ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 10η
Απόκριση πολυβάθμιου συστήματος $m-c-k$ *μέσω Συνάρτησης Μεταφοράς*

Γενικά

Μέχρι στιγμής, γνωρίσαμε τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τον Ιδιοανυσματικό Μετασχηματισμό προκειμένου να υπολογίσουμε την απόκριση ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-k$, δηλαδή ενός δυναμικού συστήματος χωρίς απόσβεση. Μέχρι στιγμής, έχουμε αμελήσει την απόσβεση διότι:

- Η μελέτη του δυναμικού συστήματος $m-k$ είναι συντηρητικότερη της μελέτης του δυναμικού συστήματος $m-c-k$. Αυτό σημαίνει ότι εάν πρέπει να σχεδιάσουμε ένα δυναμικό σύστημα $m-c-k$ και επιλέξουμε να αγνοήσουμε την απόσβεση, τότε το αποτέλεσμα που θα λάβουμε από την σχετική ανάλυση (υπολογισμός απόκρισης του συστήματος) θα είναι δυσμενέστερο από την πραγματικότητα, άρα θα είμαστε από την ασφαλή πλευρά της σχεδίασης (η απόσβεση δρα θετικά στη μείωση των ταλαντώσεων των συστημάτων).
- Ενώ το μητρώο μάζας $\underline{M}$ και το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ ενός δυναμικού συστήματος υπολογίζονται με σχετική ευκολία, δεν ισχύει το ίδιο για το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$ του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, το μητρώο μάζας $\underline{M}$ ενός συστήματος (δηλαδή μίας κατασκευής) συνδέεται με την εκτίμηση της κατανομής της μάζας μέσα στο σύστημα (ενίοτε και της κατανομής της ροπής αδράνειας) του συστήματος, δηλαδή συνδέεται με ένα φυσικό μέγεθος, το οποίο καλείται ‘πυκνότητα της ύλης’. Τεχνικά, λοιπόν, το μητρώο μάζας είναι εύκολο να υπολογισθεί. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$, το οποίο συνδέεται με την ελαστικότητα του. Αντιθέτως, ο μηχανισμός καταστροφής ενέργειας σε μία κατασκευή, ο οποίος αντιπροσωπεύεται από το μητρώο $\underline{C}$, είναι αρκετά σύνθετος. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η καταστροφή ενέργειας λόγω εσωτερικής τριβής εντός της δομής του υλικού, η καταστροφή ενέργειας λόγω εξωτερικής τριβής με την ατμόσφαιρα (αεροδυναμική απόσβεση), η καταστροφή ενέργειας λόγω τριβής μεταξύ συνεργαζομένων επιφανειών, κτλ.

Εάν, λοιπόν, είναι επιθυμητός, ή επιβεβλημένος, ο συνυπολογισμός της απόσβεσης του συστήματος, τότε θα πρέπει με κάποιον τρόπο να υπολογισθεί το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$.

Μητρώο απόσβεσης κατά Rayleigh

Ένας τρόπος υπολογισμού του μητρώου απόσβεσης $\underline{C}$, όχι ο μοναδικός, είναι η προσέγγιση κατά Rayleigh, σύμφωνα με την οποία ισχύει:

$$\underline{C} = \beta_1 \underline{M} + \beta_2 \underline{K} \qquad (1)$$

όπου β_1 και β_2 είναι αριθμητικοί συντελεστές (συντελεστές αναλογίας), οι τιμές των οποίων λαμβάνονται από πειραματικά δεδομένα (δηλαδή από μέτρηση της απόκρισης πραγματικών κατασκευών). Με άλλα λόγια, το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$ προσεγγίζεται ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας $\underline{M}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$. Ισοδύναμα, το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$ θεωρείται ως μία αναλογία μεταξύ των μητρώων μάζας $\underline{M}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$. Η προσέγγιση κατά Rayleigh χαρακτηρίζεται από ένα σημαντικό πλεονέκτημα. Ειδικότερα, όπως έχουμε ήδη δει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 07), εάν έχουν υπολογισθεί τα ιδιοανύσματα $\underset{\sim}{\Phi}_i, i = 1, 2, ..., N$ ενός δυναμικού συστήματος, τότε τα μητρώα μαζας $\underline{M}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$ διαγωνοποιούνται. Τότε, όμως, θα διαγωνοποιείται και το, κατά Rayleigh, μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$, αφού αυτό γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\underline{M}$ και $\underline{K}$ (βλ. Εξ.(1)). Σύμφωνα με την Εκπαιδευτική Ενότητα 08, η απόκριση του δυναμικού συστήματος είναι δυνατόν να γραφεί με τον ακόλουθο συνοπτικό τρόπο:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underline{\Phi}\ \underset{\sim}{q}(t) \tag{2}$$

όπου $\underline{\Phi}$ είναι ο ***πίνακας των ιδιοανυσμάτων***, δηλαδή $\underline{\Phi} = \left[\underset{\sim}{\Phi}_1 \quad \underset{\sim}{\Phi}_2 \quad ... \quad \underset{\sim}{\Phi}_N\right]$, και $\underset{\sim}{q}(t)^T = \left[q_1(t) \quad q_2(t) \quad ... \quad q_N(t)\right]$ είναι οι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας. Συνεπώς, στην περίπτωση του εξεταζόμενου $m - c - k$ δυναμικού συστήματος, η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$\underline{M}\ \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underline{C}\ \dot{\underset{\sim}{x}} + \underline{K}\ \underset{\sim}{x} + = \underset{\sim}{F} \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την Εξ.(3) με τον πίνακα $\underline{\Phi}^T$ των ιδιοανυσμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08) αντικαθιστώντας με την Εξ.(2), και μετά την εκτέλεση πράξεων, προκύπτει (για αναλυτικό τρόπο υπολογισμού, βλ. Παράρτημα Α):

$$\ddot{q}_i + \left(\beta_1 + \beta_2\omega_i^2\right)\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}(t), i = 1, 2, ..., N \tag{4}$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών β_1 και β_2, όπως θα δούμε σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, αξιοποιείται η έννοια της 'Συνάρτησης Μεταφοράς', την οποία θα γνωρίσουμε σε επόμενη παράγραφο. Εάν, δε, η προσέγγιση κατά Rayleigh δεν αποτελεί αποδεκτό τρόπο μοντελοποίησης του μητρώου απόσβεσης $\underline{C}$, τότε είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ειδική θεωρία της δυναμικής, βάσει της οποίας οι ιδιοσυχνότητες και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα ορίζονται στον μιγαδικό χώρο (θεωρία των μιγαδικών ιδιοανυσμάτων).

