ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

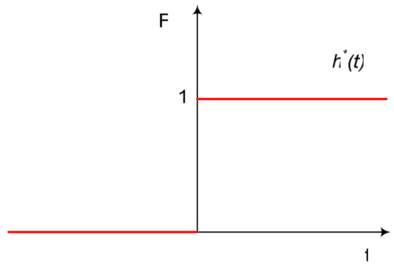
Εκπαιδευτική Ενότητα 9η
Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός - Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Έστω ένα διβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-k$ (άρα δεν υπάρχουν στοιχεία απόσβεσης), για το οποίο δίδεται ότι το μητρώο μάζας $\underline{M}$, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ και το διάνυσμα της εξωτερικής διέγερσης $\underset{\sim}{F}$ είναι, αντίστοιχα:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} h^*(t) \tag{1}$$

Ως $h^*(t)$ συμβολίζεται η βηματική συνάρτηση Heaviside, η γραφική παράσταση της οποίας απεικονίζεται στο Σχήμα 1.

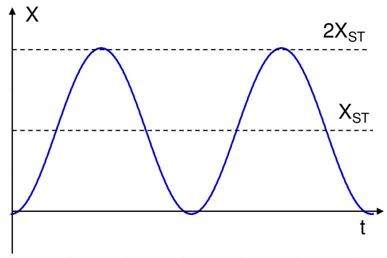


Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης Heaviside

Ζητείται η απόκριση του εν λόγω δυναμικού συστήματος, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες μετατόπισης και ταχύτητας.

Λύση

Εάν το δυναμικό σύστημα ήταν ενός Βαθμού Ελευθερίας, τότε, όπως έχουμε ήδη εξετάσει στην Εκπαιδευτική Ενότητα 06, η απόκριση του συστήματος θα ήταν αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Απόκριση μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος υπό διέγερση Heaviside

Ωστόσο, στην παρούσα περίπτωση, το δυναμικό σύστημα είναι διβάθμιο. Συνεπώς, αξιοποιώντας τον Ιδιοανυσματικό Μετασχηματισμό, είναι δυνατόν να περιγραφεί η απόκριση του συστήματος ως υπέρθεση αποκρίσεων δύο, κατάλληλα διαμορφωμένων, μονοβάθμιων συστημάτων. Η όλη διαδικασία αποτελείται από δύο βήματα:

Βήμα 1: Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων

Βήμα 2: Εφαρμογή του Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού

Ακολουθεί αναλυτικός υπολογισμός καθενός εκ των Βημάτων αυτών.

- ***Για το Βήμα 1***

Κατά τα γνωστά (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 07/Εξ.43), οι ιδιοτιμές του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\det\left(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \xleftrightarrow{\lambda=\omega^2} \det\left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{2}$$

Εισάγοντας στην Εξ.(2) τα μητρώα μάζας $\underline{M}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$ από την Εξ.(1), μετά την εκτέλεση πράξεων, προκύπτει:

$$\det\left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \Rightarrow \det\left(-\lambda\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -3\lambda+5 & -3 \\ -3 & -2\lambda+3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-3\lambda+5\right)\left(-2\lambda+3\right) - \left(-3\right)\left(-3\right) = 0 \Rightarrow 6\lambda^2 - 9\lambda - 10\lambda + 15 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2 - 19\lambda + 6 = 0 \tag{3}$$

Η Διακρίνουσα του του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της Εξ.(3) είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(-19\right)^2 - 4\times 6\times 6 = 361 - 144 \Rightarrow \Delta = 217 \tag{4}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της Εξ.(3) είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\left(-19\right) \pm \sqrt{217}}{2\times 6} = \frac{19 \pm \sqrt{217}}{12} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = \dfrac{19+\sqrt{217}}{12} = 2.81 \\ \lambda_2 = \dfrac{19-\sqrt{217}}{12} = 0.356 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Ταξινομώντας τις ρίζες κατά αύξουσα σειρά, προκύπτει:

$$\lambda_2 = 2.81 \qquad \lambda_1 = 0.356 \tag{6}$$

Ισοδύναμα, προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 = \omega_1^2 = 0.356 \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = 2.81 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 = 0.597 \\ \omega_2 = 1.67 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Υπενθυμίζεται ότι διατηρούνται οι θετικές ρίζες των ιδιοσυχνοτήτων ω_1, ω_2 διότι τα μητρώα μάζας $\underline{M}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι θετικά (ημι)ορισμένα. Για κάθε μία από τις ευρεθείσες ιδιοσυχνότητες, υπολογίζεται το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα μέσω της επίλυσης του ομογενούς συστήματος (γενικά, υπάρχουν διάφορες αριθμητικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοσυχνοτήτων, αλλά στη συγκεκριμένη εφαρμογή, επειδήτο προκύπτον σύστημα είναι 2×2, χρησιμοποιείται η μέθοδος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου):

$$\left(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{0} \xleftrightarrow{\lambda=\omega^2} \left(-\lambda \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{0} \tag{8}$$

Πιο συγκεκριμένα, για την πρώτη ιδιοσυχνότητα, ισχύει:

$$\left(-\lambda_1 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \left(-\lambda_1\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \xrightarrow{\lambda_1=0.356}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-3\times 0.356+5 & -3\\ -3 & -2\times 0.356+3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3.932 & -3\\ -3 & 2.288\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}3.932\Phi_{11} - 3\Phi_{21} = 0\\ -3\Phi_{11} + 2.288\Phi_{21} = 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}(3.932/3)\Phi_{11} = \Phi_{21}\\ (3/2.288)\Phi_{11} = \Phi_{21}\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}(3.932/3)\Phi_{11} = \Phi_{21}\\ (3/2.288)\Phi_{11} = \Phi_{21}\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}1.31\Phi_{11} = \Phi_{21}\\ 1.31\Phi_{11} = \Phi_{21}\end{Bmatrix} \Rightarrow 1.31\Phi_{11} = \Phi_{21} \Rightarrow \Phi_{11} = 0.763\Phi_{21} \tag{9}$$

Αποδίδοντας, αυθαίρετα, την, βολική για την εκτέλεση πράξεων, τιμή $\Phi_{21} = 1$, προκύπτει:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0.763\Phi_{21}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix} = \Phi_{21}\begin{Bmatrix}0.763\\ 1.00\end{Bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{21}=1} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{Bmatrix}0.763\\ 1.00\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\Phi}_1^T = \begin{bmatrix}0.763 & 1.00\end{bmatrix} \tag{10}$$

Κατ' αντιστοιχία, για τη δεύτερη ιδιοσυχνότητα, ισχύει:

$$\left(-\lambda_2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_2 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \left(-\lambda_2\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \xrightarrow{\lambda_2=2.81}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-3\times 2.81+5 & -3\\ -3 & -2\times 2.81+3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-3.43 & -3\\ -3 & 2.62\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}-3.43\Phi_{21} - 3\Phi_{22} = 0\\ -3\Phi_{21} + 2.62\Phi_{22} = 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\Phi_{21} = -(3/3.43)\Phi_{22}\\ \Phi_{21} = -(2.62/3)\Phi_{22}\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\Phi_{21} = -(3/3.43)\Phi_{22}\\ \Phi_{21} = -(2.62/3)\Phi_{22}\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}\Phi_{21} = -0.874\Phi_{22}\\ \Phi_{21} = -0.874\Phi_{22}\end{Bmatrix} \Rightarrow \Phi_{21} = -0.874\Phi_{22} \tag{11}$$

Αποδίδοντας, αυθαίρετα, την, βολική για την εκτέλεση πράξεων, τιμή $\Phi_{22} = 1$, προκύπτει:

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-0.874\Phi_{22}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix} = \Phi_{22}\begin{Bmatrix}-0.874\\ 1.00\end{Bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{22}=1} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix}-0.874\\ 1.00\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underset{\sim}{\Phi}_2^T = \begin{bmatrix}-0.874 & 1.00\end{bmatrix} \tag{12}$$

Σημαντική Παρατήρηση

Στην συγκεκριμένη εφαρμογή, το δυναμικό σύστημα είναι δύο Βαθμών Ελευθερίας. Ως εκ τούτου, το ομογενές σύστημα της Εξ.(8) είναι 2×2, οπότε κάθε ιδιοάνυσμα διαθέτει δύο στοιχεία, ένα εκ των οποίων είναι ελεύθερη μεταβλητή ενώ το άλλο αποτελεί εξηρτημένη μεταβλητή. Στη συγκεκριμένη, λοιπόν, περίπτωση των διβάθμιων δυναμικών συστημάτων, εάν αποδοθεί στην ανεξάρτητη μεταβλητή η μηδενική τιμή, τότε και η εξηρτημένη μεταβλητή θα είναι, ομοίως, μηδενική. Αυτό θα σήμαινε ότι θα προέκυπτε μηδενικό ιδιοάνυσμα, άρα θα προέκυπτε μη-ταλάντωση, κάτι που αντιβαίνει στη φύση της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος. Έπεται, λοιπόν, ότι σε διβάθμιο δυναμικό σύστημα, είναι δυνατόν να αποδοθεί οποιαδήποτε τιμή στις ποσότητες Φ_{21} και Φ_{22}, πλην της μηδενικής τιμής. Ωστόσο, εάν το δυναμικό σύστημα διέθετε τρεις ή και περισσότερους βαθμούς ελευθερίας, τότε τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα θα κατέληγαν σε ιδιοανύσματα με, αντίστοιχα, τρεις ή περισσότερους όρους, και τότε θα ήταν δυνατόν να εμφανίζονται μηδενικά στοιχεία στα ιδιοανύσματα. Αυτή η παρατήρηση έχει πολύ μεγάλη κατασκευαστική σημασία, όπως θα δούμε σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα.

