ΔΥΝΑΜΙΚΗ

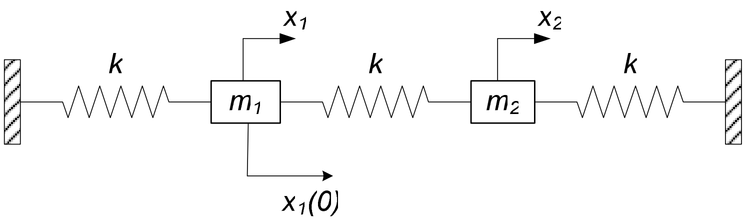
ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 8η
Ιδιοτιμές & Ιδιοανύσματα Δυναμικού Συστήματος Πολλών Βαθμών Ελευθερίας – Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός

Εφαρμογή

Έστω το διβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-k$ του Σχήματος 1, στο οποίο δεν υπάρχουν στοιχεία απόσβεσης. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι το σύστημα αποτελείται από τρία όμοια ελατήρια σταθεράς $k=1$ και από δύο μάζες, $m_1=4$ και $m_2=1$, αντίστοιχα. Επίσης, έστω ότι αρχικά μετατοπίζεται μόνο η μάζα m_1 κατά $x_1(0)=1$, ενώ η αρχική ταχύτητα $\dot{x}_1(0)$της μάζας m_1 καθώς και η αρχική μετατόπιση $x_2(0)$ και η αρχική ταχύτητα $\dot{x}_2(0)$ της μάζας m_2 είναι μηδενικές (δηλαδή, ισχύει $\dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$). Ζητείται η απόκριση $x(t)$ του εν λόγω συστήματος.



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση εξετασθέντος διβάθμιου συστήματος $m-k$.

Λύση

Με βάση την προσέγγιση, η οποία παρουσιάσθηκε στην Εκπαιδευτική Ενότητα 07, το σύστημα χαρακτηρίζεται από δύο ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας): την μετατόπιση x_1 της μάζας m_1 και τη μετατόπιση x_2 της μάζας m_2 (βλ. Σχήμα 1). Η γενική μορφή της απόκρισης θα είναι μία αρμονική, χρονική συνάρτηση:

$$\underset{\sim}{x}(t)=\underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t) \tag{1}$$

όπου $\underset{\sim}{\Phi}$ αφορά στο πλάτος των ταλαντώσεων και ω είναι οι συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος. Σύμφωνα με την Εκπαιδευτική Ενότητα 07, οι ποσότητες ω καλούνται ιδιοσυχνότητες του συστήματος και ένας από τους δυνατούς τρόπους υπολογισμού τους είναι επιλύοντας την εξίσωση:

$$\det\left(-\omega_i^2\underline{M}+\underline{K}\right)=0 \tag{2}$$

όπου $\underline{M}$ είναι το μητρώο μάζας της κατασκευής και $\underline{K}$ είναι ο μητρώο δυσκαμψίας (ή μητρώο στιβαρότητας) της κατασκευής. Η, δε, ποσότητα $\underset{\sim}{\Phi}$, πάντοτε σύμφωνα με την Εκπαιδευτική Ενότητα 07, υπολογίζεται από την επίλυση του ομογενούς συστήματος:

$$\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right) \underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0} \tag{3}$$

όπου οι ιδιοσυχνότητες ω_i είναι εκείνες που προκύπτουν από την Εξ.(2). Για την κατάστρωση της Εξ.(2), απαιτείται ο υπολογισμός των μητρώων $\underline{M}$ και $\underline{K}$, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange προς διαμόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος. Για το εξεταζόμενο σύστημα, και με βάση τους ορισμούς του Μαθήματος 01 και του Μαθήματος 07, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στις μάζες m_1 και m_2, ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \tag{4}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα τρία όμοια ελατήρια σταθεράς k, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\Delta x\right)_{k_1}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta x\right)_{k_2}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta x\right)_{k_3}^2 \xrightarrow{k_1 = k_2 = k_3 = k} U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \tag{5}$$

- Στο σύστημα δεν διαχέεται ενέργεια P_C, διότι το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία απόσβεσης, άρα ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{6}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος είναι μηδενική, διότι στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, άρα δεν προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα από εξωτερική πηγή. Συνεπώς, ισχύει:

$$P_t = 0 \tag{7}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \tag{8}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(4,5,8), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2\right) \tag{9}$$

Η εφαρμογή των Εξ.(4-9) για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_1$, δίδει (παρατίθενται τα τελικά αποτελέσματα, ενώ, για αναλυτικό υπολογισμό των επί μέρους όρων, βλ. Παράρτημα Α):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1\,\dot{x}_1\right) = m_1\,\ddot{x}_1 \tag{11}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 2kx_1 - kx_2 \tag{12}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{14}$$

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα01, Εκπαιδευτική Ενότητα07):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \tag{15}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(11,12,13,14) στην Εξ.(15), προκύπτει:

$$m_1\,\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \tag{16}$$

Επαναλαμβάνοντας την ανωτέρω διαδικασία για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_2$, προκύπτει (και σε αυτήν την περίπτωση, παρατίθενται τα τελικά αποτελέσματα, ενώ, για αναλυτικό υπολογισμό των επί μέρους όρων, βλ. Παράρτημα Β):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\,\dot{x}_2 \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right) = m_2\,\ddot{x}_2 \tag{18}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -kx_1 + 2kx_2 \tag{19}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{21}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(18,19,20,21) στην Εξ.(15), προκύπτει:

$$m_2\,\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \tag{22}$$

Χρησιμοποιώντας μητρωϊκή γραφή, οι Εξ.(16,22) γράφονται και ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} m_1\,\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\,\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \\ \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\underset{\sim}{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}} \tag{23}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(23), προκύπτει:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

Το ομογενές σύστημα της Εξ.(24) έχει μη-τετριμμένη λύση όταν ισχύει η Εξ.(2):

$$\det\left(-\omega_i^2 \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{K}\right) = 0 \xrightarrow{\omega_i^2 = \lambda_i} \det\left(-\lambda_i \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{K}\right) = 0 \xrightarrow{\text{Εξ.(24)}}$$

$$\Rightarrow \det\left(-\lambda \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -4\lambda + 2 & -1 \\ -1 & -\lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{25}$$

Ο αναλυτικός υπολογισμός της Εξ.(25) παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ. Τελικά προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 = \omega_1^2 = 0.3486 \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = 2.1514 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 = 0.5904 \\ \omega_2 = 1.4668 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

Διευκρινίζεται ότι οι ποσότητες ω_1 και ω_2 είναι θετικές διότι:

*Τα **μητρώα μάζας** $\underset{\sim}{M}$ και **δυσκαμψίας** $\underset{\sim}{K}$ είναι **συμμετρικά** και **θετικά ημι-ορισμένα**. Αποδεικνύεται ότι τέτοια μητρώα έχουν μη-αρνητικές ιδιοτιμές, δηλαδή: $\lambda_i \geq 0$*

Επίσης, διευκρινίζεται ότι η άκρως ενδιαφέρουσα περίπτωση $\lambda_i = 0$ (μηδενικές ιδιοτιμές) θα εξετασθεί ιδιαιτέρως σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα.