Έννοια της Συνάρτησης Μεταφοράς

Σε προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες, γνωρίσαμε και εφαρμόσαμε δύο τρόπους επίλυσης της Εξ.(4): τη Μέθοδο των Προσδιοριστέων Συντελεστών και τη μέθοδο του Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού. Μία ακόμα εξαιρετικά χρήσιμη μέθοδος είναι αυτή, η οποία στηρίζεται στη χρήση της Συνάρτησης Μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα, έστω η διεγείρουσα δύναμη είναι της μορφής:

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_C \cos(\Omega t) \tag{5}$$

όπου $\underset{\sim}{F}_C$ είναι το πλάτος της δύναμης και Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη. Εάν η διέγερση της Εξ.(5) (αρμονική διέγερση) αφορά σε ***μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα***, τότε αναμένεται η εμφάνιση μίας ***μεταβατικής απόκρισης*** (ομογενής λύση της Εξ.(3)) με ***συχνότητα*** την ***ιδιοσυχνότητα του συστήματος*** και μίας ***μόνιμης απόκρισης*** (μερική λύση της Εξ.(3)) με ***συχνότητα*** τη ***συχνότητα του διεγέρτη***. Εάν η διέγερση της Εξ.(5) αφορά σε ***πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα***, τότε, κατ' αντιστοιχία, αναμένεται η εμφάνιση μίας ***μεταβατικής απόκρισης*** (ομογενής λύση της Εξ.(3)) με ***συχνότητες*** τις ***ιδιοσυχνότητες του συστήματος*** και μίας ***μόνιμης απόκρισης*** (μερική λύση της Εξ.(3)) με ***συχνότητα*** τη ***συχνότητα του διεγέρτη***. Η μεταβατική απόκριση, λόγω απόσβεσης, θα 'εξαφανισθεί' μετά από την παρέλευση ικανοποιητικού χρονικού διαστήματος. Τελικά, θα παραμείνει η μόνιμη απόκριση, για την οποία θεωρούμε μία έκφραση της μορφής:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}_P(t) = \underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) + \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t) \tag{6}$$

όπου $\underset{\sim}{X}_C$ είναι τα πλάτη των συνημιτονικών όρων, $\underset{\sim}{X}_S$ είναι τα πλάτη των ημιτονικών όρων και Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη. Η πρώτη χρονική παράγωγος της Εξ.(6) ισούται με:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \dot{\underset{\sim}{x}}_P(t) = -\Omega \underset{\sim}{X}_C \sin(\Omega t) + \Omega \underset{\sim}{X}_S \cos(\Omega t) \tag{7}$$

Η δεύτερη χρονική παράγωγος της Εξ.(7) ισούται με:

$$\ddot{\underset{\sim}{x}}(t) = \ddot{\underset{\sim}{x}}_P(t) = -\Omega^2 \underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) - \Omega^2 \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t) \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ.(6,7,8) στην Εξ.(3), προκύπτει:

$$\begin{aligned} &\underline{M}\left(-\Omega^2 \underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) - \Omega^2 \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t)\right) + \underline{C}\left(-\Omega \underset{\sim}{X}_C \sin(\Omega t) + \Omega \underset{\sim}{X}_S \cos(\Omega t)\right) \\ &+\underline{K}\left(\underset{\sim}{X}_C \cos(\Omega t) + \underset{\sim}{X}_S \sin(\Omega t)\right) = \underset{\sim}{F} \cos(\Omega t) \end{aligned} \tag{9}$$

Ομαδοποιώντας τους ημιτονικούς και τους συνημιτονικούς όρους στην Εξ.(9), προκύπτει:

$$\left(-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_C + \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_S + \underline{K}\underset{\sim}{X}_C - \underset{\sim}{F}_C\right)\cos(\Omega t) + \left(-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_S - \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \underline{K}\underset{\sim}{X}_S\right)\sin(\Omega t) = 0 \tag{10}$$

Η Εξ.(10) πρέπει να ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή t Αυτό σημαίνει ότι οι σταθεροί συντελεστές των χρονικά μεταβαλλομένων ποσοτήτων της Εξ.(10) πρέπει να είναι μηδενικοί:

$$\begin{Bmatrix} \left(-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_C + \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_S + \underline{K}\underset{\sim}{X}_C - \underset{\sim}{F}_C\right) = \underset{\sim}{0} \\ \left(-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_S - \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \underline{K}\underset{\sim}{X}_S\right) = \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_C + \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_S + \underline{K}\underset{\sim}{X}_C = \underset{\sim}{F}_C \\ -\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_S - \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \underline{K}\underset{\sim}{X}_S = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_C + \Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_S = \underset{\sim}{F}_C \\ -\Omega \underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_S = \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) & \Omega \underline{C} \\ -\Omega \underline{C} & \left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_C \\ \underset{\sim}{X}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_C \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Σύμφωνα με την Εξ.(11), εάν είναι γνωστά τα μητρώα μάζας $\underline{M}$, απόσβεσης $\underline{C}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$, καθώς και η εξωτερική διέγερση $\underset{\sim}{F}_C$ και η συχνότητά της Ω, τότε είναι δυνατόν να υπολογισθούν τα πλάτη $\underset{\sim}{X}_C$ και $\underset{\sim}{X}_S$. Η απόκριση ενός Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος, έστω του Βαθμού Ελευθερίας i, βάσει της Εξ.(6), ισούται με:

$$x_i\left(t\right) = X_{C,i}\cos\left(\Omega t\right) + X_{S,i}\sin\left(\Omega t\right) \Leftrightarrow x_i\left(t\right) = X_i\cos\left(\Omega t + \varphi_i\right) \tag{12}$$

Τα πλάτη $X_{C,i}$ και $X_{S,i}$ υπολογίζονται από την Εξ.(11). Επειδή η Εξ.(12) περιγράφει την απόκριση οποιουδήποτε Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος, έπεται ότι όλοι οι Βαθμοί Ελευθερίας έχουν κοινή συχνότητα απόκρισης Ω. Ωστόσο, κάθε Βαθμός Ελευθερίας διαθέτει το δικό του πλάτος απόκρισης X_i και τη δική του διαφορά φάσης φ_i. Εν γένει, τα πλάτη X_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους και οι διαφορές φάσης φ_i είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Η, δε, διεγείρουσα δύναμη που ασκείται στο Βαθμό Ελευθερίας j του συστήματος, βάσει της Εξ.(5), ισούται με:

$$F_j\left(t\right) = F_{C,j}\cos\left(\Omega t\right) \tag{13}$$

Διαιρώντας το πλάτος της απόκρισης X_i προς το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης $F_{C,j}$ προκύπτει:

$$H_{ij}\left(\Omega\right) = \left(\frac{X_i}{F_{C,j}}\right) \left[\frac{m}{N}\right] \tag{14}$$

Η ποσότητα $H_{ij}\left(\Omega\right)$ καλείται πλάτος της Συνάρτησης Μεταφοράς $H\left(\Omega\right)$, έχει μονάδες $\left[m/N\right]$ και αποτελεί μία πιο γενικευμένη έννοια του Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03). Πιο συγκεκριμένα, στην Εκπαιδευτική Ενότητα 03 ορίσθηκε ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης ενός ***μονοβάθμιου*** δυναμικού συστήματος ως ο λόγος της απόκρισης προς το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος. Σε εκείνη την περίπτωση, το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα διέθετε μόνο ένα ελατήριο (άρα, μόνο μία σταθερά ελατηρίου). Ωστόσο, σε ένα ***πολυβάθμιο*** σύστημα, όπως είναι το εξεταζόμενο, δεν εμπλέκεται μόνον μία σταθερά ελατηρίου αλλά ένα ολόκληρο μητρώο $\underline{K}$ με σταθερές ελατηρίου, οπότε δεν είναι δυνατόν να ορισθεί ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης όπως στην περίπτωση του μονοβάθμιου συστήματος. Αντιθέτως, χρησιμοποιείται ο ορισμός της Εξ.(14), στον οποίο ο παρονομαστής δεν περιέχει το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος αλλά τη δύναμη απόκρισης.

