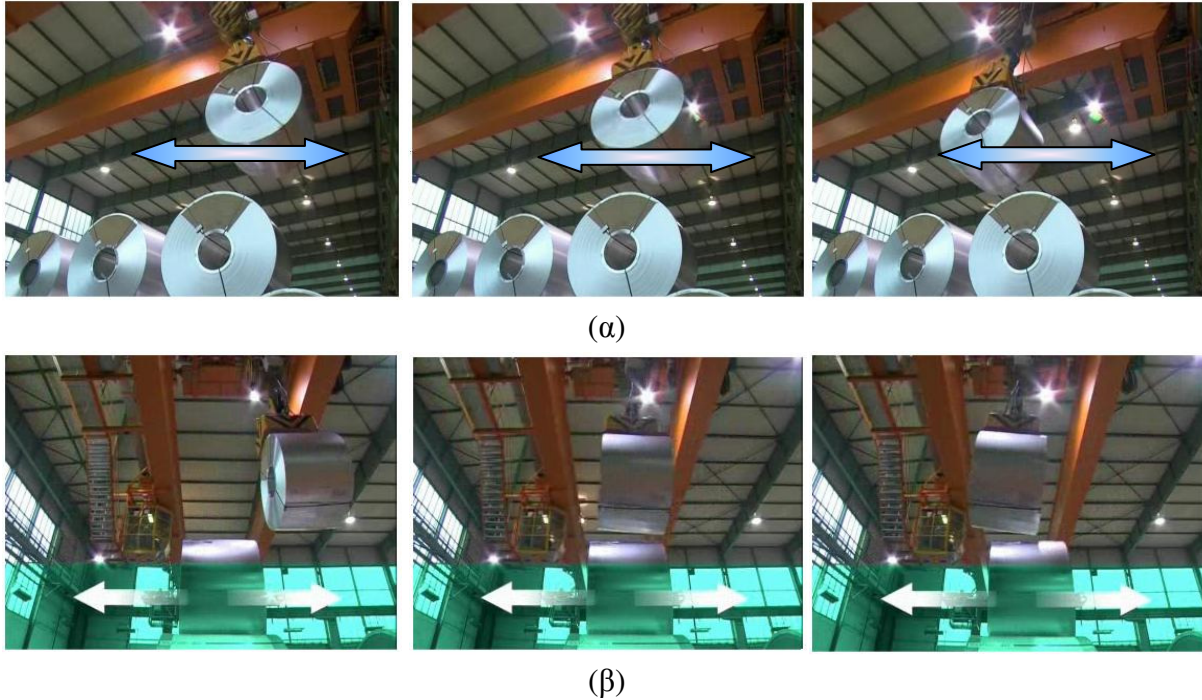
Σχήμα 7: Σχηματική απεικόνιση συμπεριφοράς ανηρτημένου φορτίου: (α) Μεταβατική απόκριση με μοναδιαίο λόγο (T_D/T)

Προς αποφυγή της ταλάντωσης του ανηρτημένου φορτίου, ο χειριστής του γερανού έχει δύο βασικές επιλογές: ανυψώνει το φορτίο όσο το δυνατόν ψηλότερα, ώστε να μειωθεί το ελεύθερο μήκος του συρματοσχοίνου, άρα να μειωθεί η ιδιοπερίοδος του συστήματος (βλ. Εξ.(30,31)), και επιταχύνει/επιβραδύνει το γερανό σε χρόνους πολλαπλάσιους της ιδιοπεριόδου του συστήματος, ώστε να εξασφαλισθεί η απόκριση, άρα και τα πλεονεκτήματα, του Σχήματος 6. Το αποτέλεσμα ενός τέτοιου χειρισμού (χειρισμός άρσης/ακύρωσης ταλαντωτικής συμπεριφοράς ανηρτημένου φορτίου) παρουσιάζεται ως μπλε, διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 7β.



Σχήμα 8: (α) Σχηματική απεικόνιση γερανογέφυρας διπλού φορέα, (β) βαρουλκοφορείο και (γ) ανύψωση φορτίου με γερανογέφυρα

Για την καλύτερη κατανόηση αυτού του τεχνολογικού παραδείγματος, παρατίθενται δύο επιπρόσθετα Σχήματα. Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται μία τυπική μορφή τύπου γερανογέφυρας ‘διπλού φορέα με επικαθήμενο βαρουλκοφορείο’, μία τυπική μορφή βαρουλκοφορείου καθώς και μία γερανογέφυρα ‘διπλού φορέα με επικαθήμενο βαρουλκοφορείο’ σε λειτουργία. Στο Σχήμα 9 παρατίθενται χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την ταλάντωση φορτίου εγκάρσια και παράλληλα ως προς τη διεύθυνση κίνησης της γερανογέφυρας.



Σχήμα 9: Ταλάντωση φορτίου (α) εγκάρσια και (β) παράλληλα ως προς τη διεύθυνση κίνησης της γερανογέφυρας

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί κάθε υδραυλικό δίκτυο. Εάν η οι αντλίες του δικτύου τίθενται σε λειτουργία ή διακόπτεται η λειτουργία τους απότομα, τότε το δίκτυο υφίσταται καταπόνηση από κρουστικές ταλαντώσεις λόγω απότομης μεταβολής της υδραυλικής πίεσης. Η ομαλή λειτουργία του δικτύου εξασφαλίζεται όταν ο ρυθμός με τον οποίο ανοίγουν οι βάνες ή τίθενται σε λειτουργία οι αντλίες του δικτύου είναι επαρκώς ομαλός. Με άλλα λόγια, φροντίζουμε η διάρκεια της μεταβατικής περιόδου να είναι τέτοια, ώστε να εξασφαλίζεται η απόκριση του Σχήματος 6. Τεχνικά, ελέγχουμε τη λειτουργία των αντλιών με κατάλληλα συστήματα (soft starters, inverters) ρύθμισης της ταχύτητας περιστροφής της αντλίας.

Τέλος, διευκρινίζεται ότι ο τομέας του τρόπου ελέγχου της διάρκειας των μεταβατικών διεγέρσεων έχει αναπτυχθεί πολύ τα τελευταία χρόνια, με αποτέλεσμα τη διατύπωση και ανάπτυξη διαφόρων σχετικών μεθοδολογιών. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται και εκείνες που χρησιμοποιούν κατάλληλες ‘καμπύλες οδήγησης’ (συναρτήσεις οδήγησης), οι οποίες αποτελούν και ένα σύγχρονο αντικείμενο έρευνας.