- ***Για το Βήμα 2***

Όπως γνωρίσαμε στην Εκπαιδευτική Ενότητα 08, η μαθηματική έκφραση του Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού σε ένα δυναμικό σύστημα είναι:

$$\underset{\sim}{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t)=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)+\ldots+\underset{\sim}{\Phi}_N q_N(t) \tag{13}$$

όπου $\underset{\sim}{\Phi}_i$ είναι τα ιδιοανύσματα του δυναμικού συστήματος, $q_i(t)$ είναι οι επονομαζόμενοι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας και N είναι το πλήθος των Βαθμών Ελευθερίας του δυναμικού συστήματος. Στην προκειμένη περίπτωση, το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα είναι διβάθμιο, άρα $N=2$, και η Εξ.(13), βάσει των Εξ.(10,12), γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)=\begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} q_1(t)+\begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} q_2(t) \tag{14}$$

Για να είναι σαφώς ορισμένη η Εξ.(14), αρκεί να προσδιορισθούν οι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας $q_i(t)$. Προς τούτο, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08/σελ.14):

$$\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_i = m_{ii} \tag{15}$$

$$g_i(t)=\left(\frac{\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}}{m_{ii}}\right) \tag{16}$$

$$\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=g_i(t), \quad i=1,2,\ldots,N \tag{17}$$

όπου η ποσότητα ω_i ισούται με την $i-$ιδιοσυχνότητα του δυναμικού συστήματος (έχει υπολογισθεί, βλ. Εξ.(7)) και εκφράζει την ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου σε ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα, m_{ii} είναι οι γενικευμένες μάζες και $\underset{\sim}{F}$ είναι η εξωτερική διέγερση. Υπενθυμίζεται (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08), ότι, μέσω του Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού, ένα δυναμικό σύστημα N Βαθμών Ελευθερίας θεωρείται ως ένα σύνολο N μονοβάθμιων συστημάτων με Βαθμό Ελευθερίας $q_i(t)$, κάθε ένα από τα οποία διαθέτει μοναδιαία μάζα και σταθερά ελατηρίου ω_i^2 (ή, ισοδύναμα, διαθέτει γενικευμένη μάζα m_{ii} και μοναδιαία σταθερά ελατηρίου). Για τον προσδιορισμό των γενικευμένων Βαθμών Ελευθερίας $q_i(t)$, αρκεί η επίλυση της Εξ.(17). Προς αυτή την κατεύθυνση, πρώτα υπολογίζουμε τις ποσότητες $g_i(t)$ μέσω της Εξ.(16) και για $i=1,2$. Πιο συγκεκριμένα, για τη γενικευμένη μάζα m_{11}, ισχύει:

$$m_{11} = \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.763 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.763 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\times 0.763 & 0 \\ 0 & 2\times 1.00 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{11} = \begin{bmatrix} 0.763 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.289 \\ 2.00 \end{bmatrix} = 0.763\times 2.289 + 1.00\times 2.00 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{11} = 3.75 \tag{18}$$

Κατ' αντιστοιχία, για τη γενικευμένη μάζα m_{22}, ισχύει:

$$m_{22} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} -0.874 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.874 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3\times 0.874 & 0 \\ 0 & 2\times 1.00 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{22} = \begin{bmatrix} -0.874 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.622 \\ 2.00 \end{bmatrix} = (-0.874)\times(-2.622) + 1.00\times 2.00 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{22} = 4.29 \tag{19}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(1,10,18) δίδει:

$$g_1(t) = \frac{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underset{\sim}{F}}{m_{11}} = \frac{\begin{bmatrix} 0.763 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} h^*(t)}{3.75} = \left(\frac{0.763\times 2 + 1.00\times 1}{3.75} \right) h^*(t) = \underbrace{\left(\frac{2.526}{3.75} \right)}_{\acute{\varepsilon}\sigma\tau\omega\, G_1} h^*(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1(t) = G_1\, h^*(t),\, G_1 = 0.674 \tag{20}$$

Κατ' αντιστοιχία, ο συνδυασμός των Εξ.(1,12,19) δίδει:

$$g_2(t) = \frac{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underset{\sim}{F}}{m_{22}} = \frac{\begin{bmatrix} -0.874 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} h^*(t)}{4.29} = \left(\frac{-0.874\times 2 + 1.00\times 1}{4.29} \right) h^*(t) = \underbrace{\left(\frac{-0.748}{4.29} \right)}_{\acute{\varepsilon}\sigma\tau\omega\, G_2} h^*(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2(t) = G_2\, h^*(t),\, G_2 = -0.174 \tag{21}$$

Η Εξ.(17), βάσει των Εξ.(20,22), είναι δυνατόν να γραφεί ως εξής:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2\, q_i(t) = G_i h^*(t),\, i = 1,2 \tag{22}$$

Η επίλυση της Εξ.(22) είναι δυνατόν να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους. Για τις ανάγκες της παρούσας εφαρμογής, και σύμφωνα με τις προηγούμενες Ενότητες, θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο των Προσδιοριστέων Συντελεστών. Σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, θα εξοικειωθούμε με τη χρήση του Μετασχηματισμού Laplace. Συνεπώς, η μορφή της λύσης $q_i(t)$ της Εξ.(22), κατά τα γνωστά, θα είναι:

$$q_i(t) = \underbrace{q_{iP}}_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta} + \underbrace{q_{ih}}_{o\mu o\gamma\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta}, i = 1,2 \tag{23}$$

Η μερική λύση ακολουθεί τη μορφή της διεγείρουσας δύναμης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η διέγερση είναι μία συνάρτηση Heaviside (βλ. Εξ.(1)), οπότε για χρόνους $t > 0$, η εξωτερική διέγερση έχει χρονικά σταθερή τιμή (βλ. Σχήμα 1). Ως εκ τούτου και η μερική λύση θα έχει αντίστοιχα χαρακτηριστικά, δηλαδή θα είναι μορφής Heaviside και για χρόνους $t > 0$ θα έχει χρονικά σταθερή τιμή (άρα και μηδενική δεύτερη χρονική παράγωγο). Με άλλα λόγια, η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$q_{iP} = P_i\, h^*(t) \tag{24}$$

Κατά τα γνωστά, η ομογενής λύση θα είναι αρμονικής μορφής:

$$q_{ih}(t) = A_{ii}\cos(\omega_i t) + B_{ii}\sin(\omega_i t),\ i = 1,2 \tag{25}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(23,24,25) δίδει:

$$q_i(t) = \underbrace{P_i\, h^*(t)}_{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ q_{1P}} + \underbrace{A_{ii}\cos(\omega_i t) + B_{ii}\sin(\omega_i t)}_{o\mu o\gamma\varepsilon\nu\acute{\eta}\varsigma\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ q_{1h}},\ i = 1,2 \tag{26}$$

Για τον πλήρη προσδιορισμό των γενικευμένων Βαθμών Ελευθερίας $q_i(t)$, αρκεί να υπολογισθούν οι σταθεροί συντελεστές P_i, A_{ii} και B_{ii}. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών και της Εξ.(22). Πιο συγκεκριμένα, εισάγοντας τη μερική λύση στην Εξ.(22), προκύπτει:

$$\omega_i^2\, P_i\, h^*(t) = G_i h^*(t),\ i = 1,2 \Rightarrow \omega_i^2\, P_i = G_i,\ i = 1,2 \Rightarrow P_i = \left(\frac{G_i}{\omega_i^2}\right) = const,\ i = 1,2 \tag{27}$$