Η σημασία της ποσότητας $H_{ij}\left(\Omega\right)$ είναι άμεση: πληροφορεί για την απόκριση του i-Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος, όταν διεγείρεται ο j-Βαθμός Ελευθερίας του συστήματος. Μαθηματικά αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$H_{ij}\left(\Omega\right) = H_{ji}\left(\Omega\right) \tag{15}$$

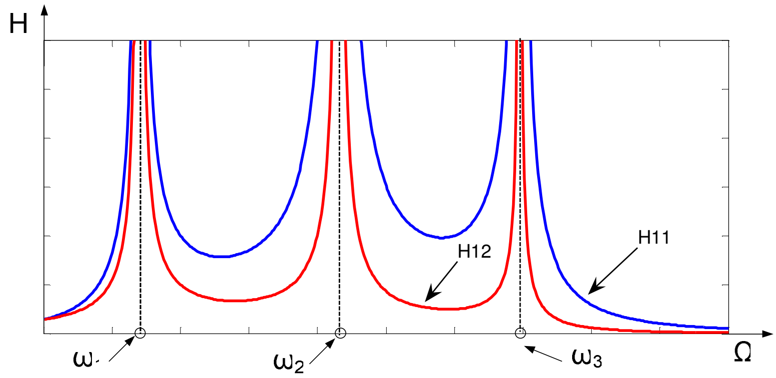
Σύμφωνα με την Εξ.(15), το μητρώο $\underline{H}\left(\Omega\right)$, στοιχεία του οποίου αποτελούν τα πλάτη $H_{ij}\left(\Omega\right)$, είναι συμμετρικό, δηλαδή ο λόγος της απόκρισης του i-Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος προς το μέτρο της δύναμης που διεγείρει τον j-Βαθμό Ελευθερίας του συστήματος, ισούται με το λόγο της απόκρισης του j-Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος προς το μέτρο της δύναμης που διεγείρει τον i-Βαθμό Ελευθερίας του συστήματος.

$$H_{ij}(\Omega)$$

Ο δείκτης i αντιστοιχεί στον Βαθμό Ελευθερίας που ασκείται η διέγερση και ο δείκτης j αντιστοιχεί στο Βαθμό Ελευθερίας που μετριέται η απόκριση.

«διεγείρω τον j-Βαθμό Ελευθερίας και μετρώ στον i-Βαθμό Ελευθερίας»

Από τον ορισμό της Εξ.(14) έπεται ότι το πλάτος της Συνάρτησης Μεταφοράς εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη. Σε ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα, το φαινόμενο του συντονισμού εμφανίζεται όταν η συχνότητα διέγερσης εξισωθεί με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03). Ωστόσο, σε ένα πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα, εμφανίζονται πολλές ιδιοσυχνότητες, συνεπώς το φαινόμενο του συντονισμού θα εμφανίζεται για περισσότερες από μία τιμές της συχνότητας του διεγέρτη. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση $H_{ij}(\Omega) = f(\Omega)$, εν γένει, θα εμφανίζει περισσότερα του ενός τοπικά μέγιστα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $H_{ij}(\Omega) = f(\Omega)$

Σε ένα σύστημα N Βαθμών Ελευθερίας, έπεται ότι $i = 1, 2, ..., N$ και ότι $j = 1, 2, ..., N$. Συνεπώς, συνολικά υπάρχουν $N \times N = N^2$ διατεταγμένα ζεύγη (i, j), άρα συνολικά υπάρχουν N^2 πλάτη συναρτήσεων μεταφοράς $H_{ij}(\Omega)$ Ωστόσο, όπως προκύπτει από την Εξ.(15), το συνολικό πλήθος των διαφορετικών μεταξύ τους πλατών $H_{ij}(\Omega)$ είναι μικρότερο από N^2 (ακριβέστερα, είναι $0.5 \times N \times (N+1)$).

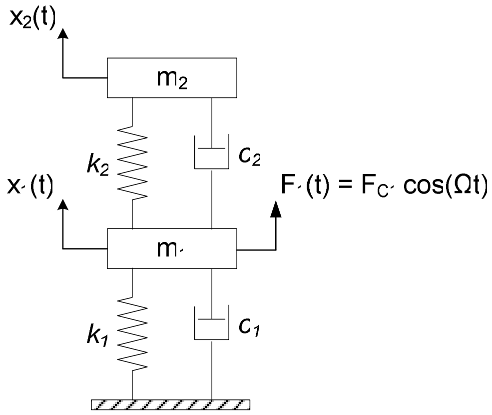
Παρατηρήσεις

- Είναι δυνατόν, σε συγκεκριμένα συστήματα, να μην φαίνονται όλες οι ιδιοσυχνότητες της κατασκευής.

- Τα πλάτη $H_{ij}(\Omega)$ διαφέρουν μεταξύ τους ανάλογα με το σημείο διέγερσης και το σημείο στο οποίο υπολογίζεται η απόκριση. Με άλλα λόγια, έχει πολύ μεγάλη σημασία να γνωρίζουμε την κατανομή του πλάτους της δύναμης της διέγερσης στην κατασκευή καθώς και σε ποια σημεία υπολογίζουμε την κατανομή του πλάτους απόκρισης.
- Έστω ότι σε ένα N-βάθμιο δυναμικό σύστημα και για συχνότητα διέγερσης $\Omega = \omega_k, k = 1, 2, ..., N$, όπου ω_k είναι η $k-$ιδιοσυχνότητα του συστήματος, υπολογίζονται οι τιμές $H_{ij}(\Omega)$ και $H_{i'j'}(\Omega)$ (δηλαδή υπολογίζεται η τιμή δύο διαφορετικών συναρτήσεων μεταφοράς αλλά για την ίδια συχνότητα διέγερσης). Ο λόγος των τιμών αυτών εξαρτάται από το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα $\underset{\sim}{\Phi}_k$.
- Σε πραγματικές κατασκευές, είναι δυνατός ο υπολογισμός των συναρτήσεων μεταφοράς $H_{ij}(\Omega)$ μέσω πειραματικών μετρήσεων. Έχοντας διαθέσιμη αυτήν την πληροφορία, είναι δυνατόν να εκτιμηθούν οι αριθμητικοί συντελεστές β_1 και β_2 της προσέγγισης Rayleigh του μητρώου απόσβεσης $\underline{C}$ (βλ. Εξ.1).

Εφαρμογή

Έστω το διβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-k$ του Σχήματος 2, στο οποίο αμελείται η απόσβεση ($\underline{C} = \underline{0}$). Για το συγκεκριμένο σύστημα, δίδεται ότι οι μάζες είναι ίσες προς $m_1 = 4m$ και $m_2 = m$, αντίστοιχα, ενώ οι σταθερές των ελατηρίων ισούνται με $k_1 = k_2 = k$. Η διεγείρουσα δύναμη είναι αρμονικής μορφής και ισούται με $F_1(t) = F_{C1}\cos(\Omega t)$. Ζητείται η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.