Οι τιμές ω_1 και ω_2 είναι οι ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος (βλ. Σχήμα 1). Αντικαθιστώντας στην Εξ.(3) με $\omega_i = \omega_1$ προκύπτει:

$$\left(-\omega_1^2 \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{K}\right) \underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{0} \xrightarrow[(\text{Εξ}.26)]{(\text{Εξ}.24)} \begin{bmatrix} -0.3486 \times 4 + 2 & -1 \\ -1 & -0.3486 \times 1 + 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.6056 & -1 \\ -1 & 1.6514 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{1,1} \\ \Phi_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.6056\Phi_{11} - \Phi_{21} = 0 \\ -\Phi_{11} + 1.6514\Phi_{21} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.6056\Phi_{11} = \Phi_{21} \\ \Phi_{11} = 1.6514\Phi_{21} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \Phi_{21} = 0.6056\Phi_{11} \\ \Phi_{21} = 0.6056\Phi_{11} \end{Bmatrix} \tag{27}$$

Η ποσότητα $\underset{\sim}{\Phi}_1$ καλείται ιδιοάνυσμα του εξεταζομένου συστήματος και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ω_1. Διαπιστώνουμε ότι το σύστημα της Εξ.(27) αποτελείται από δύο όμοιες εξισώσεις. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι η φυσική σημασία ενός ομογενούς συστήματος είναι ότι οι εξισώσεις του συστήματος δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ισοδύναμα, το πλήθος των ανεξαρτήτων εξισώσεων ενός ομογενούς συστήματος είναι μικρότερο από το πλήθος των εξισώσεων του συστήματος. Ως εκ τούτου, τουλάχιστον μία μεταβλητή του συστήματος δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Στην προκειμένη περίπτωση, από την Εξ.(27) προκύπτει ότι οι μεταβλητές Φ_{11} και Φ_{21} δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συνεπώς, επιλέγουμε αυθαίρετα μία από αυτές ως ελεύθερη μεταβλητή. Η επιλογή γίνεται καθαρά με κριτήριο την ευκολία εκτέλεσης πράξεων. Μια πρακτική επιλογή είναι να θέσουμε την πρώτη συνιστώσα του ιδιοανύσματος $\underset{\sim}{\Phi}$, δηλαδή την ποσότητα Φ_{11} ως ελεύθερη μεταβλητή. Σε αυτήν την περίπτωση, προκύπτει:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ 0.6056\Phi_{11} \end{Bmatrix} = \Phi_{11} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{11}=const=C_1} \underset{\sim}{\Phi}_1 = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix}, C_1 \in \mathbb{R}^* \tag{28}$$

Στην Εξ.(28), αφού η σταθερά C_1 δύναται να είναι οποιοσδήποτε μη-μηδενικός πραγματικός αριθμός, επιλέγουμε, καθαρά για λόγους ευκολίας πράξεων, την τιμή:

$$C_1 = 1 \tag{29}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(28,29) δίδει:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{Bmatrix} \tag{30}$$

Από την Εξ.(30) προκύπτει το εξαιρετικά σημαντικό συμπέρασμα ότι:

*Ένα ιδιοάνυσμα **ΔΕΝ έχει συγκεκριμένη τιμή** (δεν αποτελεί συγκεκριμένη ποσότητα). Αντιθέτως, **συγκεκριμένη** είναι η **αναλογία** που εμφανίζουν μεταξύ τους οι συνιστώσες του ιδιοανύσματος.*

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία και για την ιδιοσυχνότητα $\omega_i = \omega_2$, προκύπτει:

$$\left(-\omega_2^2 \underset{=}{M} + \underset{=}{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_2 = \underset{\sim}{0} \xrightarrow[(\text{Εξ}.26)]{(\text{Εξ}.24)} \begin{bmatrix} -2.1514\times4+2 & -1 \\ -1 & -2.1514\times1+2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -6.6056 & -1 \\ -1 & -0.1514 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -6.6056\Phi_{12} - \Phi_{22} = 0 \\ -\Phi_{12} - 0.1514\Phi_{22} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -6.6056\Phi_{12} = \Phi_{22} \\ -\Phi_{12} = 0.1514\Phi_{22} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \Phi_{22} = -6.6056\Phi_{12} \\ \Phi_{22} = -6.6056\Phi_{12} \end{Bmatrix} \tag{31}$$

Από την Εξ.(27) προκύπτει ότι οι μεταβλητές Φ_{22} και Φ_{12} δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για λόγους ευκολίας πράξεων, επιλέγουμε τη συνιστώσα Φ_{22} ως ελεύθερη μεταβλητή:

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ -6.6056\Phi_{21} \end{Bmatrix} = \Phi_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{12}=const=C_2} \underset{\sim}{\Phi}_2 = C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{Bmatrix}, C_2 \in \mathbb{R}^* \tag{32}$$

Στην Εξ.(32), αφού η σταθερά C_2 δύναται να είναι οποιοσδήποτε μη-μηδενικός πραγματικός αριθμός, επιλέγουμε, καθαρά για λόγους ευκολίας πράξεων, την τιμή:

$$C_2 = 1 \tag{33}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(32,33) δίδει:

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{Bmatrix} \tag{34}$$

Η φυσική σημασία των αριθμητικών τιμών των ιδιοτιμών, καθώς και η φυσική σημασία αριθμητικών τιμών και προσήμων των ιδιοανυσμάτων, είναι η εξής:

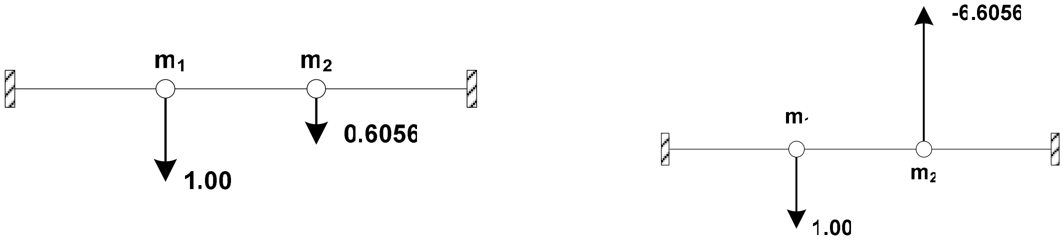
- Η Εξ.(30) δηλώνει ότι εάν το σύστημα ταλαντωθεί με συχνότητα ω_1, τότε το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_2 θα είναι της αυτής φοράς (διότι $0.6056 > 0$) με το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_1 και 0.6056 φορές μεγαλύτερο, δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_2\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_1\right) = \left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_1\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_1\right) \times 0.6056}$$

- Η Εξ.(34) δηλώνει ότι εάν το σύστημα ταλαντωθεί με συχνότητα ω_2, τότε το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_2 θα είναι αντιθέτου φοράς (διότι $-6.6056 < 0$) από το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_1 και 6.6056 φορές μεγαλύτερο, δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_2\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_2\right) = \left(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m_1\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \omega_2\right) \times \left(-6.6056\right)}$$

Εποπτικά, τα δύο ιδιοανύσματα είναι δυνατόν να παρασταθούν ως φαίνεται στο Σχήμα 2.