Όπως φαίνεται από την Εξ.(27), ο σταθερός συντελεστής P_i, ως λόγος της διεγείρουσας δύναμης G_i προς τη σταθερά ελατηρίου ω_i (βλ. και σελίδα 4, τελευταία πράγραφο), εκφράζει το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος $Q_{i,ST}$, το οποίο αποτελεί μία σταθερή ποσότητα:

$$Q_{i,ST} = P_i = \left(\frac{G_i}{\omega_i^2}\right) = const,\ i = 1,2 \tag{28}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(26,27,28) δίδει:

$$q_i\left(t\right)=Q_{i,ST}+A_{ii}\cos\left(\omega_i t\right)+B_{ii}\sin\left(\omega_i t\right),\, i=1,2 \tag{29}$$

Για την επιβολή αρχικών συνθηκών, θεωρούμε τη χρονική στιγμή $t=0^+$ (και όχι τη χρονική στιγμή $t=0$, για την οποία η συνάρτηση Heaviside δεν ορίζεται). Για την εν λόγω χρονική στιγμή, και θεωρώντας μηδενική αρχική μετατόπιση, ως ορίζει η εκφώνηση, η Εξ.(29) δίδει:

$$q_i\left(t\right)=0\Rightarrow Q_{i,ST}+A_{ii}\cos\left(\omega_i t\right)+\cancel{B_{ii}\sin\left(\omega_i t\right)}=0,\, i=1,2\Rightarrow Q_{i,ST}+A_{ii}=0\Rightarrow A_{ii}=-Q_{i,ST} \tag{30}$$

Η ταχύτητα $\dot{q}_i\left(t\right)$ βρίσκεται παραγωγίζοντας χρονικά την Εξ.(29), οπότε και προκύπτει:

$$\dot{q}_i\left(t\right)=-\omega_i A_{ii}\sin\left(\omega_i t\right)+\omega_i B_{ii}\cos\left(\omega_i t\right),\, i=1,2 \tag{31}$$

Συνεπώς, θεωρώντας και πάλι τη χρονική στιγμή $t=0^+$, όπως και προηγουμένως, και επιβάλλοντας μηδενική αρχική ταχύτητα, ως η εκφώνηση ορίζει, η Εξ.(31) δίδει:

$$\dot{q}_i\left(t\right)=0\Rightarrow -\omega_i A_{ii}\cancel{\sin\left(\omega_i t\right)}+\omega_i B_{ii}\cos\left(\omega_i t\right)=0,\, i=1,2\Rightarrow \omega_i B_{ii}\cos\left(\omega_i t\right)=0,\, i=1,2 \tag{32}$$

Επειδή η Εξ.(32) πρέπει να ισχύει για κάθε ιδιοσυχνότητα ω_i, έπεται ότι:

$$B_{ii}=0,\, i=1,2 \tag{33}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(29,30,33) δίδει:

$$q_i\left(t\right)=Q_{i,ST}h^*\left(t\right)-Q_{i,ST}\cos\left(\omega_i t\right)=Q_{i,ST}\left[h^*\left(t\right)-\cos\left(\omega_i t\right)\right],\, i=1,2 \tag{34}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στις Εξ.(28,34) και για $i=1$ προκύπτει:

$$P_1=Q_{1,ST}=\left(\frac{G_1}{\omega_1^2}\right)=\left(\frac{0.674}{0.356}\right)\Rightarrow P_1=1.89 \tag{35}$$

$$q_1\left(t\right)=Q_{1,ST}\left[h^*\left(t\right)-\cos\left(\omega_1 t\right)\right]\Rightarrow q_1\left(t\right)=1.89\left[h^*\left(t\right)-\cos\left(\omega_1 t\right)\right] \tag{36}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στις Εξ.(28,34) και για $i=2$ προκύπτει:

$$P_2=Q_{2,ST}=\left(\frac{G_2}{\omega_2^2}\right)=\left(\frac{-0.174}{2.81}\right)\Rightarrow P_2=-0.0619 \tag{37}$$

$$q_2\left(t\right)=Q_{2,ST}\left[h^*\left(t\right)-\cos\left(\omega_2 t\right)\right]\Rightarrow q_2\left(t\right)=-0.0619\left[h^*\left(t\right)-\cos\left(\omega_2 t\right)\right] \tag{38}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(14), με τις Εξ.(35,36,37,38), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} x_1\left(t\right) \\ x_2\left(t\right) \end{bmatrix}=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1\left(t\right)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2\left(t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 1.89 \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} \left(h^*(t) - \cos(\omega_1 t) \right) + (-0.0619) \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} \left(h^*(t) - \cos(\omega_2 t) \right) \quad (39)$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(39), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \left(1.89 \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} - 0.0619 \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} \right) h^*(t) \\ &-1.89 \begin{bmatrix} 0.763 \\ 1.00 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ &+0.0619 \begin{bmatrix} -0.874 \\ 1.00 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t) \end{aligned} \quad (40)$$

Η τελική μορφή της απόκρισης του εξεταζομένου συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.49 \\ 1.83 \end{bmatrix} h^*(t) - \begin{bmatrix} 1.44 \\ 1.89 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) - \begin{bmatrix} 0.0541 \\ -0.0619 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t) \quad (41)$$

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Η απόκριση του συστήματος ισούται με το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος του συστήματος, στο οποίο (πλάτος) υπερτίθενται μία ταλάντωση με συχνότητα ω_1 και μία ταλάντωση με συχνότητα ω_2.
- Οι ταλαντώσεις με συχνότητες ω_1 και ω_2 δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αντιθέτως, τα πλάτη των ταλαντώσεων αυτών συμμετέχουν στην απόκριση του συστήματος με την αναλογία που καθορίζουν τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα. Με άλλα λόγια, οι ταλαντώσεις των δύο βαθμών ελευθερίας δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά ακολουθούν την αναλογία που προσδιορίζει (ισοδύναμα, δεσμεύει ή ρυθμίζει ή προκαθορίζει) το ιδιοάνυσμα.
- Ποσοτικά, η συνεισφορά του δευτέρου ιδιοανύσματος είναι πολύ μικρότερη της συνεισφοράς του πρώτου ιδιοανύσματος. Αυτό οφείλεται σε δύο παράγοντες.
    - Η τιμή της ποσότητας G_2 (πλάτος γενικευμένης δύναμης δευτέρου ιδιοανύσματος) είναι αρνητική ($G_2 = -0.174 < 0$). Αυτό σημαίνει ότι όταν η διεγείρουσα δύναμη τείνει να μετακινήσει τις μάζες του συστήματος προς την ίδια κατεύθυνση, το ιδιοάνυσμα με αρνητική τιμή τείνει να μετακινήσει τις μάζες προς την αντίθετη κατεύθυνση. Ως εκ τούτου, αυτό το ιδιοάνυσμα τείνει να αναιρέσει (να ακυρώσει) την επιβαλλόμενη δύναμη, με αποτέλεσμα τη μείωση του πλάτους της δύναμης, η οποία διεγείρει (παράγει) το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα. Όσο, δε, μεγαλύτερη είναι η τάξη του ιδιοανύσματος (δηλαδή όσο μεγαλύτερος είναι ο αύξων αριθμός που αντιστοιχεί στα, ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά, ιδιοανύσματα, π.χ. δέκατο ιδιοάνυσμα) τόσο πιο ‘ανώμαλη’ είναι η μορφή του ιδιοανύσματος. Ποιοτικά, μπορούμε να πούμε ότι κάθε ιδιοάνυσμα λειτουργεί ως ‘φίλτρο’, το οποίο φιλτράρει

τη γεωμετρική κατανομή της δύναμης. Έτσι, όσο πιο ‘ανώμαλη’ είναι η μορφή του ιδιοανύσματος, τόσο πιο ‘ισχυρό φίλτρο’ καθίσταται το ιδιοάνυσμα, με αποτέλεσμα τα πλάτη των γενικευμένων δυνάμεων να είναι μικρότερα.