Σχήμα 2: Απόκριση διβάθμιου δυναμικού συστήματος υπό διέγερση Heaviside

Λύση

Το μητρώο μάζας $\underline{M}$, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ και το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$ του συστήματος, με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης και εφαρμόζοντας, κατά τα γνωστά, την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, είναι ίσα προς (για αναλυτικό υπολογισμό, βλ. Παράρτημα Β):

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Από την Εξ.(11), ισχύει:

$$\begin{aligned}\left(-\Omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_C+\Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_S&=\underset{\sim}{F}_C\\ -\Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_C+\left(-\Omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_S&=\underset{\sim}{0}\end{aligned}\qquad(17)$$

Επειδή αμελείται η απόσβεση, ισχύει:

$$\left\{\begin{aligned}\left(-\Omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_C+\Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_S=\underset{\sim}{F}_C\\ -\Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_C+\left(-\Omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_S=\underset{\sim}{0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\left(-\Omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_C=\underset{\sim}{F}_C\\ \left(-\Omega^2\underline{M}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_S=\underset{\sim}{0}\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Από την Εξ.(18) και για τα πλάτη $\underset{\sim}{X}_S$ των ημιτονικών όρων, προκύπτει:

$$\left(-\Omega^2\begin{bmatrix}4m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\right)\underset{\sim}{X}_S=\underset{\sim}{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-4\Omega^2m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2m+k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{S1}\\ X_{S2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\qquad(19)$$

Η Εξ.(19) εκφράζει ένα ομογενές σύστημα, η ορίζουσα του οποίου ισούται με:

$$\begin{aligned}D=\det\begin{bmatrix}-4\Omega^2m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2m+k\end{bmatrix}&=\left(-4\Omega^2m+2k\right)\left(-\Omega^2m+k\right)-\left(-k\right)\left(-k\right)=\\ &=\left(4\Omega^4m^2-4\Omega^2km-2\Omega^2km+2k^2\right)-k^2=\left(4\Omega^4m^2-6\Omega^2km+2k^2\right)-k^2=\\ &=4\Omega^4m^2-6\Omega^2km+k^2\end{aligned}\qquad(20)$$

Θεωρώντας ότι $\lambda=\Omega^2$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Εξ.(20) ισούται με:

$$4\Omega^4m^2-6\Omega^2km+k^2=0\xrightarrow{\Omega^2=\lambda}\underbrace{\left(4m^2\right)}_{\alpha}\lambda^2+\underbrace{\left(-6km\right)}_{\beta}\lambda+\underbrace{k^2}_{\gamma}=0\qquad(21)$$

Η διακρίνουσα της Εξ.(21) ισούται με:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-6km\right)^2-4\left(4m^2\right)\left(k^2\right)=36k^2m^2-16k^2m^2=20k^2m^2\qquad(22)$$

Συνεπώς, οι ρίζες της Εξ.(21) προκύπτουν ίσες προς:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{6k\cancel{m}\pm\sqrt{20}k\cancel{m}}{2\left(4m^{\cancel{2}}\right)}=\frac{6k\pm\sqrt{4\times5}k}{8m}=\frac{6k\pm2\sqrt{5}k}{8m}=\frac{3k\pm\sqrt{5}k}{4m}\qquad(23)$$

Με βάση την Εξ.(23), έπεται ότι υπάρχουν τιμές της παραμέτρου λ, άρα και τιμές της συχνότητας διέγερσης Ω, τέτοιες ώστε να μηδενισθεί η ορίζουσα D. Οι εν λόγω τιμές αντιστοιχούν στο τετράγωνο των ιδιοσυχνοτήτων του εξεταζομένου συστήματος. Εκτός, όμως, αυτών των συγκεκριμένων τιμών (ιδιοτιμών), η ορίζουσα D είναι διάφορη του μηδενός, και τότε το ομογενές σύστημα της Εξ.(19) έχει ως λύση μόνο την τετριμμένη λύση[1]:

$$\underset{\sim}{X}_S=\begin{bmatrix}X_{S1}\\ X_{S2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\qquad(24)$$

[1] *Χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικά τον κανόνα του de l'Hôpital, η Εξ.(24) ισχύει και για τις ιδιοτιμές της* D.

Από την Εξ.(18) και για τα πλάτη $\underset{\sim}{X}_C$ των συνημιτονικών όρων, προκύπτει:

$$\left(-\Omega^2\begin{bmatrix}4m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}X_{C1}\\ X_{C2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{C1}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{C1}\\ X_{C2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{C1}\\ 0\end{bmatrix} \tag{25}$$

Η λύση του συστήματος της Εξ.(25) ισούται με:

$$X_{C1}=\frac{\begin{vmatrix}F_{C1} & -k\\ 0 & -\Omega^2 m+k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{vmatrix}}\xrightarrow[D=\det\left(\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}\right)]{\text{Εξ.}(20)}X_{C1}=\left(\frac{\left(-\Omega^2 m+k\right)}{D}\right)F_{C1} \tag{26}$$

και

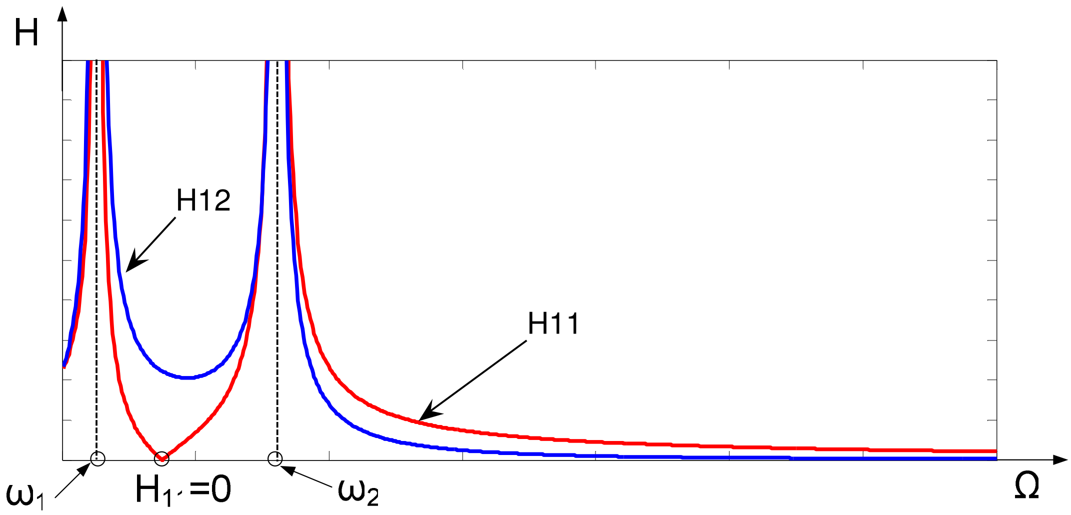
$$X_{C_2}=\frac{\begin{vmatrix}-4\Omega^2 m+2k & F_{C1}\\ -k & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{vmatrix}}\xrightarrow[D=\det\left(\begin{bmatrix}-4\Omega^2 m+2k & -k\\ -k & -\Omega^2 m+k\end{bmatrix}\right)]{\text{Εξ.}(20)}X_{C_2}=\left(\frac{k}{D}\right)F_{C1} \tag{27}$$

Για τον πλήρη προσδιορισμό των πλατών $\underset{\sim}{X}_C$ απαιτείται η γνώση της συχνότητας διέγερσης Ω. Γνωρίζοντας, πλέον, τα πλάτη $\underset{\sim}{X}_C$ της απόκρισης του συστήματος, είναι δυνατόν να ορισθούν οι ακόλουθες Συναρτήσεις Μεταφοράς:

$$H_{11}=\left(\frac{X_{C_1}}{F_{C_1}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{-\Omega^2 m+k}{D}\right)F_{C_1}}{F_{C_1}}\right)\Rightarrow H_{11}=\left(\frac{-\Omega^2 m+k}{D}\right) \tag{28}$$

$$H_{12}=H_{21}=\left(\frac{X_{C_2}}{F_{C_1}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{k}{D}\right)F_{C_1}}{F_{C_1}}\right)\Rightarrow H_{11}=\left(\frac{k}{D}\right) \tag{29}$$