(α) (β)

Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση ιδιοανυσμάτων (α) $\underset{\sim}{\Phi}_1$ και (β) $\underset{\sim}{\Phi}_2$.

Οι ανωτέρω πληροφορίες είναι πολύ χρήσιμες στην κατάστρωση της εξίσωσης απόκρισης του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, όπως διατυπώθηκε στην αρχή της λύσεως (βλ. Εξ.(1)), η γενική μορφή της απόκρισης του συστήματος είναι (η Εξ.(1) επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου):

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t) \tag{35}$$

όπου το διάνυσμα $\underset{\sim}{\Phi}$ διαθέτει δύο συνιστώσες (τα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_1$ και $\underset{\sim}{\Phi}_2$), ενώ στην απόκριση συμμετέχουν και οι δύο ιδιοτιμές ω_1 και ω_2. Εάν το σύστημα διέθετε μόνο ένα Βαθμό Ελευθερίας (δηλαδή εάν το σύστημα διέθετε μόνο μία μάζα: τη μάζα m_1), τότε η απόκριση θα ήταν της μορφής:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t) \tag{36}$$

όπου οι αριθμητικοί συντελεστές A_1 και B_1 θα προσδιορίζονταν από τις αρχικές συνθήκες. Ωστόσο, το σύστημα διαθέτει δύο Βαθμούς Ελευθερίας, άρα εμπλέκονται δύο ιδιοσυχνότητες στην απόκριση του συστήματος, άρα και στην απόκριση της κάθε μίας μάζας. Με άλλα λόγια, κάθε μάζα θα πραγματοποιεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις: μία με συχνότητα ω_1 και μία με συχνότητα ω_2. Συνεπώς, η Εξ.(36) θα πρέπει να συμπληρωθεί κατάλληλα: και να λάβει τη μορφή:

$$x_1(t) = \underbrace{A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)}_{\text{πλάτος ταλάντωσης μάζας } m_1 \text{ λόγω } \omega_1} + \underbrace{A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)}_{\text{πλάτος ταλάντωσης μάζας } m_1 \text{ λόγω } \omega_2} \tag{37}$$

Ο προσδιορισμός των αριθμητικών συντελεστών A_2 και B_2 θα σχολιασθεί σε επόμενη παράγραφο (προς το παρόν, εκκρεμεί). Όσον αφορά στην απόκριση $x_2(t)$ της μάζας m_2, τα πλάτη ταλάντωσης της μάζας m_2 δεν είναι ανεξάρτητα από τα πλάτη ταλάντωσης της μάζας m_1. Αντιθέτως, μεταξύ των πλατών αυτών υπάρχει η αναλογία, η οποία περιγράφεται από το ιδιοάνυσμα $\underset{\sim}{\Phi}$ (βλ. πλαίσια με κόκκινο χρώμα στη σελ.6). Ο συνδυασμός της Εξ.(37) με τις σχέσεις στα πλαίσια με κόκκινο χρώμα της σελ.6, δίδει:

$$x_2(t) = \left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right] \times (0.6056) + \left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right] \times (-6.6056) \tag{38}$$

Εν γένει, ένα σύστημα με N Βαθμούς Ελευθερίας έχει $2N$ αρχικές συνθήκες (αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα για κάθε έναν Βαθμό Ελευθερίας). Το εξεταζόμενο σύστημα έχει τέσσερεις αρχικές συνθήκες (αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα για κάθε μία από τις δύο μάζες). Συνεπώς, διαθέτουμε τέσσερεις αρχικές συνθήκες και τέσσερεις άγνωστους συντελεστές (τους συντελεστές A_1, B_1, A_2, B_2), άρα είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τους συντελεστές αυτούς (για αναλυτικό υπολογισμό των συντελεστών, βλ. Παράρτημα Δ). Μετά από αριθμητικές αντικαταστάσεις και εκτέλεση πράξεων, τελικά προκύπτει ότι:

- Η απόκριση της μάζας m_1 δίδεται από την εξίσωση:

$$x_1(t) = 0.9160\cos(\omega_1 t) + 0.08398\cos(\omega_2 t) \tag{39}$$

- Η απόκριση της μάζας m_2 δίδεται από την εξίσωση:

$$x_2(t) = 0.5547\cos(\omega_1 t) + (-0.5547)\cos(\omega_2 t) \tag{40}$$

Σε μητρωϊκή γραφή, οι Εξ.(39,40) γράφονται ως εξής:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9160 \\ 0.5547 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) + \begin{bmatrix} 0.08398 \\ -0.5547 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t) \tag{41}$$

Παρατηρώντας τις Εξ.(39,40) (ισοδύναμα, παρατηρώντας την Εξ.(41)), προκύπτουν τα εξής:

- Η μάζα m_1 ταλαντώνεται με τρόπο, ο οποίος προκύπτει από την υπέρθεση της ταλάντωσης της μάζας m_1 με συχνότητα ω_1 και της ταλάντωσης της μάζας m_1 με συχνότητα ω_2.
- Κατ' αντιστοιχία, μάζα m_2 ταλαντώνεται με τρόπο, ο οποίος προκύπτει από την υπέρθεση της ταλάντωσης της μάζας m_2 με συχνότητα ω_1 και της ταλάντωσης της μάζας m_2 με συχνότητα ω_2.
- Από τις δύο ανωτέρω παρατηρήσεις, προκύπτει ότι η απόκριση του εξεταζομένου συστήματος ισούται με την υπέρθεση των ταλαντώσεων των δύο μαζών m_1 και m_2 με δύο φυσικές συχνότητες (ω_1 και ω_2). Συνεπώς:

> *Εν γένει, στην ελεύθερη ταλάντωση ενός δυναμικού συστήματος N Βαθμών Ελευθερίας (Β.Ε), η **απόκριση** που αντιστοιχεί **σε κάθε Β.Ε.** περιέχει **όλες** τις **φυσικές συχνότητες** του συστήματος (δηλαδή περιέχει και τις N ιδιοσυχνότητες)*

- Ο τρόπος ταλάντωσης ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται ως συνδυασμός κάθε μίας ιδιοσυχνότητας του συστήματος και του αντιστοίχου ιδιοανύσματος.
- Εάν, με κάποιον τρόπο, μηδενισθεί η ταλάντωση που οφείλεται στην ιδιοσυχνότητα ω_2, τότε η Εξ.(41) θα γραφόταν ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9160 \\ 0.5547 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) + \cancel{\begin{bmatrix} 0.08398 \\ -0.5547 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9160 \\ 0.5547 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) \tag{42}$$

Η Εξ.(42) δηλώνει ότι οι δύο μάζες θα ταλαντώνονται μεν, αλλά τα πλάτη των ταλαντώσεών τους θα χαρακτηρίζονται από σταθερή αναλογία (στην προκειμένη περίπτωση από την αναλογία $(0.9160/0.5547)$).