- Το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογο της ιδιοσυχνότητας όπως φαίνεται και από την Εξ.(28), η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για την πληρότητα του κειμένου:

$$Q_{i,ST} = \left(\frac{G_i}{\omega_i^2}\right), i = 1,2 \qquad (42)$$

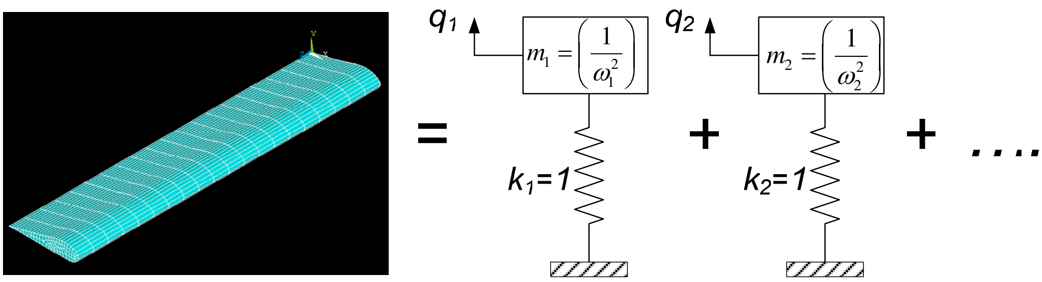
Συνεπώς, όσο αυξάνεται η τάξη της ιδιοσυχνότητας, τόσο το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος θα είναι μικρότερο. Με άλλα λόγια, το ισοδύναμο ελατήριο θα είναι ποιο δύσκαμπτο και ως εκ τούτου, η συνεισφορά στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος θα είναι μικρότερη. Πιο θεωρητικά, από την εξίσωση ισορροπίας του δυναμικού συστήματος, ισχύει:

$$m_{ii}\dot{q}_i + k_{ii}q_i = \underset{\sim}{X}_i^T \underset{\sim}{F} \Rightarrow \left(\frac{1}{\omega_i^2}\right)\dot{q}_i + q_i = \left(\frac{1}{k_{ii}}\right)\underset{\sim}{X}_i^T \underset{\sim}{F} \xrightarrow{\omega_i \to \infty} q_i = \left(\frac{1}{k_{ii}}\right)\underset{\sim}{X}_i^T \underset{\sim}{F} \qquad (43)$$

Με άλλα λόγια, όσο αυξάνεται η τιμή της ιδιοσυχνότητας ω_i, τόσο ο όρος $\left(1/\omega_i^2\right)\dot{q}_i$ τείνει στο μηδέν, ο οποίος εκφράζει τη δυναμική απόκριση του συστήματος, άρα απομένει η Ισοδύναμη Στατική Απόκριση του συστήματος. Αυτή η παρατήρηση έχει ιδιαίτερη αξία διότι πληροφορεί ότι:

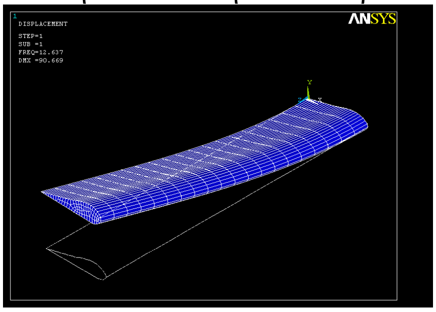
*Στη δυναμική ανάλυση εύκαμπτων πολυβάθμιων δυναμικών συστημάτων, μόνον **λίγες ΧΑΜΗΛΕΣ ιδιοσυχνότητες** είναι εκείνες που **συνεισφέρουν ουσιαστικά** στη **δυναμική απόκριση** του συστήματος (οι υψηλές ιδιοσυχνότητες τείνουν να ακυρώσουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος).*

- Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενες Ενότητας (π.χ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08), με τη βοήθεια του Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού, η δυναμική συμπεριφορά ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος εκφράζεται ως μία σύνθεση (υπέρθεση) κατάλληλα διαμορφωμένων μονοβάθμιων συστημάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

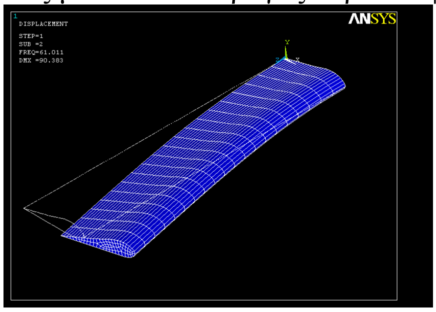


Σχήμα 3: Πτέρυγα αεροσκάφους μοντελοποιηθείσα ως σύνολο μονοβάθμιων συστημάτων

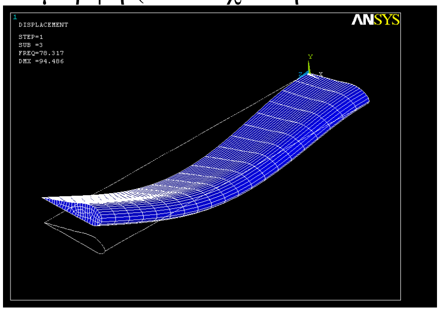
Ακολουθεί η απεικόνιση των 10 πρώτων ιδιομορφών ενός μοντέλου πτέρυγας αεροσκάφους.



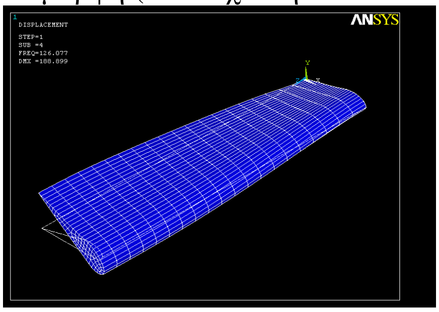
1^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 12.637Hz)



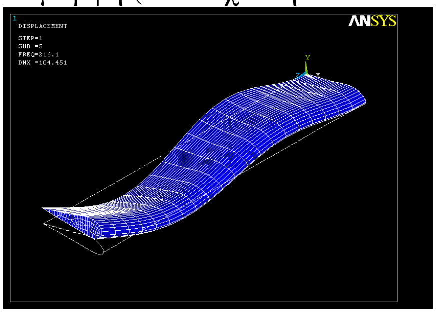
2^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 61.011Hz)



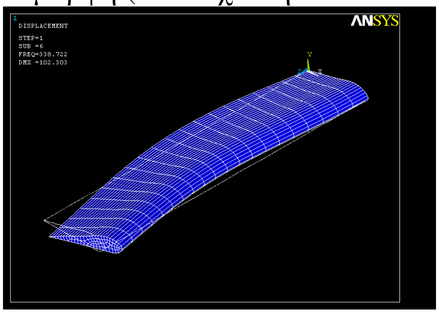
3^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 78.317Hz)



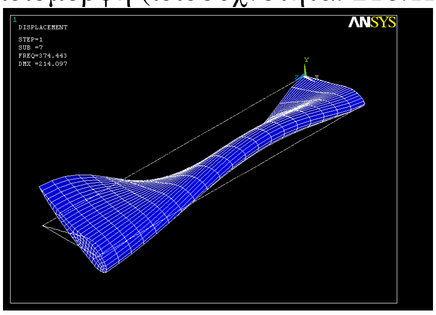
4^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 126.077Hz)



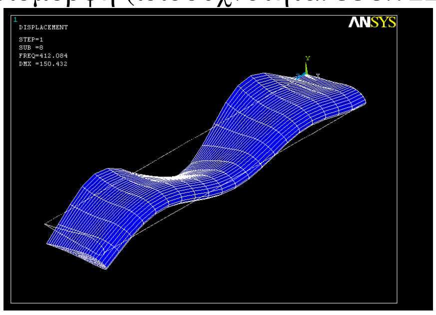
5^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 216.1Hz)



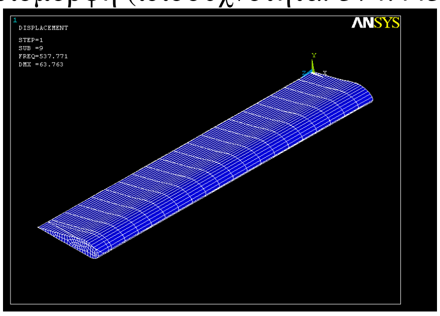
6^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 338.722Hz)



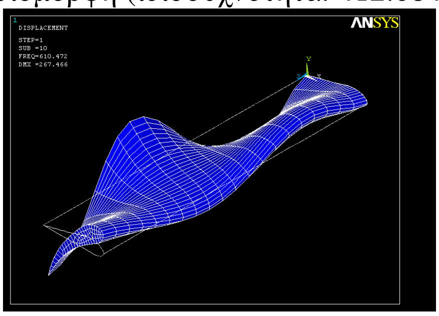
7^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 374.443Hz)



8^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 412.084Hz)



9^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 537.771Hz)



10^{η} ιδιομορφή (ιδιοσυχνότητα: 610.472Hz)

Σχήμα 4: Οι πρώτες δέκα ιδιομορφές (ιδιοανύσματα) ενός μοντέλου πτέρυγας αεροσκάφους, υπολογισμένες με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (η απαραμόρφωτη πτέρυγα απεικονίζεται ως αχνό, λευκό περίγραμμα – Συνολικό πλήθος Βαθμών Ελευθερίας: 6174)

Συνοψίζοντας, η διαδικασία για τον υπολογισμό της απόκρισης του εξεταζομένου διβάθμιου δυναμικού συστήματος, υπό τη δεδομένη εξωτερική διέγερση, είναι η ακόλουθη:

- Διατύπωση της εξίσωσης της απόκρισης του συστήματος, χρησιμοποιώντας Ιδιοανυσματικό Μετασχηματισμό και για δύο Βαθμούς Ελευθερίας (έστω Ε1):

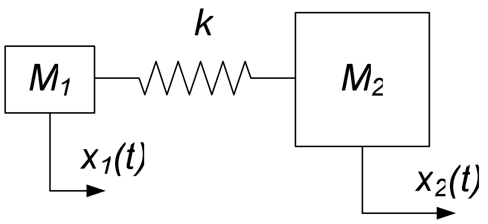
$$\underset{\sim}{x}(t)=\sum_{i=1}^{N=2}\underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t)=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)$$

  Πρέπει να υπολογισθούν τα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i, i=1,2$ και οι γενικευμένοι βαθμοί ελευθερίας $q_i(t), i=1,2$.