Διευκρινίζεται ότι η Συνάρτηση Μεταφοράς H_{22} δεν ορίζεται διότι η αντίστοιχη συνιστώσα της δύναμης διέγερσης είναι μηδενική $\left(F_{C_2}=0\right)$. Η γραφική παράσταση των Εξ.(28,29) παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση των Συναρτήσεων Μεταφοράς H_{11} και H_{12}

Από το Σχήμα 3 προκύπτουν ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

- Για τις τιμές $\Omega = \omega_1$ και $\Omega = \omega_2$, όπου $\omega_1^2 = \lambda_1$ και $\omega_2^2 = \lambda_2$ (βλ. Εξ.(23)), οι τιμές των Συναρτήσεων Μεταφοράς H_{11} και H_{12} απειρίζονται (μηδενίζεται ο παρονομαστής D).
- Υπάρχει τιμή της συχνότητας διέγερση, έστω Ω_1, για την οποία η Συνάρτηση Μεταφοράς H_{11} μηδενίζεται (βλ. Εξ.(28)):

$$H_{11} = \left(\frac{-\Omega_1^2 m + k}{D} \right) = 0 \Rightarrow -\Omega_1^2 m + k = 0 \Rightarrow \Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (30)$$

  Με άλλα λόγια, υπάρχει περίπτωση να ασκηθεί δύναμη διέγερσης σε ένα σημείο της κατασκευής (***σημειακή διέγερση***) και το σημείο αυτό να παραμένει ακίνητο, ενώ όλη η υπόλοιπη κατασκευή θα ταλαντώνεται. Το φαινόμενο αυτό καλείται αντισυντονισμός. Θεωρητικά, το πλάτος της ταλάντωσης στο εν λόγω σημείο αναμένεται να είναι μηδενικό. Ωστόσο, στην πράξη, αυτό το πλάτος της ταλάντωσης δεν θα είναι μηδενικό (θα λάβει μία πολύ μικρή τιμή), ενώ ο αντισυντονισμός ενδέχεται να εμφανισθεί σε συχνότητα διέγερσης ελαφρώς διαφορετική από την θεωρητικά αναμενόμενη.

Αντισυντονισμός *καλείται το φαινόμενο της ακινησίας ενός σημείου της κατασκευής, ενώ σε αυτό ασκείται εξωτερική δύναμη διέγερσης.*

Σύνοψη αρμονικής διέγερσης δυναμικού συστήματος πολλών Βαθμών Ελευθερίας

- Όπως και στην περίπτωση της αρμονικής διέγερσης μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος, έτσι και στην περίπτωση αρμονικής διέγερσης πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος, στη μόνιμη κατάσταση, λαμβάνουμε αρμονικές αποκρίσεις, οι οποίες χαρακτηρίζονται από την ίδια συχνότητα (ίση με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης) και από, εν γένει, διαφορετικά μεταξύ τους πλάτη.

- Οι λόγοι των πλατών των αποκρίσεων σε κάθε Βαθμό Ελευθερίας προς τα πλάτη των διεγέρσεων σε κάποιους άλλους Βαθμούς Ελευθερίας ονομάζονται Συναρτήσεις Μεταφοράς. Σε ένα δυναμικό σύστημα με N Βαθμούς Ελευθερίας, η Συνάρτηση Μεταφοράς είναι και αυτή ένας πίνακας (διάστασης $N \times N$):

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \tag{31}$$

  Για τον καθορισμό των στοιχείων του πίνακα $\underline{H}$ παίζει ρόλο σε ποιο σημείο ασκείται η διέγερση και σε ποιο σημείο υπολογίζεται η απόκριση.
- Η Συνάρτηση Μεταφοράς H_{ij} ενός δυναμικού συστήματος με N Βαθμούς Ελευθερίας μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα διέγερσης ισούται με κάποια από τις ιδιοσυχνότητες του δυναμικού συστήματος. Ωστόσο, οι μέγιστες τιμές των H_{ij} για μία ιδιοσυχνότητα της κατασκευής δεν είναι ίσες μεταξύ τους (ο λόγος των εν λόγω μεγίστων τιμών των H_{ij} σχετίζεται με το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα αυτή).
- Όταν ασκείται σημειακή διέγερση σε μία κατασκευή, είναι δυνατόν η απόκριση στο σημείο διέγερσης να είναι μηδενική (αντισυντονισμός).

Γενίκευση θεωρώντας μη-μηδενικό μητρώο απόσβεσης

Έστω ότι η ***περιοδική*** διέγερση f_j του $j-$Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος ισούται με:

$$f_j(t) = F_{C_j} \cos(\Omega t) + F_{S_j} \sin(\Omega t) \tag{32}$$

όπου F_{C_j} είναι το πλάτος του συνημιτονικού μέρους της διεγείρουσας δύναμης f_j και F_{S_j} είναι το πλάτος του ημιτονικού μέρους της εν λόγω διέγερσης. Ως Ω συμβολίζεται η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης. Με μητρωϊκή γραφή, η Εξ.(32) γράφεται ως:

$$\underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{F}_C \cos(\Omega t) + \underset{\sim}{F}_S \sin(\Omega t) \tag{33}$$

Η διεγείρουσα δύναμη f_j είναι δυνατόν να γραφεί πιο συνοπτικά ως εξής:

$$f_j(t) = F_j \cos(\Omega t + \alpha_j) \tag{34}$$

Στην Εξ.(34) ως F_j συμβολίζεται το μέτρο της δύναμης, το οποίο ισούται με:

$$F_j = \sqrt{F_{C_j}^2 + F_{S_j}^2} \tag{35}$$

Επίσης, στην Εξ.(34) ως a_j συμβολίζεται η διαφορά φάσης της δύναμης και ισούται με:

$$a_j = \tan^{-1}\left(-\frac{F_{S_j}}{F_{C_j}} \right) \tag{36}$$

Εξ αιτίας της ***περιοδικής*** διέγερσης f_j, η απόκριση του $i-$Βαθμού Ελευθερίας του συστήματος ισούται με:

$$x_i\left(t\right) = X_{C_i}\cos\left(\Omega t\right) + X_{S_i}\sin\left(\Omega t\right) \tag{37}$$

όπου X_{C_i} είναι το πλάτος του συνημιτονικού μέρους της απόκρισης x_i και X_{S_i} είναι το πλάτος του ημιτονικού μέρους της εν λόγω απόκρισης. Και στην Εξ.(36), ως Ω συμβολίζεται η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης. Με μητρωϊκή γραφή, η Εξ.(37) γράφεται ως:

$$\underset{\sim}{x}_i\left(t\right) = \underset{\sim}{X}_C\cos\left(\Omega t\right) + \underset{\sim}{X}_S\sin\left(\Omega t\right) \tag{38}$$