- Ως διέγερση του συστήματος χρησιμοποιήθηκε η επιβολή αρχικής μετατόπισης στη μάζα m_1. Ωστόσο, από τις τελικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος (βλ. Εξ.(41)), επειδή $0.9160 \gg 0.08398$, έπεται ότι η δεύτερη ιδιοσυχνότητα, πρακτικά, δεν συμμετέχει στην απόκριση $x_1(t)$. Με άλλα λόγια, η ταλάντωση λόγω της δεύτερης φυσικής συχνότητας του συστήματος δεν συμμετέχει ουσιαστικά στην κίνηση (ταλάντωση) του σημείου διέγερσης (δηλαδή, της μάζας επί της οποίας επεβλήθη η αρχική συνθήκη). Προκύπτει, λοιπόν, ότι:

*Ο **τρόπος διέγερσης** καθώς και το **σημείο διέγερσης** αποτελούν δύο βασικά στοιχεία, τα οποία **καθορίζουν** την **απόκριση** ενός δυναμικού **συστήματος** με **πολλούς Βαθμούς Ελευθερίας**.*

Με βάση την ανωτέρω παρατήρηση, έπεται ότι είναι δυνατόν, εάν επιλέξουμε κατάλληλα το σημείο διέγερσης και τον τρόπο διέγερσης του συστήματος, αυτό να ταλαντωθεί με τρόπο, στον οποίο οι συντελεστές της συχνότητας ω_2 στην Εξ.(41) να είναι εκ ταυτότητος μηδενικοί. Ισοδύναμα:

Θεωρώντας μηδενικές αρχικές ταχύτητες, υπάρχει σετ αρχικών μετατοπίσεων, η επιβολή των οποίων προκαλεί την ταλάντωση του συστήματος βάσει μόνον της πρώτης του φυσικής συχνότητας (πρώτης ιδιοσυχνότητας).

Διευκρινίζεται ότι το εξεταζόμενο σύστημα του Σχήματος 1:

- έχει θεωρηθεί ότι εκτελεί κίνηση επί ενός, μόνο, φορέα (μονοδιάστατη κίνηση)
- έχει απεικονισθεί σε οριζόντια διάταξη, ενώ
- δεν έχει ληφθεί υπόψη η βαρυτική επίδραση.

Εάν ήταν επιθυμητός ο συνυπολογισμός της βαρυτικής επίδρασης και το σύστημα πάλι θεωρείτο ότι εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση, τότε θα έπρεπε

- να απεικονισθεί το σύστημα σε κατακόρυφη διάταξη. Η βαρύτητα δρα κάθετα στην οριζόντια κίνηση, άρα εάν το σύστημα απεικονιζόταν σε οριζόντια διάταξη τότε η απόκρισή του θα ήταν σύνθεση μίας οριζόντιας κίνησης, λόγω αρχικών συνθηκών, και μίας κατακόρυφης κίνησης, λόγω βαρύτητας (άρα διδιάστατη κίνηση και όχι μονοδιάστατη, ως έχει υποτεθεί).
- να υπολογισθεί η στατική μετατόπιση λόγω επίδρασης του βάρους και
- να υπερτεθεί η προαναφερθείσα στατική μετατόπιση στην απόκριση που υπολογίζεται στην Εξ.(41).

Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός

Όπως είχε αναφερθεί στην Εκπαιδευτική Ενότητα 07, τα ιδιοανύσματα εμφανίζουν τις ακόλουθες χρήσιμες ιδιότητες (οι ιδιότητες παρατίθενται χωρίς τη μαθηματική απόδειξη):

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_i = k_{ii} \quad (43) \qquad \underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{0} \quad (44)$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_i = m_{ii} \quad (45) \qquad \underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{0} \quad (46)$$

$$\omega_i^2 = \left(\frac{k_{ii}}{m_{ii}}\right)$$

Οι Εξ.(43,44,45,46) περιγράφουν τις αποκαλούμενες ‘*ιδιότητες ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων*’, οι οποίες είναι εξαιρετικά χρήσιμες στον αποκαλούμενο ‘*ιδιοανυσματικό μετασχηματισμό*’. Η ποσότητα k_{ii} καλείται ‘*γενικευμένος συντελεστής ελαστικότητας*’ ή ‘*γενικευμένη δυσκαμψία*’, ενώ η ποσότητα m_{ii} καλείται ‘*γενικευμένη μάζα*’. Ο λόγος της γενικευμένης δυσκαμψίας προς τη γενικευμένη μάζα ισούται με το τετράγωνο της αντίστοιχης ιδιοσυχνότητας ω_i. Από τις Εξ.(43,45) προκύπτει ότι εάν ***πολλαπλασιάσουμε*** αμφίπλευρα, δηλαδή και από αριστερά και από δεξιά, είτε το ***μητρώο μάζας*** είτε το ***μητρώο δυσκαμψίας***, ***με το αυτό ιδιοάνυσμα*** τότε το αποτέλεσμα του γινομένου είναι μία ***βαθμωτή, μη-μηδενική ποσότητα***. Ωστόσο, όπως φαίνεται και από τις Εξ.(44,46), εάν ***πολλαπλασιάσουμε*** αμφίπλευρα, είτε το ***μητρώο μάζας*** είτε το ***μητρώο δυσκαμψίας***, με ***διαφορετικό ιδιοάνυσμα***, τότε το αποτέλεσμα του γινομένου είναι η ***μηδενική ποσότητα***. Για το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1, ισχύει:

- Για τη γενικευμένη δυσκαμψία k_{11}:

$$k_{11} = \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3944 \\ 0.2112 \end{bmatrix} = 1.522 \qquad (47)$$

- Για τη γενικευμένη μάζα m_{11}:

$$m_{11} = \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = 4.367 \qquad (48)$$

- Για το λόγο της γενικευμένης δυσκαμψίας k_{11} προς τη γενικευμένη μάζα m_{11}:

$$\frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{1.522}{4.367} = 0.3486 = \omega_1^2 \qquad (49)$$

Κατ’ αντιστοιχία:

- Για τη γενικευμένη δυσκαμψία k_{22}:

$$k_{22} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.6056 \\ -14.2112 \end{bmatrix} = 102.48 \qquad (50)$$

- Για τη γενικευμένη μάζα m_{22}:

$$m_{22} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.00 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = 47.634 \qquad (51)$$

- Για το λόγο της γενικευμένης δυσκαμψίας k_{22} προς τη γενικευμένη μάζα m_{22}:

$$\frac{k_{22}}{m_{22}} = \frac{102.48}{47.634} = 2.1514 = \omega_2^2 \tag{52}$$

Επίσης, ισχύει:

- Για αμφίπλευρο πολλαπλασιασμό του μητρώου μάζας $\underline{M}$ με ***διαφορετικά*** ιδιοανύσματα:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \text{-}3.5136 \times 10^{-4} \approx 0 \tag{53}$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \text{-}3.5136 \times 10^{-4} \approx 0 \tag{54}$$

- Για αμφίπλευρο πολλαπλασιασμό του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$ με ***διαφορετικά*** ιδιοανύσματα:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.6056 \\ -14.2112 \end{bmatrix} = \text{-}7.027 \times 10^{-4} \approx 0 \tag{55}$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6.6056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3944 \\ 0.2112 \end{bmatrix} = \text{-}7.027 \times 10^{-4} \approx 0 \tag{56}$$

Η φυσική σημασία των αποτελεσμάτων των Εξ.(53,54,55,56) είναι ότι τα ιδιοανύσματα, σε ένα γραμμικό χώρο, είναι μεταξύ τους κάθετα. Πρόκειται για ένα μαθηματικό αποτέλεσμα, το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, προκειμένου να απλοποιήσουμε σημαντικά τη δυναμική ανάλυση σύνθετων κατασκευών. Επίσης, το εν λόγω μαθηματικό αποτέλεσμα μας οδηγεί σε αυτό που καλείται ‘*Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός*’.