- Για τον υπολογισμό των ιδιοανυσμάτων $\underset{\sim}{\Phi}_i, i=1,2$:
  - Υπολογισμός ιδιοτιμών από την επίλυση της εξίσωσης $\det\left(-\omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)=0$.
  - Υπολογισμός ιδιοανυσμάτων από την επίλυση της εξίσωσης $\left(-\omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}=\underset{\sim}{0}$ για κάθε μία ευρεθείσα ιδιοτιμή.
- Για τον υπολογισμό των γενικευμένων βαθμών ελευθερίας $q_i(t), i=1,2$:
  - Υπολογισμός γενικευμένων μαζών από την εξίσωση $\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_i=m_{ii}, i=1,2$ για κάθε βαθμό ελευθερίας (άρα, για κάθε ένα από τα ευρεθέντα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i, i=1,2$).
  - Υπολογισμός γενικευμένης διέγερσης $g_i(t)=\left(\left(\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{F}\right)/m_{ii}\right), i=1,2$ για κάθε βαθμό ελευθερίας.
  - Κατάστρωση της εξίσωσης $\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=g_i(t),\quad i=1,2,...,N$ (έστω Ε2).
  - Θεώρηση λύσης της μορφής $q_i(t)=q_{iP}(t)+q_{ih}(t), i=1,2$ (έστω Ε3).
  - Με βάση τη δοθείσα εξωτερική διέγερση, θεώρηση μερική λύση της μορφής $q_{iP}(t)=P_i h^*(t), P_i=const, i=1,2$.
  - Αντικατάσταση μερικής λύσεως στην (Ε2) και υπολογισμός των $P_i=const$.
  - Για το μεταβατικό τμήμα της απόκρισης (ομογενής λύση), θεώρηση $q_{ih}(t)=A_{ii}\cos(\omega_i t)+B_{ii}\sin(\omega_i t), i=1,2$.
  - Αντικατάσταση (γνωστής πλέον) μερικής λύσεως και (ακόμα άγνωστης) ομογενούς λύσεως στην (Ε3): $q_i(t)=Q_{i,ST}+A_{ii}\cos(\omega_i t)+B_{ii}\sin(\omega_i t), i=1,2, Q_{i,ST}=P_i$ (Ε4).
  - Με βάση τις αρχικές συνθήκες μετατόπισης, υπολογισμός των σταθερών συντελεστών $A_{ii}, i=1,2$ από την (Ε4).
  - Υπολογισμός της πρώτης χρονικής παραγώγου της (Ε3) $\dot{q}_i(t)=-\omega_i A_{ii}\sin(\omega_i t)+\omega_i B_{ii}\cos(\omega_i t), i=1,2$ (έσω Ε5).
  - Με βάση τις αρχικές συνθήκες ταχύτητας, υπολογισμός των σταθερών συντελεστών $B_{ii}, i=1,2$ από την (Ε5).
- Αντικατάσταστη των υπολογισθέντων $\underset{\sim}{\Phi}_i, i=1,2$ και $q_i(t), i=1,2$ στην (Ε1).

Εφαρμογή 2η (Θέμα εξετάσεων Σεπ1998, Βαθμολογική βαρύτητα: 25 μονάδες)

Έστω το διβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-k$ (άρα δυναμικό σύστημα χωρίς στοιχεία απόσβεσης) του Σχήματος 5, για το οποίο δίδεται ότι οι δύο μάζες είναι ίσες με $M_1 = 10kg$ και $M_2 = 10kg$, αντίστοιχα, η σταθερά του ελατηρίου ισούται με $k = 40\,N/m$. Στο σύστημα επιβάλλονται αρχικές ταχύτητες $\dot{x}_1(0) = 1m/\sec$ και $\dot{x}_2(0) = 3m/\sec$, αντίστοιχα.



Σχήμα 5: Το εξεταζόμενο διβάθμιο σύστημα $m-k$

Ζητούνται:

α) η απόκριση του συστήματος και

β) εκείνες οι αρχικές ταχύτητες, για τις οποίες το σύστημα θα κινηθεί χωρίς ταλαντώσεις και μετά από χρόνο $t = 2\sec$ οι μάζες θα έχουν μετατοπισθεί κατά $x_1 = x_2 = 4m$.

Λύση

Για το ερώτημα (α):

Ήδη από τις προηγούμενες Ενότητες (π.χ. Εκπαιδευτική Ενότητα 07, Εκπαιδευτική Ενότητα 08), είναι γνωστό ότι οι εξισώσεις ισορροπίας ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-k$ είναι δυνατόν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}} + \underline{K}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \tag{44}$$

όπου $\underline{M}$ και $\underline{K}$ είναι, αντίστοιχα, το μητρώο μάζας και το μητρώο δυσκαμψίας του δυναμικού συστήματος, $\underset{\sim}{F}$ είναι το διάνυσμα της εξωτερικής διέγερσης, ενώ $\underset{\sim}{x}$ είναι η απόκριση του συστήματος. Ο υπολογισμός των μητρώων $\underline{M}$ και $\underline{K}$ επιτυγχάνεται εύκολα χρησιμοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange. Ειδικότερα, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01 και Εκπαιδευτική Ενότητα 07):

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στις μάζες m_1 και m_2, ισούται με:

$$T = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 \tag{45}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στο ελατήριο σταθεράς k, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 \tag{46}$$

- Στο σύστημα δεν διαχέεται ενέργεια P_C, διότι το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία απόσβεσης, άρα ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{47}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος είναι μηδενική, διότι στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, άρα δεν προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα από εξωτερική πηγή. Συνεπώς, ισχύει:

$$P_t = 0 \tag{48}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \tag{49}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(45,46,49), προκύπτει:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2 \right)^2 \tag{50}$$

Η εφαρμογή των Εξ.(47,48,50) για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_1$, δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2 \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(m_1 \dot{x}_1 \right) = m_1 \ddot{x}_1 \tag{52}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2 \right)^2 \right) \right) = k \left(x_1 - x_2 \right) = k x_1 - k x_2 \tag{53}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{55}$$

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα01, Εκπαιδευτική Ενότητα07):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \tag{56}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(52,53,54,55) στην Εξ.(56), προκύπτει:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 - k x_2 = 0 \tag{57}$$

Επαναλαμβάνοντας την ανωτέρω διαδικασία για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_2$, προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2\right) = m_2\,\dot{x}_2 \tag{58}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right) = m_2\,\ddot{x}_2 \tag{59}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2\right)\right) = k\left(x_1 - x_2\right)\left(-1\right) = -kx_1 + kx_2 \tag{60}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{62}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(59,60,61,62) στην Εξ.(56), προκύπτει:

$$m_2\,\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \tag{63}$$

Χρησιμοποιώντας μητρωϊκή γραφή, οι Εξ.(57,63) γράφονται και ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} m_1\,\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\,\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \\ \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{\underline{K}}\underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{64}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{65}$$

Η ζητούμενη απόκριση του συστήματος είναι η λύση της Εξ.(65), για την επίλυση της οποίας είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ο Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός. Προς τούτο, πρέπει να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του συστήματος. Οι ιδιοτιμές βρίσκονται από την επίλυση της εξίσωσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 07):

$$\det\left(-\omega_i^2\underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \xrightarrow{\omega_i^2 = \lambda_i} \det\left(-\lambda_i\underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{66}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(65,66) δίδει:

$$\det\left(-\lambda\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}40 & -40\\ -40 & 40\end{bmatrix}\right)=0\Rightarrow 100\times\det\left(\begin{bmatrix}-\lambda+4 & -4\\ -4 & -4\lambda+4\end{bmatrix}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-\lambda+4)(-4\lambda+4)-(-4)(-4)=0\Rightarrow 4\lambda^2-16\lambda-4\lambda+16-16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(4\lambda^2-20\lambda\right)=0\Rightarrow 4\lambda(\lambda-5)=0\Rightarrow\begin{Bmatrix}\lambda_1=\omega_1^2=0\\ \lambda_2=\omega_2^2=5\end{Bmatrix}\tag{67}$$