Η απόκριση x_i είναι δυνατόν να γραφεί πιο συνοπτικά ως εξής:

$$x_i\left(t\right) = X_i\cos\left(\Omega t + \varphi_i\right) \tag{39}$$

Στην Εξ.(38) ως X_i συμβολίζεται το μέτρο της απόκρισης, το οποίο ισούται με:

$$X_i = \sqrt{X_{C_i}^2 + X_{S_i}^2} \tag{40}$$

Επίσης, στην Εξ.(38) ως φ_i συμβολίζεται η διαφορά φάσης της απόκρισης και ισούται με:

$$\varphi_i = \tan^{-1}\left(-\frac{X_{S_i}}{X_{C_i}} \right) \tag{41}$$

Η Συνάρτηση Μεταφοράς $H_{ij}\left(t\right)$ ορίζεται ως:

$$H_{ij} = \left(\frac{X_i}{F_j} \right) \tag{42}$$

όπου η απόκριση X_i δίδεται από την Εξ.(40) και η διέγερση F_j δίδεται από την Εξ.(35). Επομένως, για τον υπολογισμό κάθε ποσότητας $H_{ij}\left(t\right)$ απαιτείται ο υπολογισμός των μεγεθών X_i και F_j. Προς τούτο, αντικαθιστούμε τις Εξ.(6,7,8,33) στην Εξ.(3):

$$\begin{aligned} &\underline{M}\left(-\Omega^2\underset{\sim}{X}_C\cos\left(\Omega t\right) - \Omega^2\underset{\sim}{X}_S\sin\left(\Omega t\right)\right) + \underline{C}\left(-\Omega\underset{\sim}{X}_C\sin\left(\Omega t\right) + \Omega\underset{\sim}{X}_S\cos\left(\Omega t\right)\right) \\ &+\underline{K}\left(\underset{\sim}{X}_C\cos\left(\Omega t\right) + \underset{\sim}{X}_S\sin\left(\Omega t\right)\right) = \underset{\sim}{F}_C\cos\left(\Omega t\right) + \underset{\sim}{F}_S\sin\left(\Omega t\right) \end{aligned} \tag{43}$$

Ομαδοποιώντας τους ημιτονικούς και τους συνημιτονικούς όρους στην Εξ.(43), προκύπτει:

$$\left(-\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{X}_C + \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_S + \underline{K}\underset{\sim}{X}_C - \underset{\sim}{F}_C\right)\cos\left(\Omega t\right) + \left(-\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{X}_S - \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \underline{K}\underset{\sim}{X}_S - \underset{\sim}{F}_S\right)\sin\left(\Omega t\right) = 0 \tag{44}$$

Η Εξ.(44) πρέπει να ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή t Αυτό σημαίνει ότι οι σταθεροί συντελεστές των χρονικά μεταβαλλομένων ποσοτήτων της Εξ.(44) πρέπει να είναι μηδενικοί:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_C + \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_S + \underline{K}\underset{\sim}{X}_C - \underset{\sim}{F}_C\right) = \underset{\sim}{0} \\ \left(-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_S - \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \underline{K}\underset{\sim}{X}_S - \underset{\sim}{F}_S\right) = \underset{\sim}{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}-\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_C + \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_S + \underline{K}\underset{\sim}{X}_C = \underset{\sim}{F}_C \\ -\Omega^2 \underline{M}\underset{\sim}{X}_S - \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \underline{K}\underset{\sim}{X}_S = \underset{\sim}{F}_S\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_C + \Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_S = \underset{\sim}{F}_C \\ -\Omega\underline{C}\underset{\sim}{X}_C + \left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{X}_S = \underset{\sim}{F}_S\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) & \Omega\underline{C} \\ -\Omega\underline{C} & \left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{X}_C \\ \underset{\sim}{X}_S\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{F}_C \\ \underset{\sim}{F}_S\end{bmatrix} \quad (45)$$

Εάν ένα σύστημα έχει N Βαθμούς Ελευθερίας, τότε οι διαστάσεις των πινάκων στην Εξ.(45) είναι οι ακόλουθες:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}\underbrace{\left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)}_{N\times N} & \underbrace{\Omega\underline{C}}_{N\times N} \\ \underbrace{-\Omega\underline{C}}_{N\times N} & \underbrace{\left(-\Omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right)}_{N\times N}\end{bmatrix}}^{\underline{A}}}_{2N\times 2N}\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}\underbrace{\underset{\sim}{X}_C}_{N\times 1} \\ \underbrace{\underset{\sim}{X}_S}_{N\times 1}\end{bmatrix}}^{\underset{\sim}{X}}}_{2N\times 1} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}\underbrace{\underset{\sim}{F}_C}_{N\times 1} \\ \underbrace{\underset{\sim}{F}_S}_{N\times 1}\end{bmatrix}}^{\underset{\sim}{F}}}_{2N\times 1} \quad (46)$$

Αριθμητική εφαρμογή

Έστω το σύστημα του Σχήματος 2, το οποίο διαθέτει $N = 2$ Βαθμούς Ελευθερίας. Το μητρώο μάζας $\underline{M}$ και το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ υπολογίζονται όπως και προηγουμένως (βλ. Παράρτημα Β), άρα ισχύει:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix}4m & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix} \qquad \underline{K} = \begin{bmatrix}2k & -k \\ -k & k\end{bmatrix} \quad (47)$$

Το μητρώο απόσβεσης $\underline{C}$ του συστήματος, με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης και εφαρμόζοντας, κατά τα γνωστά, την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισούται με (για αναλυτικό υπολογισμό, βλ. Παράρτημα Γ):

$$\underline{C} = \begin{bmatrix}2c & -c \\ -c & c\end{bmatrix} \quad (48)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(32,37,46,47,48) δίδει:

$$\begin{bmatrix}-\Omega^2\begin{bmatrix}4m & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2k & -k \\ -k & k\end{bmatrix} & \Omega\begin{bmatrix}2c & -c \\ -c & c\end{bmatrix} \\ -\Omega\begin{bmatrix}2c & -c \\ -c & c\end{bmatrix} & -\Omega^2\begin{bmatrix}4m & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2k & -k \\ -k & k\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{C_1} \\ X_{C_2} \\ X_{S_1} \\ X_{S_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{C_1} \\ F_{C_2} \\ F_{S_1} \\ F_{S_2}\end{bmatrix} \quad (49)$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(49), προκύπτει:

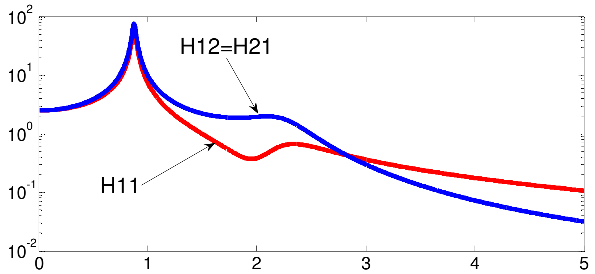
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega^2(4m+2k) & \Omega^2 k \\ \Omega^2 k & -\Omega^2(m+k) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\Omega c & -\Omega c \\ -\Omega c & \Omega c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2\Omega c & \Omega c \\ \Omega c & -\Omega c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\Omega^2(4m+2k) & \Omega^2 k \\ \Omega^2 k & -\Omega^2(m+k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{C_1} \\ X_{C_2} \\ X_{S_1} \\ X_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{C_1} \\ F_{C_2} \\ F_{S_1} \\ F_{S_2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\Omega^2(4m+2k) & \Omega^2 k & 2\Omega c & -\Omega c \\ \Omega^2 k & -\Omega^2(m+k) & -\Omega c & \Omega c \\ -2\Omega c & \Omega c & -\Omega^2(4m+2k) & \Omega^2 k \\ \Omega c & -\Omega c & \Omega^2 k & -\Omega^2(m+k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{C_1} \\ X_{C_2} \\ X_{S_1} \\ X_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{C_1} \\ F_{C_2} \\ F_{S_1} \\ F_{S_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (50)$$

