ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

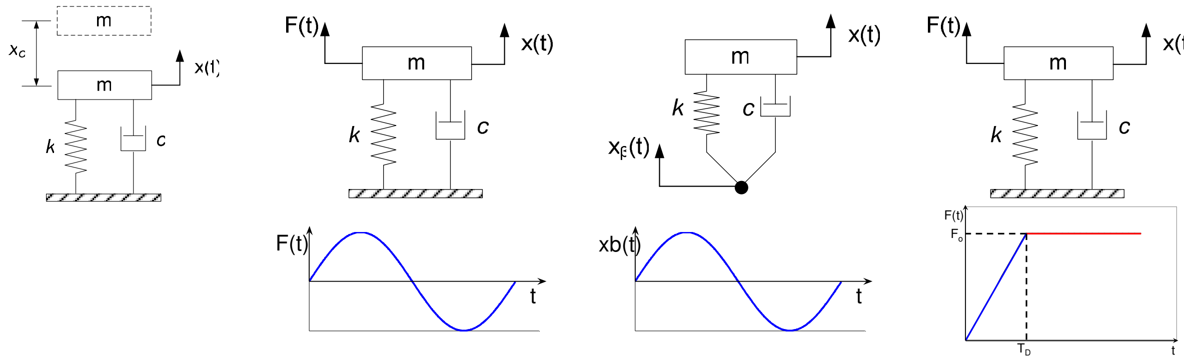
Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 7η
Ενεργειακή Αρχή Lagrange –
Μητρωϊκή γραφή Εξισώσεων Ισορροπίας Δυναμικού Συστήματος

Γενικά

Μέχρι στιγμής, έχουμε εξετάσει την απόκριση ενός τυπικού μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ όταν αυτό εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις και όταν αυτό εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Με τη βοήθεια των μαθηματικών, εξετάσαμε μερικές φυσικές έννοιες, οι οποίες είναι βασικές στη Δυναμική. Ειδικότερα, ορίσαμε την έννοια της φυσικής συχνότητας ή ιδιοσυχνότητας ενός φυσικού συστήματος, ως τη συχνότητα με την οποία το σύστημα πραγματοποιεί ελεύθερες ταλαντώσεις, και την έννοια της φυσικής περιόδου ή ιδιοπεριόδου ενός φυσικού συστήματος, ως το χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση μίας ελεύθερης ταλάντωσης. Επίσης, διαπιστώσαμε ότι η σχέση μεταξύ της περιόδου επανάληψης των εξωτερικών διεγέρσεων και της ιδιοπεριόδου ενός φυσικού συστήματος καθορίζει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, εξετάσαμε τέσσερεις τυπικές περιπτώσεις διέγερσης (βλ. Σχήμα 1):

- επιβολή αρχικών συνθηκών μετατόπισης και ταχύτητας (Σχήμα 1α),
- επιβολή εξωτερικής, αρμονικής δύναμης διέγερσης (Σχήμα 1β),
- επιβολή εξωτερικής, κινηματικής συνθήκης (Σχήμα 1γ), και
- επιβολή εξωτερικής, μεταβατικής δύναμης διέγερσης (Σχήμα 1δ).



(α) (β) (γ) (δ)

Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση εξετασθέντων περιπτώσεων διέγερσης δυναμικού συστήματος $m-c-k$ ενός βαθμού ελευθερίας: (α) με επιβολή οριακής συνθήκης, (β) με επιβολή αρμονικής διέγερσης, (γ) με επιβολή κινηματικής αρμονικής συνθήκης και (δ) με επιβολή μεταβατικής διέγερσης.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η μαθηματική προσέγγιση για την ανάλυση του συστήματος ήταν η ίδια, δηλαδή:

- καταγραφή της Διαφορικής Εξίσωσης (Δ.Ε.) ισορροπίας του συστήματος,
- θεώρηση της γενικής λύσεως της (Δ.Ε.) ως άθροισμα μίας μερικής λύσεως (η οποία περιγράφει τη μόνιμη απόκριση του συστήματος) και μίας ομογενούς λύσεως (η οποία περιγράφει τη μεταβατική απόκριση του συστήματος), όπου η μορφή της μερικής και της ομογενούς καθορίζεται από τη φύση της διέγερσης,

- αντικατάσταση των θεωρουμένων λύσεων στη (Δ.Ε.) και υπολογισμός των εμπλεκομένων σταθερών βάσει των κινηματικών / δυναμικών συνθηκών που επικρατούν κατά τη λειτουργία του συστήματος.