Με βάση τις ιδιοτιμές της Εξ.(67), είναι δυνατός ο υπολογισμός των ιδιοανυσμάτων:

$$\left(-\omega_i^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i=\underset{\sim}{0}\Leftrightarrow\left(-\lambda_i\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i=\underset{\sim}{0}\tag{68}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$, ισχύει:

$$\left(-\lambda_i\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i=\underset{\sim}{0}\xrightarrow{\lambda_1=0}\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_i=\underset{\sim}{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}40 & -40\\ -40 & 40\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow 40\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\Phi_{11}-\Phi_{21}=0\\ -\Phi_{11}+\Phi_{21}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\Phi_{11}-\Phi_{21}=0\Rightarrow\Phi_{11}=\Phi_{21}\tag{69}$$

Με βάση την Εξ.(69), το ιδιοάνυσμα $\underset{\sim}{\Phi}_1$ (ιδιοάνυσμα για την πρώτη ιδιοσυχνότητα) είναι:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1=\begin{Bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{Bmatrix}=\Phi_{11}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}=\Phi_{21}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\xrightarrow{\Phi_{11}=0\text{ ή }\Phi_{21}=0}\underset{\sim}{\Phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\underset{\sim}{\Phi}_1^T=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\tag{70}$$

Η Εξ.(70) πληροφορεί ότι, για την κίνηση με ιδιοσυχνότητα ω_1, η αναλογία των μετατοπίσεων των μαζών του συστήματος είναι 1:1. Με άλλα λόγια:

*Η **μηδενική ιδιοτιμή** ενός δυναμικού συστήματος αντιστοιχεί στην **κίνηση** του συστήματος ως εάν αυτό ήταν **απολύτως στερεό σώμα**.*

Ισοδύναμα, στην προκειμένη περίπτωση, η μηδενική ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε κίνηση των μαζών M_1 και M_2 ως εάν το μεταξύ τους ελατήριο (βλ. Σχήμα 5) ήταν άκαμπτο (σταθερά ελατηρίου $\omega_1^2=0$) και οι ελαστικές δυνάμεις του συστήματος ήταν μηδενικές.

Από την Εξ.(68) και για την ιδιοτιμή $\lambda_2=5$, ισχύει:

$$\left(-\lambda_i\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i=\underset{\sim}{0}\xrightarrow[\lambda_2=5]{i=2}\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_2=\underset{\sim}{0}\Rightarrow\left(-5\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}40 & -40\\ -40 & 40\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-5\times10+40 & -40\\ -40 & -5\times40+40\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-10 & -40\\ -40 & -160\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\Phi_{21}+4\Phi_{22}=0\\ 4\Phi_{21}+16\Phi_{22}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}0.25\Phi_{21}+\Phi_{22}=0\\ 0.25\Phi_{21}+\Phi_{22}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}0.25\Phi_{21}=-\Phi_{22}\\ 0.25\Phi_{21}=-\Phi_{22}\end{Bmatrix}\Rightarrow -0.25\Phi_{21}=\Phi_{22} \tag{71}$$

Με βάση την Εξ.(71), το ιδιοάνυσμα $\underset{\sim}{\Phi}_2$ (ιδιοάνυσμα για τη δεύτερη ιδιοσυχνότητα) είναι:

$$\underset{\sim}{\Phi}_2=\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Phi_{21}\\ -0.25\Phi_{21}\end{Bmatrix}=\Phi_{21}\begin{Bmatrix}1\\ -0.25\end{Bmatrix}\xrightarrow{\Phi_{21}=1}\underset{\sim}{\Phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -0.25\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\underset{\sim}{\Phi}_2^T=\begin{bmatrix}1 & -0.25\end{bmatrix} \tag{72}$$

Σύμφωνα με Ιδιοανυσματικό Μετασχηματισμό, η απόκριση του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος ισούται με (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08):

$$\underset{\sim}{x}(t)=\sum_{i=1}^{2}\underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t)=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t) \tag{73}$$

όπου $\underset{\sim}{\Phi}_i, i=1,2$ είναι τα ιδιοανύσματα (υπολογίσθηκαν προηγουμένως) και $q_i(t), i=1,2$ είναι οι γενικευμένοι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Για τον υπολογισμό των γενικευμένων βαθμών ελευθερίας, αποδεικνύεται ότι ισχύει (η απόδειξη της Εξ.(74) παρατίθεται στο Παράρτημα Α):

$$\boxed{q_i(t)=\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i^T\,\underline{M}\,\underset{\sim}{x}_i(t)} \tag{74}$$

$$\boxed{\dot{q}_i(t)=\frac{dq_i(t)}{dt}=\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i^T\,\underline{M}\,\dot{\underset{\sim}{x}}_i(t)} \tag{75}$$

Για την εφαρμογή των Εξ.(74,75), πρέπει πρώτα να υπολογισθεί η γενικευμένη μάζα m_{ii}:

$$m_{ii}=\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_i \tag{76}$$

Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

- Για τη γενικευμένη μάζα m_{11}:

$$m_{11}=\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 40\end{bmatrix}\Rightarrow m_{11}=50 \tag{77}$$

- Για τη γενικευμένη μάζα m_{22}:

$$m_{22}=\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underline{M}\underset{\sim}{\Phi}_2=\begin{bmatrix}1 & -0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ -10\end{bmatrix}\Rightarrow m_{22}=12.5 \tag{78}$$

Για $i=1$, δηλαδή για τον πρώτο τρόπο ταλάντωσης, όπως προέκυψε από την Εξ.(70), οι δύο μάζες του συστήματος κινούνται ως ένα σώμα, η σταθερά του ελατηρίου είναι μηδέν και η γενικευμένη μάζα m_{11} ισούται με το άθροισμα των μαζών του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι:

$$\ddot{q}_1+\omega_1^2\dot{q}_1=0\xrightarrow{\omega_1^2=0}\ddot{q}_1=0\Rightarrow\dot{q}_1(0)=\frac{q_1(t)}{t}\Rightarrow q_1(t)=\dot{q}_1(0)\ t \tag{79}$$

Με άλλα λόγια, το σύστημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Στην Εξ.(79), ως $\dot{q}_1(0)$ συμβολίζεται η ταχύτητα της γενικευμένης μάζας m_{11}, η οποία, ως σταθερή ποσότητα, είναι η ίδια για κάθε χρονική στιγμή, άρα και για $t=0$, και ισούται με (βλ. Εξ.(75)):

$$\dot{q}_i(0)=\frac{dq_i|_{t=0}}{dt}=\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i^T\ \underline{M}\ \underset{\sim}{\dot{x}}_i(0)=\left(\frac{1}{50}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(0)\\ \dot{x}_2(0)\end{bmatrix}\xrightarrow[\dot{x}_2(0)=3m/\sec]{\dot{x}_1(0)=1m/\sec}$$

$$\Rightarrow\dot{q}_i(0)=\left(\frac{1}{50}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{50}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 120\end{bmatrix}=\left(\frac{10+120}{50}\right)\Rightarrow\dot{q}_i(0)=2.6\frac{m}{\sec} \tag{80}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(79,80) δίδει:

$$q_1(t)=2.6t \tag{81}$$

Για $i=2$, δηλαδή για τον δεύτερο γενικευμένο βαθμό ελευθερίας $q_2(t)$, από την Εξ.(17) προκύπτει ότι ισχύει:

$$\ddot{q}_2(t)+\omega_2^2\,q_2(t)=g_2(t) \tag{82}$$

Επειδή δεν επιβάλλεται εξωτερική διέγερση στο σύστημα, έπεται ότι (βλ. Εξ.(16)):

$$g_2(t)=\left(\frac{\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underset{\sim}{F}}{m_{22}}\right)\xrightarrow{\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0}}g_2(t)=0 \tag{83}$$

Από τις Εξ.(82,83), έπεται ότι:

$$\ddot{q}_2(t)+\omega_2^2\,q_2(t)=0 \tag{84}$$

Κατά τα γνωστά (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03), η λύση της ομογενούς Εξ.(84) είναι της μορφής:

$$q_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t)+B_2\sin(\omega_2 t) \tag{85}$$