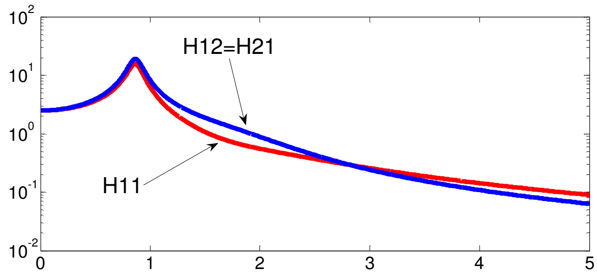
Επιλύοντας το σύστημα της Εξ.(50), προκύπτουν τα μεγέθη $X_{C_1}, X_{C_2}, X_{S_1}, X_{S_2}$:

$$\begin{bmatrix} X_{C_1} \\ X_{C_2} \\ X_{S_1} \\ X_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega^2(4m+2k) & \Omega^2 k & 2\Omega c & -\Omega c \\ \Omega^2 k & -\Omega^2(m+k) & -\Omega c & \Omega c \\ -2\Omega c & \Omega c & -\Omega^2(4m+2k) & \Omega^2 k \\ \Omega c & -\Omega c & \Omega^2 k & -\Omega^2(m+k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{C_1} \\ F_{C_2} \\ F_{S_1} \\ F_{S_2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Οι Συναρτήσεις Μεταφοράς του συστήματος προκύπτουν αντικαθιστώντας τις υπολογισθείσες τιμές $X_{C_1}, X_{C_2}, X_{S_1}, X_{S_2}$ και τις γνωστές (δεδομένες) τιμές $F_{C_1}, F_{C_2}, F_{S_1}, F_{S_2}$ στις Εξ.(35,40) και (αντικαθιστώντας) τα αποτελέσματα αυτών στην Εξ.(42). Με βάση τα ανωτέρω και για μάζα $m = 100kg$, σταθερά ελατηρίου $k = 400\,N/m$, δύναμη $F_{C_1} = 1N$ και $F_{C_2} = F_{S_1} = F_{S_2} = 0$, προκύπτουν τα διαγράμματα του Σχήματος 4.



(α)



(β)

Σχήμα 4: Συναρτήσεις Μεταφοράς H_{11} και H_{12} για (α) λόγο απόσβεσης $\zeta = 0.1$ και (β) λόγο απόσβεσης $\zeta = 0.4$

Υπενθυμίζεται ότι η σταθερά απόσβεσης υπολογίζεται από την σχέση $c = 2\zeta\Omega m$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Απόδειξη της Εξ.(4)

Σύμφωνα με την Εκπαιδευτική Ενότητα 08, η απόκριση του δυναμικού συστήματος ισούται με:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underline{\Phi}\ \underset{\sim}{q}(t) \tag{A.1}$$

όπου $\underline{\Phi}$ είναι ο ***πίνακας των ιδιοανυσμάτων***, δηλαδή $\underline{\Phi} = \left[\underset{\sim}{\Phi}_1 \quad \underset{\sim}{\Phi}_2 \quad \ldots \quad \underset{\sim}{\Phi}_N\right]$, και $\underset{\sim}{q}(t)^T = \left[q_1(t) \quad q_2(t) \quad \ldots \quad q_N(t)\right]$ είναι οι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας. Συνεπώς, στην περίπτωση του εξεταζόμενου $m-c-k$ δυναμικού συστήματος, η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$\underline{M}\ \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underline{C}\ \dot{\underset{\sim}{x}} + \underline{K}\ \underset{\sim}{x} + = \underset{\sim}{F} \tag{A.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την Εξ.(Α.2) με τον πίνακα $\underline{\Phi}^T$ των ιδιοανυσμάτων και αντικαθιστώντας με την Εξ.(Α.1), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&\underline{M}\ \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underline{C}\ \dot{\underset{\sim}{x}} + \underline{K}\ \underset{\sim}{x} + = \underset{\sim}{F} \Rightarrow \underline{\Phi}^T \underline{M}\ \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underline{\Phi}^T \underline{C}\ \dot{\underset{\sim}{x}} + \underline{\Phi}^T \underline{K}\ \underset{\sim}{x} + = \underline{\Phi}^T \underset{\sim}{F} \xrightarrow{\underset{\sim}{x} = \underline{\Phi}\ \underset{\sim}{q}(t)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \underline{\Phi}^T\ \underline{M}\ \underline{\Phi}\ \ddot{\underset{\sim}{q}}(t) + \underline{\Phi}^T\ \underline{C}\,\underline{\Phi}\ \dot{\underset{\sim}{q}}(t) + \underline{\Phi}^T\ \underline{K}\ \underline{\Phi}\ \underset{\sim}{q}(t) = \underline{\Phi}^T\ \underset{\sim}{F} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T \\ \ldots \\ \underset{\sim}{\Phi}_N^T \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}^T} \underline{M}\ \underbrace{\left[\underset{\sim}{\Phi}_1 \quad \underset{\sim}{\Phi}_2 \quad \ldots \quad \underset{\sim}{\Phi}_N\right]}_{\underline{\Phi}} \right\} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ldots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix}}_{\ddot{\underset{\sim}{q}}} \\
&+ \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T \\ \ldots \\ \underset{\sim}{\Phi}_N^T \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}^T} \underline{C}\ \underbrace{\left[\underset{\sim}{\Phi}_1 \quad \underset{\sim}{\Phi}_2 \quad \ldots \quad \underset{\sim}{\Phi}_N\right]}_{\underline{\Phi}} \right\} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ldots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}}_{\dot{\underset{\sim}{q}}} \\
&+ \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T \\ \ldots \\ \underset{\sim}{\Phi}_N^T \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}^T} \underline{K}\ \underbrace{\left[\underset{\sim}{\Phi}_1 \quad \underset{\sim}{\Phi}_2 \quad \ldots \quad \underset{\sim}{\Phi}_N\right]}_{\underline{\Phi}} \right\} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_N \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T \\ \ldots \\ \underset{\sim}{\Phi}_N^T \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}^T} \underset{\sim}{F}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων (δηλαδή ότι $\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{K}\,\underset{\sim}{\Phi}_j = 0, i \neq j$, $\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}_i = m_{ii}$ και $\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{K}\,\underset{\sim}{\Phi}_i = k_{ii}$, βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08) και εκτελώντας πράξεις, η Εξ.(Α.3) δίδει:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{m_{11}} & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{m_{12}=0}} & & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{m_{1N}=0}} \\ \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{m_{21}=0}} & \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{m_{22}} & & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{m_{2N}=0}} \\ & & \ldots & \\ \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{m_{N1}=0}} & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{m_{N2}=0}} & & \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{m_{NN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ldots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{c_{11}} & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{c_{12}=0}} & & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{c_{1N}=0}} \\ \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{c_{21}=0}} & \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{c_{22}} & & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{c_{2N}=0}} \\ & & \ldots & \\ \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{c_{N1}=0}} & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{c_{N2}=0}} & & \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{C}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{c_{NN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ldots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{k_{11}} & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{k_{12}=0}} & & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{k_{1N}=0}} \\ \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{k_{21}=0}} & \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{k_{22}} & & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{k_{2N}=0}} \\ & & \ldots & \\ \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_1}_{k_{N1}=0}} & \cancel{\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_2}_{k_{N2}=0}} & & \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}_N^T \underline{K}\, \underset{\sim}{\Phi}_N}_{k_{NN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underset{\sim}{F} \\ \ldots \\ \underset{\sim}{\Phi}_N^T \underset{\sim}{F} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & m_{22} & & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ldots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & c_{22} & & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ldots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & k_{22} & & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underset{\sim}{F} \\ \ldots \\ \underset{\sim}{\Phi}_N^T \underset{\sim}{F} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_{11}\ddot{q}_1 + \left(\beta_1 m_{11} + \beta_2 k_{11}\right)\dot{q}_1 + k_{11}q_1 = \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underset{\sim}{F} \\ m_{22}\ddot{q}_2 + \left(\beta_1 m_{22} + \beta_2 k_{22}\right)\dot{q}_2 + k_{22}q_2 = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underset{\sim}{F} \\ \ldots \\ m_{NN}\ddot{q}_N + \left(\beta_1 m_{NN} + \beta_2 k_{NN}\right)\dot{q}_N + k_{NN}q_N = \underset{\sim}{\Phi}_N^T \underset{\sim}{F} \end{bmatrix} \Rightarrow m_{ii}\ddot{q}_i + \left(\beta_1 m_{ii} + \beta_2 k_{ii}\right)\dot{q}_i + k_{ii}q_i = \underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}, i = 1,2,\ldots,N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_i + \left(\beta_1 + \beta_2 \underbrace{\left(\frac{k_{ii}}{m_{ii}}\right)}_{\omega_i^2}\right)\dot{q}_i + \underbrace{\left(\frac{k_{ii}}{m_{ii}}\right)}_{\omega_i^2} q_i = \underbrace{\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}}_{g_i(t)}, i = 1,2,\ldots,N$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_i + \left(\beta_1 + \beta_2 \omega_i^2\right)\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = g_i\left(t\right), i = 1,2,\ldots,N \qquad \text{(A.4)}$$