Όλα τα παραπάνω εξετάσθηκαν στην περίπτωση ενός τυπικού δυναμικού συστήματος $m-c-k$ ***με ένα Βαθμό Ελευθερίας*** (μονοβάθμιο σύστημα), δηλαδή σε σύστημα του οποίου η δυναμική συμπεριφορά (απόκριση) περιγράφεται από μία ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός ελευθερίας = ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή). Ωστόσο, στην πραγματικότητα (φυσικά παραδείγματα και τεχνολογικές εφαρμογές), τα δυναμικά συστήματα είναι πολυβάθμια. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα προκειμένου να προσεγγίσουμε, απλοποιητικά, την πραγματικότητα, αλλά σε αυτήν την περίπτωση η προκύπτουσα απόκριση θα είναι, ομοίως, μία απλοποιητική προσέγγιση της πραγματικής απόκρισης. Αυτό, σε πολλές περιπτώσεις, δεν επαρκεί. Για παράδειγμα, στην Εκπαιδευτική Ενότητα 04 προσεγγίσαμε, απλοποιητικά, ένα τυπικό επιβατικό όχημα ως ένα σύστημα που διαθέτει μία συγκεντρωμένη μάζα, ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, ένα τέτοιο όχημα πραγματοποιεί μία σύνθετη ταλάντωση εξ αιτίας του γεγονότος ότι διαθέτει τέσσερεις τροχούς, διαφορετικό σύστημα ανάρτησης για τους πρόσθιους τροχούς και διαφορετικό σύστημα ανάρτησης για τους οπίσθιους τροχούς. Χρησιμοποιώντας ένα απλοποιητικό μοντέλο, δεν είναι δυνατή η προσομοίωση της εν λόγω σύνθετης ταλάντωσης, κάτι που περιορίζει κατά πολύ τη μελετητική μας ικανότητα, άρα και τη σχεδιαστική μας δυνατότητα. Συνεπώς, το επόμενο λογικό βήμα στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων είναι η επέκταση της γνώσης, που αποκτήθηκε εξετάζοντας το τυπικό μονοβαθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$, σε τυπικά πολυβάθμια δυναμικά συστήματα $m-c-k$. Όπως θα διαπιστώσουμε, πολλές από τις έννοιες που γνωρίσαμε, όπως η έννοια της ιδιοσυχνότητας και της ιδιοπεριόδου, ισχύουν και στα πολυβάθμια δυναμικά συστήματα. Η καινούργια έννοια που θα συναντήσουμε στα πολυβάθμια δυναμικά συστήματα είναι η έννοια του ιδιοανύσματος (ή ιδιοδιανύσματος ή φυσικής ιδιομορφής του συστήματος), η οποία εκφράζει τον φυσικό τρόπο ταλάντωσης του συστήματος.

Πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$

Το απλούστερο πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$ είναι το διβάθμιο σύστημα, το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 2α. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για δύο μονοβάθμια συστήματα $m_1-c_1-k_1$ και $m_2-c_2-k_2$, αντίστοιχα, τα οποία είναι μεταξύ τους συνδεδεμένα με τέτοιον τρόπο, ώστε η κίνηση της μάζας m_1 να είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της μάζας m_2. Για την καλύτερη κατανόηση αυτής της απαίτησης, παρατίθεται στο Σχήμα 2β μία άλλη δυνατή σύνδεση δύο μονοβάθμιων συστημάτων $m_1-c_1-k_1$ και $m_2-c_2-k_2$, στην οποία οι μάζες m_1 και m_2 είναι μεταξύ τους συνδεδεμένες μέσω ενός μοχλού πρώτου είδους, δηλαδή μέσω μίας ***άκαμπτης*** δοκού, αρθρωμένης σε κάποιο σημείο της πλην των άκρων της. Σε αυτήν την περίπτωση, εάν μετακινηθεί η μάζα m_1, τότε, μέσω του κανόνα του μοχλού (δηλαδή μέσω μίας ***κινηματικής*** σχέσης), καθορίζεται πλήρως και η κίνηση της μάζας m_2.

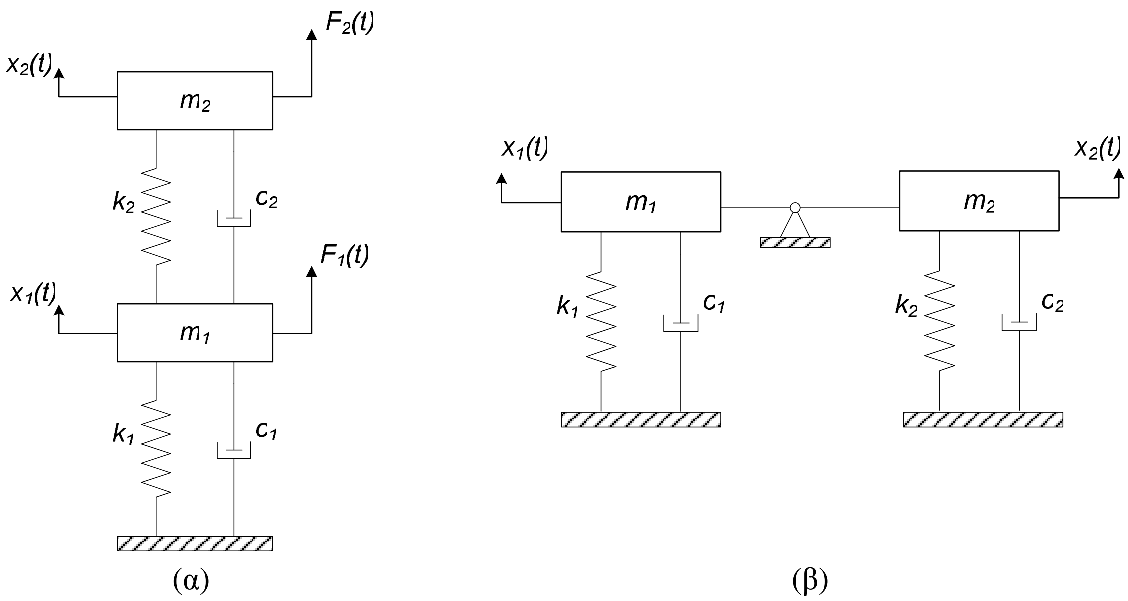
Κατ’ αντιστοιχία, εάν μετακινηθεί η μάζα m_2, τότε, μέσω του κανόνα του μοχλού, καθορίζεται πλήρως και η κίνηση της μάζας m_1. Καθίσταται, λοιπόν, φανερό ότι η απόκριση x_1 της μάζας m_1 και η απόκριση x_2 της μάζας m_2 ***δεν είναι ανεξάρτητα***, μεταξύ τους, ***κινηματικά*** μεγέθη. Συνεπώς, για την περιγραφή της απόκρισης του συστήματος του Σχήματος 2β, επαρκεί ένα μόνο κινηματικό μέγεθος (είτε η μετατόπιση x_1 είτε η μετατόπιση x_2). Ισοδύναμα, το σύστημα του Σχήματος 2β είναι μονοβάθμιο.