Πιο συγκεκριμένα, στην πλέον γενική τους μορφή, οι Εξ.(37,38) γράφονται ως εξής:

$$x_1(t) = \Phi_{11}\left[A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)\right] + \Phi_{12}\left[A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)\right] \tag{57}$$

$$x_2(t) = \Phi_{21}\left[A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)\right] + \Phi_{22}\left[A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)\right] \tag{58}$$

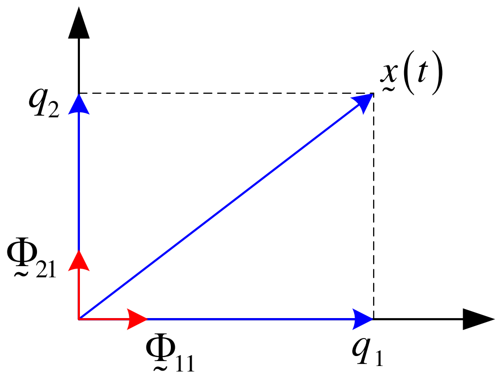
Σε μητρωϊκή γραφή, οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix}}_{\Phi_1} \underbrace{\left[A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)\right]}_{q_1(t)} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix}}_{\Phi_2} \underbrace{\left[A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)\right]}_{q_2(t)} \tag{59}$$

Με βάση την Εξ.(59), προκύπτει ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{x}(t)$ των αγνώστων Βαθμών Ελευθερίας (δηλαδή της απόκρισης) του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος είναι δυνατόν να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοανυσμάτων $\underset{\sim}{\Phi}_i$, με συντελεστές γραμμικού συνδυασμού τις ποσότητες, οι οποίες, στην Εξ.(59), σημειώνονται ως $q_i(t)$. Οι ποσότητες $q_i(t)$ αποκαλούνται '*γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας*' και περιγράφουν την απόκριση του συστήματος ως εάν αυτό ήταν μονοβάθμιο και ταλαντωνόταν με συχνότητα ω_i. Η Εξ.(59) γράφεται και ως εξής:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t) = \underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t) + \underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t) + \ldots + \underset{\sim}{\Phi}_N q_N(t) \tag{60}$$

Με άλλα λόγια, είναι δυνατόν να θεωρήσουμε τα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i$ ως μία βάση του $N-$διάστατου γραμμικού χώρου, στην οποία μπορούμε να προβάλουμε το διάνυσμα $\underset{\sim}{x}(t)$ των αγνώστων Βαθμών Ελευθερίας. Οι, δε, συντελεστές προβολής είναι οι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας $q_i(t)$. Στο Σχήμα 3 απεικονίζεται η Εξ.(60) στο διδιάστατο χώρο (δηλαδή για $N=2$).



Σχήμα 3: Σχηματική αναπαράσταση δυναμικής απόκρισης $\underset{\sim}{x}(t)$ στο διδιάστατο χώρο

Επίσης, η Εξ.(60) είναι δυνατόν να γραφεί με τον ακόλουθο συνοπτικό τρόπο:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{=}{\Phi}\ \underset{\sim}{q}(t) \tag{61}$$

όπου $\underset{=}{\Phi}$ είναι ο ***πίνακας των ιδιοανυσμάτων***, δηλαδή $\underset{=}{\Phi} = \left[\underset{\sim}{\Phi}_1 \quad \underset{\sim}{\Phi}_2 \quad \ldots \quad \underset{\sim}{\Phi}_N\right]$, και $\underset{\sim}{q}(t)^T = \left[q_1(t) \quad q_2(t) \quad \ldots \quad q_N(t)\right]$. Διευκρινίζεται ότι, γνωρίζοντας την τιμή $\underset{\sim}{x}(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή και υπολογίζοντας τα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i$, οι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας $q_i(t)$ προκύπτουν μονοσήμαντα από στην Εξ.(61). Συνεπώς, η Εξ(61), ή, ισοδύναμα, η Εξ.(60) περιγράφει έναν γραμμικό μετασχηματισμό, στον οποίο η βάση του μετασχηματισμού είναι το σύνολο των ιδιοανυσμάτων (εξ ου και η ονομασία '*Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός*') του εξεταζόμενου δυναμικού συστήματος.

Γενικεύοντας, έστω ένα δυναμικό σύστημα N Βαθμών Ελευθερίας, στο οποίο αμελούμε την απόσβεση (συντηρητική προσέγγιση). Με άλλα λόγια, θεωρούμε ένα πολύβαθμιο σύστημα

$m-k$ και έστω ότι σε αυτό ασκείται εξωτερική δύναμη διέγερσης $\underset{\sim}{F}$. Κατά τα γνωστά, η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\underline{M}\,\underset{\sim}{\ddot{x}}+\underline{K}\,\underset{\sim}{x}+=\underset{\sim}{F} \tag{62}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την Εξ.(62) με τον πίνακα $\underline{\Phi}^T$, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων (βλ. Εξ.(43,45)) και εισάγοντας την Εξ.(61), προκύπτει:

$$\underline{\Phi}^T\,\underline{M}\,\underline{\Phi}\,\underset{\sim}{\ddot{q}}(t)+\underline{\Phi}^T\,\underline{K}\,\underline{\Phi}\,\underset{\sim}{q}(t)=\underline{\Phi}^T\,\underset{\sim}{F}\xrightarrow{q=q(t)}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1^T & \underset{\sim}{\Phi}_2^T & \dots & \underset{\sim}{\Phi}_N^T\end{bmatrix}\underline{M}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1\\ \underset{\sim}{\Phi}_2\\ \dots\\ \underset{\sim}{\Phi}_N\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \dots\\ \ddot{q}_N\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1^T & \underset{\sim}{\Phi}_2^T & \dots & \underset{\sim}{\Phi}_N^T\end{bmatrix}\underline{K}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1\\ \underset{\sim}{\Phi}_2\\ \dots\\ \underset{\sim}{\Phi}_N\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \dots\\ q_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1^T & \underset{\sim}{\Phi}_2^T & \dots & \underset{\sim}{\Phi}_N^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{F}_1\\ \underset{\sim}{F}_2\\ \dots\\ \underset{\sim}{F}_N\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_1}_{m_{11}}+\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_2}_{m_{22}}+\dots+\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_N}_{m_{NN}}\right\}\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \dots\\ \ddot{q}_N\end{Bmatrix}+\left\{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_1}_{k_{11}}+\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_2}_{k_{22}}+\dots+\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_N}_{k_{NN}}\right\}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\\ \dots\\ q_N\end{Bmatrix}=$$

$$=\left\{\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underset{\sim}{F}_1+\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underset{\sim}{F}_2+\dots+\underset{\sim}{\Phi}_N^T\underset{\sim}{F}_N\right\}\Rightarrow m_{ii}\,\ddot{q}_i+k_{ii}\,q_i=\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{F}\Rightarrow\ddot{q}_i+\underbrace{\left(\frac{k_{ii}}{m_{ii}}\right)}_{\omega_i^2}q_i=\underbrace{\left(\frac{\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{F}}{m_{ii}}\right)}_{g_i(t)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2\,q_i(t)=g_i(t),\quad i=1,2,\dots,N \tag{63}$$

Διευκρινίζεται ότι, στην Εξ.(63), αξιοποιήθηκε το γεγονός ότι, όπως προκύπτει από την Γραμμική Άλγεβρα, οι πίνακες $\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_i$ και $\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_i$ είναι διαγώνιοι.