Οι σταθεροί συντελεστές A_2 και B_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Στην προκειμένη περίπτωση, δίδεται από την εκφώνηση ότι στη μάζα M_2, η κίνηση της οποίας περιγράφεται από το δεύτερο βαθμό ελευθερίας, επιβάλλεται αρχική ταχύτητα. Αφού δίδεται αρχική ταχύτητα, έπεται ότι η αρχική μετατόπιση είναι μηδενική, συνεπώς ισχύει:

$$q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \xrightarrow[q_2(0)=0]{t=0} \Rightarrow A_2 = 0 \tag{86}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\dot{q}_2(t) = -\omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t) + \omega_2 B_2 \cos(\omega_2 t) \xrightarrow{t=0} \dot{q}_2(0) = \omega_2 B_2 \Rightarrow B_2 = \frac{\dot{q}_2(0)}{\omega_2} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_2 = 1.342 \tag{87}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(45,46,47) δίδει:

$$q_2(t) = 1.342 \sin(\omega_2 t) \tag{88}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(73) με τις Εξ.(70,72,81,88), τελικά προκύπτει:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t) + \underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} q_1(0) t + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{bmatrix} \left(\frac{\dot{q}_2(0)}{\omega_2} \right) \sin(\omega_2 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 2.6t + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{bmatrix} 1.342 \sin\left(\sqrt{5}t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2.6 \\ 2.6 \end{bmatrix} t}_{\substack{\text{κοινή \& σταθερή} \\ \text{ταχύτητα}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.342 \\ -0.3355 \end{bmatrix} \sin(2.236t)}_{\substack{\text{σχετική ταλάντωση μεταξύ} \\ \text{των μαζών}}} \tag{89}$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της Εξ.(89) περιγράφει την κοινή, και χρονικά σταθερή, ταχύτητα των μαζών του συστήματος, ενώ ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της Εξ.(89) περιγράφει τη σχετική ταλάντωση μεταξύ των μαζών.

Για το ερώτημα (β):

Στο ερώτημα (α) διαπιστώθηκε ότι η απόκριση του συστήματος περιγράφεται από την Εξ.(89), η οποία, χωρίς τις αριθμητικές αντικαταστάσεις, γράφεται και ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} q_1(0) t}_{\substack{\text{ευθύγραμμη} \\ \text{ομαλή} \\ \text{κίνηση}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{bmatrix} \left(\frac{\dot{q}_2(0)}{\omega_2} \right) \sin(\omega_2 t)}_{\substack{\text{σχετική} \\ \text{ταλάντωση} \\ \text{μαζών}}} \tag{90}$$

Προκειμένου, λοιπόν, το εξεταζόμενο σύστημα να κινείται χωρίς ταλαντώσεις, έπεται ότι οι νέες επιβαλλόμενες αρχικές ταχύτητες, έστω $\underset{\sim}{\dot{x}}_1(0)$ και $\underset{\sim}{\dot{x}}_2(0)$, πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε ο δεύτερος όρος του αθροίσματος να μηδενισθεί, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\dot{q}_2(0) = 0 \tag{91}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(75,91), δίδει:

$$\dot{q}_2(0) = \left(\frac{1}{m_{22}}\right) \underset{\sim}{\Phi}_2^T\, \underline{M}\, \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\Phi}_2^T\, \underline{M} \begin{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) \\ \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) \end{bmatrix} = 0 \tag{92}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(92) το ιδιοάνυσμα $\underset{\sim}{\Phi}_2$ και το μητρώο μάζας $\underline{M}$, προκύπτει:

$$\underset{\sim}{\Phi}_2^T\, \underline{M} \begin{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) \\ \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) \\ \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) \\ \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) \\ \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) - \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) = 0 \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{x}}_1'(0) = \dot{\underset{\sim}{x}}_2'(0) \tag{93}$$

Από την Εξ.(93) προκύπτει ότι πρέπει να επιβληθεί στις δύο μάζες η ίδια ταχύτητα. Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται αντικαθιστώντας στην Εξ.(90) για τις νέες αρχικές ταχύτητες:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1'(0)\, t + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{bmatrix} \left(\frac{\cancel{\dot{q}_2'(0)}}{\omega_2} \right) \sin(\omega_2 t) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1'(0)\, t \xrightarrow{x_1'(0)=x_2'(0)}$$

$$\Rightarrow x_1'(t) = x_2'(t) = \dot{q}_1'(0)\, t \Rightarrow \dot{q}_1'(0) = \frac{x_1'(t)}{t} = \frac{x_2'(t)}{t} \xrightarrow[t=2\sec]{x_1'(t)=x_2'(t)=4m} \dot{q}_1'(0) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{m}{\sec}\right) \Rightarrow$$

$$\dot{q}_1'(0) = 2\left(\frac{m}{\sec}\right) \tag{94}$$

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή εξετάσθηκε η συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος, όταν αυτό εκτελεί μία μετατόπιση απολύτως στερού σώματος, στην οποία υπερτίθεται μία ταλάντωση. Πρόκειται για μία πολύ σημαντική, από τεχνολογικής απόψεως, συμπεριφορά, διότι παρατηρείται σε πλήθος τεχνολογικών παραδειγμάτων, όπως είναι:

- Η κίνηση των πτερύγων ενός αεροσκάφους, οι οποίες φέρουν τους κινητήρες του αεροσκάφους, όταν σε αυτό ασκείται απότομα μία κατακόρυφη δύναμη.
- Η κίνηση των βαγονιών ενός σιδηροδρομικού συρμού, όταν αυτός αρχικά είναι ακίνητος και ξαφνικά τίθεται σε κίνηση.
- Η κίνηση των (εύκαμπτων) πτερυγίων μίας στροβιλομηχανής ή μίας ανεμογεννήτριας, όταν αυτή τίθεται σε περιστροφική κίνηση.
- Η κίνηση όλων των εύκαμπτων κατασκευών.

Σύνοψη Διαδικασίας

Συνοψίζοντας, η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον υπολογισμό της απόκρισης του εξεταζομένου συστήματος, υπό την επιβολή μόνον αρχικής κινηματικής συνθήκης (ταχύτητας), ήταν η εξής:

- Διατύπωση της εξίσωσης της απόκρισης του συστήματος, χρησιμοποιώντας Ιδιοανυσματικό Μετασχηματισμό και για δύο Βαθμούς Ελευθερίας (έστω εξίσωση Ε1):

$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=1}^{N=2} \underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t) = \underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t) + \underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)$$

  Πρέπει να υπολογισθούν τα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i, i = 1,2$ και οι γενικευμένοι βαθμοί ελευθερίας $q_i(t), i = 1,2$.

- Για τον υπολογισμό των ιδιοανυσμάτων $\underset{\sim}{\Phi}_i, i = 1,2$:
  - Υπολογισμός ιδιοτιμών από την επίλυση της εξίσωσης $\det\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0$.
    - Για $i = 1$ προέκυψε ***μηδενική*** ιδιοτιμή και για $i = 2$ προέκυψε μία μη-μηδενική ιδιοτιμή.
  - Υπολογισμός ιδιοανυσμάτων από την επίλυση της εξίσωσης $\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{0}$ για κάθε μία ευρεθείσα ιδιοτιμή.

- Για τον υπολογισμό του γενικευμένου βαθμού ελευθερίας $q_1(t)$, ο οποίος αντιστοιχεί στη ***μηδενική*** ιδιοτιμή:
  - Κατάστρωση της εξίσωσης $\ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = 0$.
  - Επειδή $\omega_1^2 = 0$, προκύπτει: $\ddot{q}_1 = 0$, δηλαδή προκύπτει ευθύγραμμη, ομαλή κίνηση: $q_1(t) = \dot{q}_1(0)\, t$. Πρέπει να βρεθεί το $\dot{q}_1(0)$.
  - Υπολογισμός $\dot{q}_1(0)$ από την εξίσωση: $\dot{q}_i(t) = \dfrac{dq_i(t)}{dt} = \left(\dfrac{1}{m_{ii}}\right) \underset{\sim}{\Phi}_i^T \,\underline{M}\, \underset{\sim}{\dot{x}}_i(t)$
  - Υπολογισμός γενικευμένης μάζας από την εξίσωση $\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_1 = m_{11}$.

- Για τον υπολογισμό του γενικευμένου βαθμού ελευθερίας $q_2(t)$, ο οποίος αντιστοιχεί στη μη-μηδενική ιδιοτιμή, χρήση της εξίσωσης:

$$q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)$$

  - Προσδιορισμός συντελεστών A_2, B_2 από αρχικές συνθήκες

- Αντικατάσταστη των υπολογισθέντων $\underset{\sim}{\Phi}_i, i = 1,2$ και $q_i(t), i = 1,2$ στην (Ε1).

Σημαντική παρατήρηση

Το δεύτερο ερώτημα είναι δυνατόν να αντιμετωπισθεί πολύ απλά, χρησιμοποιώντας βασικές σκέψεις φυσικής:

- αφού οι δύο μάζες δεν ταλαντώνονται μεταξύ τους, η παρουσία του ελατηρίου είναι δυνατόν να αμεληθεί,
- αφού θέλουμε οι μάζες να διαγράφουν ίσες αποστάσεις S σε ίσους χρόνους t, έπεται ότι αυτές εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με την ίδια ταχύτητα $\upsilon = \left(S/t\right)$.