*Ως **Βαθμός Ελευθερίας** ενός συστήματος ορίζεται ο **κινηματικός τρόπος**, με τον οποίο το σύστημα είναι δυνατόν να εκτελεί ανεξάρτητες κινηματικές κινήσεις.*

Επιστρέφοντας στο Σχήμα 2α, παρατηρούμε τα εξής:

- εάν η μάζα m_1 διατηρηθεί ακίνητη, τότε η μάζα m_2 είναι δυνατόν να μετακινηθεί, και
- εάν η μάζα m_2 διατηρηθεί ακίνητη, τότε η μάζα m_1 είναι δυνατόν να μετακινηθεί.

Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα του Σχήματος 2α εμφανίζει δύο ανεξάρτητες κινηματικές κινήσεις, ή, ισοδύναμα, το σύστημα του Σχήματος 2α είναι διβάθμιο.



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση δυναμικού συστήματος $m-c-k$ (α) δύο βαθμών ελευθερίας και (β) ενός βαθμού ελευθερίας

Τονίζεται ιδιαιτέρως ότι, στο **Σχήμα 2α**, οι μετατοπίσεις x_1 και x_2 συνδέονται μεταξύ τους μέσω της ***δυναμικής*** συμπεριφοράς του συστήματος και ***όχι*** μέσω της ***κινηματικής*** του συμπεριφοράς. Αντιθέτως, στο **Σχήμα 2β**, οι μετατοπίσεις x_1 και x_2 συνδέονται μεταξύ τους λόγω της ***κινηματικής*** συμπεριφοράς του συστήματος. Επίσης, διευκρινίζεται ότι η διαδικασία που αναφέρθηκε προηγουμένως (ακινητοποίηση μίας μάζας και έλεγχος της δυνατότητας μετακίνησης των υπολοίπων μαζών) αποτελεί το ***φυσικό*** κριτήριο με το οποίο εκτιμούμε το πλήθος των βαθμών ελευθερίας ενός συστήματος (σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα περί μοντελοποίησης πολυβάθμιων δυναμικών συστημάτων, θα γνωρίσουμε έναν συστηματικό τρόπο εντοπισμού των Β.Ε. ενός συστήματος).

Για τη μελέτη του δυναμικού συστήματος του Σχήματος 2α, σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει σε προηγούμενα μαθήματα (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01 & 02), χρειάζεται η μαθηματική περιγραφή της κατάστασης ισορροπίας του συστήματος. Ισοδύναμα, χρειάζεται η καταγραφή των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος. Προς τούτο, είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα σε κάθε μία από τις μάζες του συστήματος. Ωστόσο, σε πολυβάθμια δυναμικά συστήματα, αυτή είναι μία διαδικασία αρκετά επίπονη και δύσκολη. Αντί, λοιπόν, της Νευτώνειας προσέγγισης, προτιμούμε την ενεργειακή προσέγγιση κατά Lagrange, η οποία χαρακτηρίζεται από τρία σημαντικά πλεονεκτήματα:

1. Αποτελεί την πλέον γενική ενεργειακή διατύπωση, στην οποία εμπλέκονται όλες οι μορφές ενέργειας και ισχύος που εμφανίζονται στα δυναμικά συστήματα (δυναμική ενέργεια, κινητική ενέργεια, διάχυση ισχύος και εξωτερική ισχύς του συστήματος). Συνεπώς, εφαρμόζεται σε όλες, ανεξαιρέτως, τις περιπτώσεις, όπως σε γραμμική και μη-γραμμικά μηχανικά συστήματα, σε υδραυλικά συστήματα, σε ηλεκτρικά συστήματα καθώς και σε συνδυασμούς αυτών (συζευγμένα συστήματα).
2. Εμπλέκει μόνο ενεργειακές ποσότητες, οι οποίες αποτελούν βαθμωτά μεγέθη. Η συνολική ενέργεια του συστήματος δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλή πρόσθεση αυτών των βαθμωτών μεγεθών. Αντιθέτως, οι δυνάμεις, ως διανυσματικά μεγέθη, απαιτούν διανυσματικές μεταξύ τους πράξεις, οι οποίες, σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ. εύκαμπτος ρομποτικός βραχίονας) είναι, σαφώς, πιο σύνθετες.
3. Οι ενεργειακές ποσότητες σχετίζονται με μαθηματικές εκφράσεις τετραγωνικής μορφής, συνεπώς το τελικό ενεργειακό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία αναγράφονται οι μετατοπίσεις σε μία μεταβολή (αυτό θα καταστεί πιο κατανοητό σε επόμενη παράγραφο). Αντιθέτως, η διαχείριση δυνάμεων απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στην προσήμανσή τους.