Συνοψίζοντας:

$\underset{\sim}{\Phi}_i^T\,\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_i=k_{ii}$	$\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_i=m_{ii}$	$\omega_i^2=\left(\dfrac{k_{ii}}{m_{ii}}\right)$	$g_i(t)=\left(\dfrac{\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{F}}{m_{ii}}\right)$
$\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2\,q_i(t)=g_i(t),\quad i=1,2,\dots,N$			

Η φυσική σημασία της Εξ.(63) είναι ιδιαιτέρως σημαντική και χρήσιμη:

Ένα δυναμικό σύστημα N Βαθμών Ελευθερίας περιγράφεται ως ένα σύνολο N, ***ανεξαρτήτων μεταξύ τους****, μονοβάθμιων συστημάτων (δηλαδή σε ένα σύστημα N γραμμικών ταλαντωτών) με μοναδιαίες μάζες, με σταθερές ελατηρίων ω_i^2 και με δυνάμεις διέγερσης $g_i(t)$*

Για παράδειγμα, στο εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1, θεωρώντας ότι επιβάλλεται εξωτερική δύναμη διέγερσης $\underset{\sim}{F}$, οι εξισώσεις ισορροπίας είναι (βλ. Εξ.(23):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{64}$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ.(64) αντιστοιχεί σε ένα σύστημα εξισώσεων, στο οποίο οι ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) x_1 και x_2 είναι ***δυναμικά συζευγμένες*** (η δυναμική απόκριση x_2 επηρεάζει τη δυναμική απόκριση x_1 και αντίστροφα). Με άλλα λόγια, η Εξ.(64) αντιστοιχεί σε ένα πεπλεγμένο σύστημα εξισώσεων. Διευκρινίζεται ότι οι Βαθμοί Ελευθερίας x_1 και x_2 ***δεν είναι κινηματικά συζευγμένοι***, διότι εάν ακινητοποιηθεί οποιαδήποτε από τις δύο μάζες, τότε η άλλη μάζα είναι δυνατόν να κινηθεί, υπό την επιβολή κατάλληλης διέγερσης. Ωστόσο, με τη βοήθεια του Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού, το αρχικό διβάθμιο σύστημα μετασχηματίστηκε σε δύο μονοβάθμια συστήματα (δηλαδή, σε δύο γραμμικούς ταλαντωτές). Γενικεύοντας, ένα οποιοδήποτε γραμμικό δυναμικό σύστημα, όσο σύνθετο και εάν είναι, μέσω του ιδιοανυσματικού μετασχηματισμού, μετασχηματίζεται σε ένα σύνολο μονοβάθμιων συστημάτων, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπώς, η τεχνολογική αξία αυτού του μετασχηματισμού είναι ιδιαιτέρως σημαντική, διότι όλες οι σύνθετες κατασκευές, όπως είναι για παράδειγμα, η πτέρυγα ενός αεροσκάφους, είναι δυνατόν να μετασχηματισθούν σε ένα σύνολο μονοβάθμιων, και μεταξύ τους ανεξαρτήτων, ταλαντωτών. Ακριβώς αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ έχει τόσο μεγάλη αξία: εκτός της απλότητάς του, αποτελεί και το μέσο (περιγράφει την εσωτερική δυναμική συμπεριφορά) με το οποίο είναι δυνατή η δυναμική ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής. Γι' αυτόν τον λόγο οι ποσότητες q_i καλούνται '*γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας*', διότι είναι μεν Βαθμοί Ελευθερίας ενός μονοβάθμιου συστήματος, αλλά το σύστημα αυτό αναφέρεται σε οποιονδήποτε Βαθμό Ελευθερίας μίας σύνθετης κατασκευής.

Τέλος, στην Εξ.(63) παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα προαναφερθέντα μονοβάθμια συστήματα $m-k$, στα οποία μετασχηματίζεται μία οποιαδήποτε κατασκευή, διαθέτει μοναδιαία μάζα και σταθερά ελατηρίου ίση προς ω_i^2. Εξ αιτίας αυτής της αντιστοιχίας μεταξύ σταθεράς ελατηρίου και φυσικής συχνότητας, είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της συχνότητας ταλάντωσης ω_i τόσο μεγαλύτερη είναι η δυσκαμψία του αντιστοίχου συστήματος $m-k$. Συνεπώς, για τεχνολογικές εφαρμογές, θεωρούμε ότι στη δυναμική συμπεριφορά μίας κατασκευής συμμετέχουν μόνον οι χαμηλές συχνότητες. Ισοδύναμα, θεωρούμε ότι όσο αυξάνει η τάξη N των συχνοτήτων, οι συχνότητες από μία τιμή και άνω παύουν να συμμετέχουν στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτικός υπολογισμός όρων της εξίσωσης της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = x_1$

Για τη μεταβλητή Lagrange, από τις Εξ.(4,5), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) \tag{A.1}$$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \tag{A.2}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1\dot{x}_1\right) = m_1\ddot{x}_1 \tag{A.3}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=x_1} -\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{-\left(\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} = \left\{kx_1 + k\left(x_1 - x_2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = kx_1 + k\left(x_1 - x_2\right) = 2kx_1 - kx_2 \tag{A.4}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{A.5}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_1} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{A.6}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Αναλυτικός υπολογισμός όρων της εξίσωσης της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = x_2$

Για τη μεταβλητή Lagrange, από τις Εξ.(4,5), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) \tag{B.1}$$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\,\dot{x}_2 \tag{B.2}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right) = m_2\,\ddot{x}_2 \tag{B.3}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=x_2} -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{-\left[\frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right]\right\} = \left[k\left(x_1 - x_2\right)\left(-1\right) + kx_2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -k\left(x_1 - x_2\right) + kx_2 = -kx_1 + 2kx_2 \tag{B.4}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{B.565}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=x_2} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{B.6}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Αναλυτικός υπολογισμός ιδιοτιμών

Σύμφωνα με την Εξ.(25), ισχύει:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -4\lambda+2 & -1 \\ -1 & -\lambda+2 \end{bmatrix}\right)=0 \tag{Γ.1}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(Γ.1), προκύπτει:

$$\begin{gathered}\det\left(\begin{bmatrix} -4\lambda+2 & -1 \\ -1 & -\lambda+2 \end{bmatrix}\right)=0 \Rightarrow \left(-4\lambda+2\right)\left(-\lambda+2\right)-\left(-1\right)\left(-1\right)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(4\lambda^2-8\lambda-2\lambda+4\right)-1=0 \Rightarrow 4\lambda^2-10\lambda+3=0\end{gathered} \tag{Γ.2}$$