Η ανωτέρω απλή αντιμετώπιση του δευτέρου ερωτήματος υποδηλώνει ότι:

Τα περισσότερα προβλήματα, τα οποία αντιμετωπίζει ο Μηχανικός κατά την επαγγελματική του σταδιοδρομία, είναι εξαιρετικά απλά. Για εκείνα τα προβλήματα που δεν είναι απλά, ο Μηχανικός πρέπει να σκέπτεται έξυπνους τρόπους ώστε να τα απλοποιεί.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Απόδειξη της Εξ.(74)

Με βάση τον Ιδιοανυσματικό Μετασχηματισμό, η απόκριση $\underset{\sim}{x}$ ενός διβάθμιου δυναμικού συστήματος, γράφεται ως εξής (βλ. Εξ.(13)):

$$\underset{\sim}{x}(t)=\sum_{i=1}^{2}\underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t)=\underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t)+\underset{\sim}{\Phi}_2 q_2(t)\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Phi}_1} & \underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_{12}\\ \Phi_{22}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Phi}_2}\end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}}\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{q}} \tag{A.1}$$

όπου $\underline{\Phi}$ είναι ο ***πίνακας*** των ιδιοανυσμάτων. Λύση του γραμμικού συστήματος (Α.1), ως προς τους γενικευμένους βαθμούς ελευθερίας $q_i(t)$, δίδει:

- για τη γενικευμένη μεταβλητή $q_1(t)$:

$$q_1=\frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & \Phi_{12}\\ x_2(t) & \Phi_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{vmatrix}}=\frac{x_1(t)\Phi_{22}-x_2(t)\Phi_{12}}{\Phi_{11}\Phi_{22}-\Phi_{12}\Phi_{21}}\Rightarrow q_1=\frac{\begin{bmatrix}\Phi_{22} & -\Phi_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}{\det(\underline{\Phi})} \tag{A.2}$$

- για τη γενικευμένη μεταβλητή $q_2(t)$:

$$q_2=\frac{\begin{vmatrix}\Phi_{11} & x_1(t)\\ \Phi_{21} & x_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{vmatrix}}=\frac{x_2(t)\Phi_{11}-x_1(t)\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}-\Phi_{12}\Phi_{21}}\Rightarrow q_2=\frac{\begin{bmatrix}-\Phi_{21} & \Phi_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}{\det(\underline{\Phi})} \tag{A.3}$$

Βάσει των Εξ.(Α.2,Α.3), το διάνυσμα των γενικευμένων βαθμών ελευθερίας $\underset{\sim}{q}(t)$ είναι:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\end{Bmatrix}=\left(\frac{\begin{bmatrix}\Phi_{22} & -\Phi_{12}\\ -\Phi_{21} & \Phi_{11}\end{bmatrix}}{\det(\underline{\Phi})}\right)\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Ως γνωστόν από τη Γραμμική Άλγεβρα, ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα $\underline{A}$ είναι:

$$\left(\underline{A}_{n\times n}\right)^{-1}=\frac{adj\left(\underline{A}_{n\times n}\right)}{\det\left(\underline{A}_{n\times n}\right)} \tag{A.5}$$

όπου ως $adj\left(\underline{A}_{n\times n}\right)$ συμβολίζεται το αλγεβρικό συμπλήρωμα (adjoint) του πίνακα $\underline{A}$, ενώ ως $\det\left(\underline{A}_{n\times n}\right)$ συμβολίζεται η ορίζουσα το πίνακα $\underline{A}$. Στην περίπτωση όπου $n=2$, ισχύει:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\to adj\left(\underline{A}\right)=\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Με βάση τις Εξ.(Α.5,Α.6), η Εξ.(Α.4) δίδει:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{22} & -\Phi_{12} \\ -\Phi_{21} & \Phi_{11} \end{bmatrix}}_{adj(\underline{\Phi})}}{\det(\underline{\Phi})} \right)}_{\underline{\Phi}^{-1}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{q}(t) = \underline{\Phi}^{-1}\underset{\sim}{x} \quad \text{(A.7)}$$

Από τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των ιδιοανυσμάτων ως προς το μητρώο μάζας $\underline{M}$ του συστήματος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 07), για κάθε βαθμό ελευθερίας i, ισχύει:

$$m_{ii} = \underset{\sim}{\Phi}_i^T \; \underline{M} \; \underset{\sim}{\Phi}_i^T \quad \text{(A.8)}$$

Για ένα διβάθμιο δυναμικό σύστημα, ισχύει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_{gen}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T & \underset{\sim}{\Phi}_2^T \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}^T} \underline{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1 & \underset{\sim}{\Phi}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}} \Rightarrow \underline{M}_{gen} = \underline{\Phi}^T \underline{M} \; \underline{\Phi} \quad \text{(A.9)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την Εξ.(Α.9) από δεξιά με τον πίνακα $\underline{\Phi}^{-1}$ (αντίστροφος του πίνακα των ιδιοανυσμάτων), προκύπτει:

$$\underline{M}_{gen}\underline{\Phi}^{-1} = \underline{\Phi}^T \underline{M} \; \underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1} \quad \text{(A.10)}$$

Ωστόσο, ισχύει:

$$\underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1} = I_2 \quad \text{(A.11)}$$

όπου I_2 είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 2, διότι:

$$\underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}^{-1} \xrightarrow{(A.5)} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \left(\frac{adj(\underline{\Phi})}{\det(\underline{\Phi})} \right) \xrightarrow{(A.6)}$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\Phi})} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{22} & -\Phi_{12} \\ -\Phi_{21} & \Phi_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{\Phi})} \begin{bmatrix} \Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}\Phi_{21} & -\Phi_{11}\Phi_{12} + \Phi_{12}\Phi_{11} \\ \Phi_{21}\Phi_{22} - \Phi_{22}\Phi_{21} & -\Phi_{21}\Phi_{12} + \Phi_{22}\Phi_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\Phi})} \begin{bmatrix} \det(\underline{\Phi}) & 0 \\ 0 & \det(\underline{\Phi}) \end{bmatrix} = \left(\frac{\det(\underline{\Phi})}{\det(\underline{\Phi})} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_2} \Rightarrow \underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1} = I_2 \quad \text{(A.12)}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Α.10, Α.11), δίδει:

$$\underline{M}_{gen}\underline{\Phi}^{-1} = \underline{\Phi}^T \underline{M} \; \underbrace{\underline{\Phi}\underline{\Phi}^{-1}}_{I_2} \Rightarrow \underline{M}_{gen}\underline{\Phi}^{-1} = \underline{\Phi}^T \underline{M} \quad \text{(A.13)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την Εξ.(Α.13) από δεξιά με το διάνυσμα απόκρισης $\underset{\sim}{x}(t)$, προκύπτει:

$$\underline{M}_{gen}\underline{\Phi}^{-1}\underset{\sim}{x}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{M} \; \underset{\sim}{x}(t) \quad \text{(A.14)}$$

Εισάγοντας την Εξ.(Α.7) στην Εξ.(Α.14), προκύπτει:

$$\underline{M}_{gen}\underbrace{\underline{\Phi}^{-1}\underset{\sim}{x}(t)}_{\underset{\sim}{q}}=\underline{\Phi}^{T}\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\Rightarrow \underline{M}_{gen}\underset{\sim}{q}(t)=\underline{\Phi}^{T}\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t) \qquad \text{(A.15)}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(Α.15), προκύπτει:

$$\underline{M}_{gen}\underset{\sim}{q}(t)=\underline{\Phi}^{T}\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\Rightarrow\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{21}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Phi}_1} & \underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_{12}\\ \Phi_{22}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Phi}_2}\end{bmatrix}^{T}\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{21}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Phi}_1^T} \\ \underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_{12} & \Phi_{22}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Phi}_2^T}\end{bmatrix}\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\Rightarrow\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1^T \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T\end{bmatrix}\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} m_{11}q_1(t) \\ m_{22}q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t) \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} m_{11}q_1(t)=\underset{\sim}{\Phi}_1^T\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t) \\ m_{22}q_2(t)=\underset{\sim}{\Phi}_2^T\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\end{bmatrix}\Rightarrow m_{ii}q_i(t)=\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{M}\;\underset{\sim}{x}(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_i(t)=\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i^T\;\underline{M}\;\;\underset{\sim}{x}(t),\quad i=1,2 \qquad \text{(A.16)}$$

Με αντίστοιχη συλλογιστική, η Εξ.(Α.16) ισχύει για ένα οποιοδήποτε $N-$βάθμιο δυναμικό σύστημα.