Διευκρινίζεται, ότι με την Ενεργειακή Αρχή Lagrange καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή θα καταλήξουμε στις Νευτώνειες εξισώσεις ισορροπίας. Απλά, αυτό θα επιτευχθεί με έναν πολύ απλούστερο τρόπο. Όπως είχε αναφερθεί στην Εκπαιδευτική Ενότητα 01, η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}_{\substack{\text{Όρος αδράνειας}\\ \text{(αντιστοιχεί σε}\\ \text{δυνάμεις}\\ \text{αδρανείας } F_m\text{)}}} \underbrace{-\frac{\partial L}{\partial q}}_{\substack{\text{Όρος ελαστικότητος}\\ \text{(αντιστοιχεί σε}\\ \text{δυνάμεις ελατηρίου}\\ F_k\text{)}}} \underbrace{+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}}_{\substack{\text{Όρος διάχυσης}\\ \text{(αντιστοιχεί σε}\\ \text{δυνάμεις}\\ \text{απόσβεσης } F_c\text{)}}} = \underbrace{\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}}_{\substack{\text{Όρος διέγερσης}\\ \text{(αντιστοιχεί σε}\\ \text{εξωτερικές}\\ \text{δυνάμεις } F\text{)}}} \qquad (1)}$$

όπου q είναι ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας) του συστήματος, ως P_C συμβολίζεται η ενέργεια, η οποία διαχέεται λόγω της απόσβεσης του συστήματος, ως P_t συμβολίζεται η ισχύς που προσφέρεται στο σύστημα από τις εξωτερικές δυνάμεις και ως L συμβολίζεται η αποκαλούμενη ‘ενεργειακή μεταβλητή Lagrange’. Εξ ορισμού, ισχύει:

$$L = T - U \tag{2}$$

όπου ως T συμβολίζεται η κινητική ενέργεια του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στις μάζες του συστήματος, ενώ ως U συμβολίζεται η δυναμική ενέργεια, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια του συστήματος. Η Εξ.(1) γράφεται τόσες φορές, όσες είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές q που διαθέτει το σύστημα. Ισοδύναμα, η Εξ.(1) γράφεται τόσες φορές, όσοι είναι οι Βαθμοί Ελευθερίας του εξεταζομένου συστήματος. Στην προκειμένη περίπτωση (βλ. Σχήμα 2α), το εξεταζόμενο σύστημα είναι διβάθμιο, με ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές τις μετατοπίσεις x_1 και x_2. Επομένως, η Εξ.(1) θα καταγραφεί δύο φορές: μία φορά για τη μετατόπιση x_1 και μία φορά για τη μετατόπιση x_2. Για την εν λόγω καταγραφή, απαιτείται ο υπολογισμός των ποσοτήτων T, U, P_C, P_t και L. Με βάση τους ορισμούς του Μαθήματος 01, προκύπτει ότι:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στις μάζες m_1 και m_2, ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \tag{3}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια σταθεράς k_1 και k_2, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\Delta x\right)_{k_1}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta x\right)_{k_2}^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} k_1 x_1^{\,2} + \frac{1}{2} k_2 \left(x_2 - x_1\right)^2 \tag{4}$$

- Η ενέργεια P_C του συστήματος, η οποία διαχέεται στους αποσβεστήρες σταθεράς c_1 και c_2, ισούται με:

$$P_C = \frac{1}{2} c_1 \left(\Delta x\right)_{C_1}^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\Delta x\right)_{C_2}^2 \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2 \tag{5}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος, η οποία προσφέρεται στο σύστημα από τις εξωτερικές δυνάμεις, ισούται με:

$$P_t = F_1 \dot{x}_1 + F_2 \dot{x}_2 \tag{6}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, από το συνδυασμό των Εξ.(1,3,4), ισούται με:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2} k\, x_1^{\,2} + \frac{1}{2} k \left(x_2 - x_1\right)^2\right) \tag{7}$$

Συνεπώς, σχετικά με τη γραφή της Εξ.(1) για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας) $q = x_1$, ισχύει (παρατίθενται τα τελικά αποτελέσματα, ενώ, για αναλυτικό υπολογισμό των επί μέρους όρων, βλ. Παράρτημα Α):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{x}_1\right) = m_1 \ddot{x}_1 \tag{9}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = c_1 \dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = F_1 \tag{12}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(9,10,11,12) στην Εξ.(1), προκύπτει:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = F_1 \tag{13}$$

Κατ' αντιστοιχία, σχετικά με τη γραφή της Εξ.(1) για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας) $q = x_2$, ισχύει (πάλι, παρατίθενται μόνο τα τελικά αποτελέσματα, ενώ, για αναλυτικό υπολογισμό των επί μέρους όρων, βλ. Παράρτημα Β):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2 \dot{x}_2\right) = m_2 \ddot{x}_2 \tag{15}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = k_2\left(x_2 - x_1\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = F_2 \tag{18}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(15,16,17,18) στην Εξ.(1), προκύπτει:

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + k_2\left(x_2 - x_1\right) = F_2 \tag{19}$$

Οι Εξ.(13,19), ομαδοποιώντας ως προς τις ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές x_1 και x_2, γράφονται και ως εξής:

$$m_1\,\ddot{x}_1 + \left(c_1 + c_2\right)\dot{x}_1 + \left(-c_2\right)\dot{x}_2 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 + \left(-k_2\right)x_2 = F_1 \tag{20}$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 + \left(-c_2\right)\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + \left(-k_2\right)x_1 + k_2x_2 = F_2 \tag{21}$$

Χρησιμοποιώντας μητρωική γραφή, οι Εξ.(21,21) γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Γράφοντας μαζί τις Εξ.(22,23), προκύπτει:

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\underset{\sim}{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{C}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\dot{\underset{\sim}{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}}\underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}}} \tag{24}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος μητρωϊκός συμβολισμός :

$\underline{M}$: μητρώο μάζας

$\underline{C}$: μητρώο απόσβεσης

$\underline{K}$: μητρώο δυσκαμψίας (ή μητρώο στιβαρότητας)

$\underset{\sim}{F}$: διάνυσμα εξωτερικής δύναμης (ή μητρώο δυνάμεων)

$\underset{\sim}{x}$: διάνυσμα μετατοπίσεων

$\dot{\underset{\sim}{x}}$: διάνυσμα ταχυτήτων

$\ddot{\underset{\sim}{x}}$: διάνυσμα επιταχύνσεων

Διευκρινίζεται ότι το σύμβολο ‘_’ (υπογράμμιση) χρησιμοποιείται για τους πίνακες, ενώ το σύμβολο ‘~’ (περισπωμένη) χρησιμοποιείται για τα διανύσματα. Ένας άλλος συμβολισμός που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία για τη διατύπωση της Εξ.(24) είναι ο εξής:

$$\left[M\right]\left\{\ddot{x}\right\} + \left[C\right]\left\{\dot{x}\right\} + \left[K\right]\left\{x\right\} = \left\{F\right\} \tag{25}$$

όπου ως $\left[M\right]$ συμβολίζεται το μητρώο μάζας, ως $\left[C\right]$ συμβολίζεται το μητρώο απόσβεσης, ως $\left[K\right]$ συμβολίζεται το μητρώο δυσκαμψίας, ως $\left\{F\right\}$ συμβολίζεται το διάνυσμα της εξωτερικής δύναμης και ως $\left\{x\right\}$ συμβολίζεται το διάνυσμα μετατοπίσεων. Διευκρινίζεται ότι στο εξεταζόμενο παράδειγμα, το σύστημα διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας, συνεπώς είτε χρησιμοποιήσουμε τη μητρωϊκή γραφή είτε την αναλυτική γραφή, είναι το ίδιο από πλευράς χρόνου και δυνατότητας χειρισμού των εξισώσεων. Ωστόσο, στη μοντελοποίηση και μελέτη πραγματικών κατασκευών, οι βαθμοί ελευθερίας ανέρχονται σε εκατοντάδες χιλιάδες, συνεπώς είναι πρακτικά αδύνατον να γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος αναλυτικά για κάθε βαθμό ελευθερίας ξεχωριστά. Μία επιπρόσθετη ανάγκη είναι το γεγονός ότι, στη μοντελοποίηση πραγματικών κατασκευών, η επίλυση της Εξ.(24) δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί αναλυτικά, οπότε υποχρεωτικά καταφεύγουμε σε τεχνικές της υπολογιστικής μηχανικής. Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις δύο προαναφερθείσες ανάγκες, χρησιμοποιούμε τη μητρωϊκή γραφή ως έναν συνοπτικό μαθηματικό τρόπο γραφής των εξισώσεων ισορροπίας ενός δυναμικού συστήματος.

Παρατηρώντας τις Εξ.(13,19), διαπιστώνουμε ότι αυτές, πράγματι, αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος. Με άλλα λόγια, η Ενεργειακή Αρχή Lagrange είναι ένα τεχνικός τρόπος κατάστρωσης των εξισώσεων ισορροπίας, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τα τρία, αναφερόμενα στη σελίδα 4, βασικά πλεονεκτήματα. Ειδικότερα για το τρίτο πλεονέκτημα, δηλαδή ότι οι εμπλεκόμενες ποσότητες (ενέργειες) είναι βαθμωτά μεγέθη τετραγωνικής μορφής, ας εξετάσουμε τον όρο διάχυσης ενέργειας, ο οποίος επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας του κειμένου:

$$P_C = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2 \tag{26}$$

Στην Εξ.(26), παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος αφορά στη μεταβολή $\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$. Ακριβώς επειδή η εν λόγω μεταβολή είναι υψωμένη στο τετράγωνο, έπεται ότι τυχόν αρνητικό πρόσημο θα απομακρυνθεί, άρα δεν επηρεάζεται ο υπολογισμός της ποσότητας P_C από τη σειρά αναγραφής των όρων της μεταβολής. Με άλλα λόγια, είτε θεωρήσουμε την εν λόγω μεταβολή ως $\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$ είτε ως $\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)$, ο υπολογισμός της ποσότητας P_C δεν επηρεάζεται:

$$P_C = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2 = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 \tag{27}$$