Η διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της Εξ.(Γ.2) είναι ίση με:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-10\right)^2-4\times4\times3=100-48=52 \tag{Γ.3}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της Εξ.(Γ.2) είναι ίσες με:

$$\begin{gathered}\lambda=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-10\right)\pm\sqrt{52}}{2\times4}=\frac{10\pm7.211}{8}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda_1=\omega_1^2=2.151375 \\ \lambda_2=\omega_2^2=0.348625\end{matrix}\right\}\Rightarrow \\ \Rightarrow\left\{\begin{matrix}\omega_1=\pm\sqrt{2.151375}=\pm1.4668 \\ \omega_2=\pm\sqrt{0.348625}=\pm0.5904\end{matrix}\right\}\end{gathered} \tag{Γ.4}$$

Σύμφωνα με την Εκπαιδευτική Ενότητα 07, επειδή το μητρώο μάζας $\underline{M}$ και το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι θετικά (ημι)ορισμένα, έπεται ότι $\omega_i \geq 0$. Συνεπώς, από τις λύσεις (Γ.4), γίνονται αποδεκτές μόνον οι θετικές ρίζες, οπότε ισχύει:

$$\left\{\begin{matrix}\omega_1=1.4668 \\ \omega_2=0.5904\end{matrix}\right\} \tag{Γ.5}$$

Ταξινομώντας τις λύσεις (Γ.5) (ισοδύναμα, τις ιδιοτιμές ω_i) κατά αύξουσα τιμή, προκύπτει:

$$\left\{\begin{matrix}\omega_1=0.5904 \\ \omega_2=1.4668\end{matrix}\right\} \tag{Γ.6}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Αναλυτικός υπολογισμός συντελεστών απόκρισης της εφαρμογής

Από τις Εξ.(37,38), οι αποκρίσεις των μαζών m_1 και μάζας m_2 είναι:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) &= \left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right]\times(0.6056) + \left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right]\times(-6.6056) \end{aligned} \tag{Δ.1}$$

Η πρώτη χρονική παράγωγός των Εξ.(Δ.1) είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t) + \omega_1 B_1\cos(\omega_1 t) - \omega_2 A_2\sin(\omega_2 t) + \omega_2 B_2\cos(\omega_2 t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left[-\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t) + \omega_1 B_1\cos(\omega_1 t)\right]\times(0.6056) + \left[-\omega_2 A_2\sin(\omega_2 t) + \omega_2 B_2\cos(\omega_2 t)\right]\times(-6.6056) \end{aligned} \tag{Δ.2}$$

Από την εκφώνηση, δίδεται ότι οι αρχικές μετατοπίσεις για το εξεταζόμενο σύστημα είναι $x_1(0)=1$ και $x_2(0)=0$, αντίστοιχα. Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(Δ.1) και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει:

$$\left\{\begin{aligned} x_1(0) &= A_1\cos(\omega_1\times 0) + \cancel{B_1\sin(\omega_1 t)} + A_2\cos(\omega_2\times 0) + \cancel{B_2\sin(\omega_2 t)} \\ x_2(0) &= \left[A_1\cos(\omega_1\times 0) + \cancel{B_1\sin(\omega_1 t)}\right]\times(0.6056) + \left[A_2\cos(\omega_2\times 0) + \cancel{B_2\sin(\omega_2 t)}\right]\times(-6.6056) \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[x_2(0)=0]{x_1(0)=1} \left\{\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ 0.6056\,A_1 - 6.6056\,A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{Δ.3}$$

Η επίλυση του συστήματος (Δ.3) δίδει:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6.6056 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.6056 & -6.6056 \end{vmatrix}} = \frac{-6.6056}{-6.6056-0.6056} = \frac{6.6056}{7.2112} \Rightarrow A_1 = 0.9160 \tag{Δ.4}$$

και

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.6056 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.6056 & -6.6056 \end{vmatrix}} = \frac{-0.6056}{-6.6056-0.6056} = \frac{0.6056}{7.2112} \Rightarrow A_2 = 0.08398 \tag{Δ.5}$$

Επίσης, από την εκφώνηση, δίδεται ότι οι αρχικές ταχύτητες για το εξεταζόμενο σύστημα είναι $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(Δ.2), προκύπτει:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= \cancel{-\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t)} + \omega_1 B_1\cos(\omega_1 t) - \cancel{\omega_2 A_2\sin(\omega_2 t)} + \omega_2 B_2\cos(\omega_2 t) \\ \dot{x}_2(0) &= \left[\cancel{-\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t)} + \omega_1 B_1\cos(\omega_1\times 0)\right]\times(0.6056) + \left[\cancel{-\omega_2 A_2\sin(\omega_2 t)} + \omega_2 B_2\cos(\omega_2\times 0)\right]\times(-6.6056) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\dot{x}_2(0)=0]{\dot{x}_1(0)=0}\left\{\begin{array}{c}\omega_1 B_1+\omega_2 B_2=0\\ 0.6056\omega_1 B_1-6.6056\omega_2 B_2=0\end{array}\right\}\xrightarrow[\omega_2=1.4668]{\omega_1=0.5904}\left\{\begin{array}{c}0.5904 B_1+1.4668 B_2=0\\ 0.6056\times 0.5904 B_1-6.6056\times 1.4668 B_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}0.5904 B_1+1.4668 B_2=0\\ 0.3575 B_1-9.6891 B_2=0\end{array}\right\} \qquad (\Delta.6)$$

Η ορίζουσα του ομογενούς συστήματος (Δ.6) είναι:

$$D=\begin{vmatrix}0.5904 & 1.4668\\ 0.3575 & -9.6891\end{vmatrix}=0.5904\times(-9.6891)-1.4668\times 0.3575=-5.7204-0.5244=-6.2448\neq 0$$

(Δ.7)

Από την Εξ.(Δ.7) προκύπτει ότι το ομογενές σύστημα (Δ.6) έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική λύση, δηλαδή:

$$B_1=B_2=0 \qquad (\Delta.8)$$

Επομένως, η απόκριση της μάζας m_1, συνδυάζοντας τις Εξ.(Δ.1, Δ.4, Δ.5, Δ.8), θα δίδεται από την εξίσωση:

$$x_1(t)=0.9160\cos(\omega_1 t)+0.08398\cos(\omega_2 t) \qquad (\Delta.9)$$

Κατ' αντιστοιχία, η απόκριση της μάζας m_2, πάλι συνδυάζοντας τις Εξ.(Δ.1, Δ.4, Δ.5, Δ.8), θα δίδεται από την εξίσωση:

$$\begin{array}{l}x_2(t)=(0.9160\times 0.6056)\cos(\omega_1 t)+0.08398\times(-6.6056)\cos(\omega_2 t)\Rightarrow\\ \Rightarrow x_2(t)=0.5547\cos(\omega_1 t)-0.5547\cos(\omega_2 t)\end{array} \qquad (\Delta.10)$$

Συνοψίζοντας, η απόκριση του συστήματος, σε μητρωϊκή γραφή, είναι:

$$\underset{\sim}{x}(t)=\left\{\begin{array}{c}x_1(t)\\ x_2(t)\end{array}\right\}=\begin{bmatrix}0.9160\\ 0.5547\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t)+\begin{bmatrix}0.08398\\ -0.5547\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t) \qquad (\Delta.11)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε: Ανεξαρτησία απόκρισης από επιλογές σταθερών