Επιπροσθέτως, η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, για το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 2α, εμπλέκει τον υπολογισμό της ποσότητας:

$$\left(\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1}\right) \tag{28}$$

Συνδυάζοντας τις Εξ.(27,28) μεταξύ τους και εκτελώντας πράξεις προκύπτει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right\}=\frac{1}{2}c_2\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right\}=\frac{1}{2}c_2\left\{2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\frac{\partial\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)}{\partial \dot{x}_1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}c_2\left\{2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\left(-1\right)\right\}=\frac{1}{2}c_2\left\{2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)\left(+1\right)\right\}=\frac{1}{2}c_2\left\{2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)\frac{\partial\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)}{\partial \dot{x}_1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}c_2\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2\right\}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right\}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2\right\} \tag{29}$$

Η Εξ.(29) αποδεικνύει ότι είτε θεωρήσουμε την εν λόγω μεταβολή ως $\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)$ είτε ως $\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)$, ο υπολογισμός της ποσότητας $\left(\partial P_C/\partial x_1\right)$ δεν επηρεάζεται. Με άλλα λόγια, η τεχνική της μερικής παραγώγισης μας οδήγησε στο σωστό αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία αναγράφουμε τους όρους $\dot{x}_1$ και $\dot{x}_2$ στη μεταξύ τους διαφορά. Αντίστοιχα ισχύουν για τις υπόλοιπες ενεργειακές ποσότητες, οι οποίες εμπλέκονται στην Ενεργειακή Αρχή Lagrange, και για όλες τις ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές του εκάστοτε εξεταζομένου συστήματος (στην προκειμένη περίπτωση, για τις μεταβλητές x_1 και x_2).

Επίσης, διευκρινίζεται ότι εάν θα θέλαμε να συμπεριλάβουμε τη βαρύτητα στη μελέτη του δυναμικού συστήματος του Σχήματος 2α, τότε θα πρέπει να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία τριών βημάτων:

Βήμα 1: Μελετούμε το σύστημα όπως ακριβώς παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους, δηλαδή χωρίς την επίδραση της βαρύτητας.

Βήμα 2: Επιλύουμε το σύστημα θεωρώντας μόνο την επίδραση της βαρύτητας ως στατική φόρτιση.

Βήμα 3: Υπερθέτουμε τις αποκρίσεις που προκύπτουν από τα Βήματα 1 και 2.

Τέλος, παρατηρώντας τις Εξ.(13,19), είναι δυνατόν να εντοπίσουμε και την εμφάνιση του τρίτου νόμου του Νεύτωνα (δράση-αντίδραση), όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα 3.

$$m_1\ddot{x}_1+c_1\dot{x}_1+\underbrace{c_2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)}+\underbrace{k_2\left(x_1-x_2\right)}+k_1x_1=F_1$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$m_2\ddot{x}_2+\overbrace{c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)}+\overbrace{k_2\left(x_2-x_1\right)}=F_2$$

Σχήμα 3: Εντοπισμός όρων τύπου δράσης - αντίδραση

Ιδιοσυχνότητες και ιδιοανύσματα

Οι εξισώσεις ισορροπίας (ισοδύναμα, οι εξισώσεις κίνησης) ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος είναι δυνατόν να παρασταθούν με τη μητρωϊκή γραφή ως εξής:

$$\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}+\underline{C}\,\dot{\underset{\sim}{x}}+\underline{K}\,\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{F} \qquad (30)$$

όπου $\underline{M}$ είναι το μητρώο μάζας, $\underline{C}$ είναι το μητρώο απόσβεσης, $\underline{K}$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας (ή μητρώο στιβαρότητας), $\underset{\sim}{F}$ είναι το διάνυσμα εξωτερικής δύναμης (ή μητρώο δυνάμεων), $\underset{\sim}{x}$ είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων, $\dot{\underset{\sim}{x}}$ είναι το διάνυσμα ταχυτήτων και $\ddot{\underset{\sim}{x}}$ είναι το διάνυσμα επιταχύνσεων.

*Τα **μητρώα μάζας** $\underline{M}$ και **δυσκαμψίας** $\underline{K}$ είναι **συμμετρικά** (προέρχονται από ενεργειακές εκφράσεις τετραγωνικής μορφής). Το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$ είναι συμμετρικό εάν δεν εμπλέκονται γυροσκοπικά φαινόμενα ή άλλου είδους αλληλεπιδράσεις (τότε εμφανίζονται και αντισυμμετρικοί όροι).*

Η Εξ.(30) αποτελεί τη ***Βασική Εξίσωση Δυναμικού Συστήματος πολλών Βαθμών Ελευθερίας***. Σε αυτήν τη συνοπτική έκφραση είναι δυνατόν να καταλήξουμε σχετικά εύκολα, αξιοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την Εξ.(30). Η πλέον απλή περίπτωση είναι εκείνη της ελεύθερης ταλάντωσης, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0} \qquad (31)$$

Προφανώς, σε αυτήν την περίπτωση, η Εξ.(30) γράφεται ως εξής:

$$\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}+\underline{C}\,\dot{\underset{\sim}{x}}+\underline{K}\,\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0} \qquad (32)$$

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι το εξεταζόμενο πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα διαθέτει μηδενική απόσβεση, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\underline{C}=\underline{0} \qquad (33)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(32,33) δίδει:

$$\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}+\underline{K}\,\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0} \qquad (34)$$

Υπενθυμίζεται ότι η παραδοχή περί μηδενικής αποσβέσεως είναι συντηρητική (‘*on the safe side*’), υπό την έννοια ότι η προκύπτουσα απόκριση του συστήματος θα είναι δυσμενέστερη της πραγματικότητας, όπου θα υπάρχει (έστω και μικρή) απόσβεση.

Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε την Εξ.(34), η οποία περιγράφει το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 2α. Η Εξ.(34) αποτελεί τη συνοπτική γραφή της Εξ.(24), η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας του κειμένου (απεικονίζονται και οι διαστάσεις των πινάκων):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{2\times2}\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{2\times1}+\underbrace{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{2\times2}\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{2\times1}+\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{2\times2}\underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{2\times1}=\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}}_{2\times1} \tag{35}$$

Η Εξ.(35) περιγράφει ένα σύστημα δύο εξισώσεων, με αγνώστους τις ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές x_1 και x_2, και παραγώγους αυτών, του συστήματος. Για την πρώτη εξίσωση του συστήματος, υποθέτουμε μία λύση της μορφής:

$$x_1(t)=\Phi_1\cos(\omega t) \tag{36}$$

όπου $x_1(t)$ είναι η απόκριση της μάζας m_1, Φ_1 είναι το πλάτος της συγκεκριμένης απόκρισης και ω είναι η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. Για τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, υποθέτουμε μία λύση της μορφής:

$$x_2(t)=\Phi_2\cos(\omega t) \tag{37}$$

όπου $x_2(t)$ είναι η απόκριση της μάζας m_2, Φ_2 είναι το πλάτος της συγκεκριμένης απόκρισης και ω είναι η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. Διευκρινίζεται ότι υποθέτουμε πως η συχνότητα ω είναι η ίδια και στις δύο αποκρίσεις. Επίσης, διευκρινίζεται ότι η επιλογή της συγκεκριμένης μορφής απόκρισης δεν είναι τυχαία. Διαισθητικά, αντιλαμβανόμαστε ότι εάν απομακρύνουμε τις μάζες m_1 και m_2 από τη θέση ισορροπίας τους, τότε αυτές θα εκτελέσουν κάποιο είδος ταλάντωσης. Οι Εξ.(36,37), δηλαδή αρμονικής μορφής εξισώσεις, περιγράφουν μία τέτοια κίνηση. Γράφοντας τις Εξ.(36,37) σε μητρωϊκή γραφή, ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}\cos(\omega t) \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}(t)=\underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t) \tag{38}$$

όπου $\underset{\sim}{x}(t)$ είναι το διάνυσμα των αποκρίσεων του συστήματος, $\underset{\sim}{\Phi}$ είναι το διάνυσμα των πλατών των αποκρίσεων και ω είναι η φυσική συχνότητα (ή, ισοδύναμα, ιδιοσυχνότητα) του συστήματος. Εισάγοντας την Εξ.(38) στην Εξ.(34), προκύπτει:

$$-\omega^2\underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t)+\underline{K}\,\underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t)=\underset{\sim}{0} \tag{39}$$

Ισοδύναμα, ισχύει:

$$\left(-\omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t)=\underset{\sim}{0} \tag{40}$$

Επειδή η Εξ.(40) πρέπει να ισχύει για κάθε χρονική στιγμή t, έπεται ότι το χρονικά σταθερό τμήμα της Εξ.(40) πρέπει να είναι μηδενικό, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\left(-\omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}=\underset{\sim}{0} \tag{41}$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(41), λαμβάνοντας υπόψη την Εξ.(24), γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Η Εξ.(42) περιγράφει ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Από τη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας, είναι γνωστό ότι αν οι εν λόγω εξισώσεις είναι γραμμικώς εξηρτημένες μεταξύ τους τότε υπάρχει μη-μηδενική λύση και η ορίζουσα του συστήματος είναι μηδενική:

$$\det\left(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{43}$$

Για ευκολία στις μετέπειτα πράξεις, θεωρούμε ότι:

$$\lambda = \omega^2 \tag{44}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(43,44) δίδει:

$$\det\left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{45}$$

Βάσει της Εξ.(42), η Εξ.(45) γράφεται ως εξής:

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\lambda m_2 + k_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{46}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(46), προκύπτει:

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\lambda m_2 + k_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-\lambda m_1 + (k_1 + k_2)\right)\left(-\lambda m_2 + k_2\right) - (-k_2)(-k_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 m_1 m_2 - \lambda m_1 k_2 - \lambda m_2 (k_1 + k_2) + k_2 (k_1 + k_2) - k_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 m_1 m_2 - \lambda \left(m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\right) + k_2 (k_1 + k_2) - k_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda \underbrace{\left(-\frac{\left(m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\right)}{m_1 m_2}\right)}_{A_1} + \underbrace{\left(\frac{k_2 (k_1 + k_2) - k_2^2}{m_1 m_2}\right)}_{A_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + A_1 \lambda + A_2 = 0 \tag{47}$$

Από τη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας, είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο της Εξ.(47) καλείται '*χαρακτηριστικό πολυώνυμο*' και οι ρίζες αυτού καλούνται '*ιδιοτιμές*'. Στο δυναμικό σύστημα του Σχήματος 2α, οι ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) είναι δύο, οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (βλ. Εξ.(47)) είναι δευτέρου βαθμού και διαθέτει δύο ρίζες (ιδιοτιμές).