Στην πλέον γενική τους μορφή, οι Εξ.(37,38) γράφονται ως εξής:

$$x_1(t) = \Phi_{11}\left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right] + \Phi_{12}\left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right] \quad \text{(E.1)}$$

$$x_2(t) = \Phi_{21}\left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right] + \Phi_{22}\left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right] \quad \text{(E.2)}$$

Σε μητρωϊκή γραφή, οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix}\left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right] + \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix}\left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right] \quad \text{(E.3)}$$

Από την επίλυση του ομογενούς συστήματος της Εξ.(24), προκύπτει ότι:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \alpha\Phi_{11} \end{Bmatrix} = \Phi_{11}\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \text{(E.4)}$$

και

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \alpha\Phi_{21} \end{Bmatrix} = \Phi_{21}\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix}, \beta \in \mathbb{R}^* \quad \text{(E.5)}$$

όπου οι ποσότητες Φ_{11} και Φ_{21} είναι ελεύθερες παράμετροι, ενώ οι ποσότητες α και β καθορίζονται μονοσήμαντα από την επίλυση του συστήματος (Ε.3). Ο συνδυασμός των Εξ.(Ε.3, Ε.4, Ε.5) δίδει:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \Phi_{11}\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}\left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right] + \Phi_{21}\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix}\left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right] \quad \text{(E.6)}$$

Θεωρώντας $\Phi_{11} = C_1 \in \mathbb{R}^*$ και $\Phi_{21} = C_2 \in \mathbb{R}^*$, η Εξ.(Ε.6) γράφεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = C_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}\left[A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right] + C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix}\left[A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right] \quad \text{(E.7)}$$

Η πρώτη χρονική παράγωγος της Εξ.(Ε.8) ισούται με:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = C_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}\left[-\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t) + \omega_1 B_1\cos(\omega_1 t)\right] + C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix}\left[-\omega_2 A_2\sin(\omega_2 t) + \omega_2 B_2\cos(\omega_2 t)\right]$$

(Ε.8)

Οι αρχικές συνθήκες μετατόπισης του συστήματος είναι:

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = C_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}A_1 + C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix}A_2 = \begin{Bmatrix} C_1A_1 + C_2A_2 \\ \alpha C_1A_1 + \beta C_2A_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ \alpha C_1 & \beta C_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} \quad \text{(E.9)}$$

Η επίλυση του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων δίδει:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1(0) & C_2 \\ x_2(0) & \beta C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ \alpha C_1 & \beta C_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1(0)\beta C_2 - x_2(0) C_2}{\beta C_1 C_2 - \alpha C_1 C_2} = \frac{\left(\beta x_1(0) - x_2(0)\right) C_2}{(\beta - \alpha) C_1 C_2} = \left(\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{\beta x_1(0) - x_2(0)}{\beta - \alpha}\right) \tag{E.10}$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & x_1(0) \\ \alpha C_1 & x_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ \alpha C_1 & \beta C_2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1 x_2(0) - \alpha C_1 x_1(0)}{\beta C_1 C_2 - \alpha C_1 C_2} = \frac{\left(x_2(0) - \alpha x_1(0)\right) C_1}{(\beta - \alpha) C_1 C_2} = \left(\frac{1}{C_2}\right)\left(\frac{x_2(0) - \alpha x_1(0)}{\beta - \alpha}\right) \tag{E.11}$$

Οι αρχικές συνθήκες ταχύτητας του συστήματος είναι:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix} \omega_1 B_1 + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix} \omega_2 B_2 = \begin{Bmatrix} C_1\omega_1 B_1 + C_2\omega_2 B_2 \\ \alpha C_1 \omega_1 B_1 + \beta C_2 \omega_2 B_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_1\omega_1 & C_2\omega_2 \\ \alpha C_1 \omega_1 & \beta C_2 \omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \end{Bmatrix} \tag{E.12}$$

Η επίλυση του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων δίδει:

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_1(0) & C_2\omega_2 \\ \dot{x}_2(0) & \beta C_2 \omega_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1\omega_1 & C_2\omega_2 \\ \alpha C_1\omega_1 & \beta C_2\omega_2 \end{vmatrix}} = \frac{\beta C_2 \omega_2 \dot{x}_1(0) - C_2\omega_2 \dot{x}_2(0)}{\beta C_1 C_2 \omega_1 \omega_2 - \alpha C_1 C_2 \omega_1 \omega_2} = \frac{\left(\beta \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\right) C_2 \omega_2}{(\beta - \alpha) C_1 C_2 \omega_1 \omega_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 = \left(\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{\beta \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (\beta - \alpha)}\right) \tag{E.13}$$

$$B_2 = \frac{\begin{vmatrix} C_1\omega_1 & \dot{x}_1(0) \\ \alpha C_1\omega_1 & \dot{x}_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1\omega_1 & C_2\omega_2 \\ \alpha C_1\omega_1 & \beta C_2\omega_2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1 \omega_1 \dot{x}_2(0) - \alpha C_1 \omega_1 \dot{x}_1(0)}{\beta C_1 C_2 \omega_1 \omega_2 - \alpha C_1 C_2 \omega_1 \omega_2} = \frac{\left(\dot{x}_2(0) - \alpha \dot{x}_1(0)\right) C_1 \omega_1}{(\beta - \alpha) C_1 C_2 \omega_1 \omega_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_2 = \left(\frac{1}{C_2}\right)\left(\frac{\dot{x}_2(0) - \alpha \dot{x}_1(0)}{\omega_2 (\beta - \alpha)}\right) \tag{E.14}$$

Συνοψίζοντας, από τις Εξ.(Ε.10, Ε.13) προέκυψε:

$$A_1 = \left(\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{\beta x_1(0) - x_2(0)}{\beta - \alpha}\right) \qquad B_1 = \left(\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{\beta \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (\beta - \alpha)}\right) \tag{E.15}$$

Καθίσταται φανερό ότι η τιμή των συντελεστών A_1 και B_1 είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμητικού συντελεστή C_1. Διευκρινίζεται ότι και στους δύο συντελεστές, ο δεύτερος όρος του γινομένου είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Επίσης, από τις Εξ.(Ε.11, Ε.14) προέκυψε:

$$A_2 = \left(\frac{1}{C_2}\right)\left(\frac{x_2(0) - \alpha x_1(0)}{\beta - \alpha}\right) \qquad B_2 = \frac{1}{C_2}\left(\frac{\dot{x}_2(0) - \alpha \dot{x}_1(0)}{\omega_2(\beta - \alpha)}\right) \tag{E.15}$$

Σε αντιστοιχία με τους συντελεστές A_1 και B_1, από την Εξ.(Ε.15) καθίσταται φανερό ότι η τιμή των συντελεστών A_2 και B_2 είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμητικού συντελεστή C_2. Όπως και προηγουμένως, διευκρινίζεται ότι, και στους συντελεστές A_2 και B_2, ο δεύτερος όρος του γινομένου είναι μονοσήμαντα ορισμένος.