*Τα **μητρώα μάζας** $\underline{M}$ και **δυσκαμψίας** $\underline{K}$ είναι **συμμετρικά** και **θετικά ημι-ορισμένα**. Αποδεικνύεται ότι τέτοια μητρώα έχουν μη-αρνητικές ιδιοτιμές, δηλαδή:*

$$\lambda_i \geq 0 .$$

Με βάση την ανωτέρω παρατήρηση, προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του εν λόγω χαρακτηριστικού πολυωνύμου (βλ. Εξ.(47)) είναι:

$$\omega_1^2 = \lambda_1 \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \lambda_2 \tag{48}$$

Γενικεύοντας, η απαίτηση για εύρεση μη-μηδενικών (μη-τετριμμένων) λύσεων της Εξ.(41) οδηγεί στην απαίτηση για μηδενισμό της ορίζουσας του αντιστοίχου συστήματος εξισώσεων (βλ. Εξ.(45)). Ως εκ τούτου, ένα δυναμικό σύστημα με N Βαθμούς Ελευθερίας θα έχει N ιδιοτιμές λ_i, άρα θα διαθέτει N ιδιοσυχνότητες ω_i, οι οποίες εάν αντικατασταθούν στην Εξ.(41), θα δώσουν N μη-τετριμμένες λύσεις $\underset{\sim}{\Phi}_i$. Ισοδύναμα, κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i, i = 1, 2, ..., N$ αντιστοιχεί σε μία ιδιοσυχνότητα ω_i, η οποία, μέσω της Εξ.(41), καταλήγει στη μη-τετριμμένη λύση $\underset{\sim}{\Phi}_i$. Η ποσότητα $\underset{\sim}{\Phi}_i$ καλείται ιδιοάνυσμα (ή ιδιοδιάνυσμα) και αφορά στον φυσικό τρόπος ταλάντωσης του συστήματος. Συνεπώς:

Ένα δυναμικό σύστημα N Βαθμών Ελευθερίας:

1) διαθέτει N ιδιοσυχνότητες ω_i, οι οποίες υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$\det\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0$$

2) διαθέτει N ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i$, τα οποία υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0}$$

Τα ιδιοανύσματα εμφανίζουν τις ακόλουθες χρήσιμες ιδιότητες (οι ιδιότητες παρατίθενται χωρίς τη μαθηματική απόδειξη):

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_i = k_{ii} \tag{49}$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{0} \tag{50}$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_i = m_{ii} \tag{51}$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{0} \tag{52}$$

$$\omega_i^2 = \left(\frac{k_{ii}}{m_{ii}}\right)$$

Οι Εξ.(49,50,51,52) περιγράφουν τις αποκαλούμενες '*ιδιότητες ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων*'. Πρόκειται για ιδιότητες εξαιρετικά χρήσιμες στον αποκαλούμενο '*ιδιοανυσματικό μετασχηματισμό*', τον οποία θα εξετάσουμε σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα. Η ποσότητα k_{ii} καλείται '*γενικευμένος συντελεστής ελαστικότητας*' ή '*γενικευμένη δυσκαμψία*', ενώ η ποσότητα m_{ii} καλείται '*γενικευμένη μάζα*'.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτικός υπολογισμός όρων της εξίσωσης της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = x_1$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}k\,x_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_1\right)^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\,\dot{x}_1 \qquad \text{(A.1)}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1\,\dot{x}_1\right) = m_1\,\ddot{x}_1 \qquad \text{(A.2)}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=x_1} -\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial (T-U)}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}k_1 x_1^{\,2} + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - x_1\right)^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{-\left(\frac{1}{2}k_1 x_1^{\,2} + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - x_1\right)^2\right)\right\} = \left\{\left(k_1 x_1 + (-1)k_2\left(x_2 - x_1\right)\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) \qquad \text{(A.3)}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}c_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = \left\{c_1\,\dot{x}_1 + (-1)c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = c_1\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) \qquad \text{(A.4)}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{F_1\,\dot{x}_1 + F_2\,\dot{x}_2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = F_1 \qquad \text{(A.5)}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Αναλυτικός υπολογισμός όρων της εξίσωσης της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = x_2$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}k\,x_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_1\right)^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\,\dot{x}_2 \qquad \text{(B.1)}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right) = m_2\,\ddot{x}_2 \qquad \text{(B.2)}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=x_2} -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}k_1 x_1^{\,2} + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - x_1\right)^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)k_2\left(x_2 - x_1\right)^2\right\} = k_2\left(x_2 - x_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = k_2\left(x_1 - x_2\right) \qquad \text{(B.3)}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\frac{1}{2}c_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) \qquad \text{(B.453)}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{F_1\,\dot{x}_1 + F_2\,\dot{x}_2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = F_2 \qquad \text{(B.5)}$$