Η Εξ.(Α.4) περιγράφει τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος ως συνόλου αποσυζευγμένων μονοβάθμιων δυναμικών συστημάτων $m-c-k$, μοναδιαίας γενικευμένης μάζας, ισοδύναμης σταθεράς ελατηρίου ω_i^2 και γενικευμένης εξωτερικής διέγερσης $g_i\left(t\right)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Υπολογισμός μητρώων μάζας και δυσκαμψίας για μηδενική απόσβεση

Ο υπολογισμός του μητρώου μάζας $\underline{M}$ και του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$ του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος, επιτυγχάνεται εύκολα χρησιμοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange. Ειδικότερα, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01 και Εκπαιδευτική Ενότητα 07):

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στις μάζες m_1 και m_2, ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \tag{B.1}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια σταθεράς k_1 και k_2, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\Delta x_1\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta x_2\right)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2\right)^2 \tag{B.2}$$

- Στο σύστημα δεν διαχέεται ενέργεια P_C, διότι το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία απόσβεσης, άρα ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{B.3}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος, λόγω άσκησης της εξωτερικής δύναμης F_1, ισούται με:

$$P_t = F_1 \dot{x}_1 \tag{B.4}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \tag{B.5}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(Β.1, Β.2, Β.5), προκύπτει:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2\right)^2 \right) \tag{B.6}$$

Η εφαρμογή της Εξ.(Β.6) για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_1$, δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2\right)^2 \right) \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \tag{B.7}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(m_1 \dot{x}_1 \right) = m_1 \ddot{x}_1 \tag{B.8}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2\right)^2 \right) \right) \right) = k_1 x_1 + k_2 \left(x_1 - x_2\right) = \left(k_1 + k_2\right) x_1 - k_2 x_2 \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = 0 \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = F_1 \tag{B.11}$$

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα01, Εκπαιδευτική Ενότητα07):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \tag{B.12}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(B.8,B.9,B.10,B.11) στην Εξ.(B.12), προκύπτει:

$$m_1\,\ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \tag{B.13}$$

Επαναλαμβάνοντας την ανωτέρω διαδικασία για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_2$, προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}k_1 x_1^{\ 2} + \frac{1}{2}k_2\left(x_1 - x_2\right)^2\right)\right) = m_2\,\dot{x}_2 \tag{B.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right) = m_2\,\ddot{x}_2 \tag{B.15}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}k_1 x_1^{\ 2} + \frac{1}{2}k_2\left(x_1 - x_2\right)^2\right)\right)\right) = k_2\left(x_1 - x_2\right)\left(-1\right) = -k_2 x_1 + k_2 x_2 \tag{B.16}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{B.17}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{B.18}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(B.15,B.16,B.17,B.18) στην Εξ.(B.19), προκύπτει:

$$m_2\,\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \tag{B.19}$$

Χρησιμοποιώντας μητρωϊκή γραφή, οι Εξ.(13,B.19) γράφονται και ως εξής:

$$\left\{\begin{matrix} m_1\,\ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \\ m_2\,\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(k_1 + k_2\right) & -k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = F_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{B.20}$$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα της εκφώνησης (δηλαδή ότι $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, και $k_1 = k_2 = k$) στην Εξ.(Β.20), τελικά προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{B.21}$$

Με βάση την Εξ.(Β.21), έπεται ότι:

- Το μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος ισούται με:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \tag{B.22}$$

- Το μητρώο μάζας του συστήματος ισούται με:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad \text{(B.22)}$$

Από τα δεδομένα της εκφώνησης (μηδενική απόσβεση), έπεται ότι το μητρώο απόσβεσης ισούται με:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.23}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Υπολογισμός του μητρώου $\underline{C}$ για μη-μηδενική απόσβεση

Ο υπολογισμός του μητρώου απόσβεσης $\underline{C}$ επιτυγχάνεται εύκολα χρησιμοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange και τα αποτελέσματα από το Παράρτημα Β. Ειδικότερα, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01 και Εκπαιδευτική Ενότητα 07):

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, από την Εξ.(Β.1), ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\,\dot{x}_2^2 \tag{Γ.1}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, από την Εξ.(Β.2), ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2 \right)^2 \tag{Γ.2}$$

- Στο σύστημα διαχέεται ενέργεια P_C ίση με:

$$P_C = \left(\frac{1}{2}\right) c_1 \dot{x}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) c_1 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \right)^2 \tag{Γ.3}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος, λόγω άσκησης εξωτερικής διέγερσης, ισούται με:

$$P_t = f_1 \dot{x}_1 \tag{Γ.4}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \tag{Γ.5}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(Γ.1, Γ.2, Γ.5), προκύπτει:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\,\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2 \right)^2 \right) \tag{Γ.6}$$

Η εφαρμογή της Εξ.(Γ.6) για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q = x_1$, δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\frac{1}{2} m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\,\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2 \right)^2 \right) \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\,\dot{x}_1 \tag{Γ.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt}\left(m_1\,\dot{x}_1 \right) = m_1\,\ddot{x}_1 \tag{Γ.8}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\,\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_1 - x_2 \right)^2 \right) \right) \right) = k_1 x_1 + k_2 \left(x_1 - x_2 \right) = \left(k_1 + k_2 \right) x_1 - k_2 x_2 \tag{Γ.9}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\left(\frac{1}{2}\right) c_1 \dot{x}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) c_2 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \right)^2 \right) = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \right)\left(-1 \right) = \left(c_1 + c_2 \right) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 \tag{Γ.10}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_1} = f_1 \tag{Γ.11}$$

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι (βλ. Εκπαιδευτικές Ενότητες 01, 07):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \tag{Γ.12}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(Γ.8, Γ.9, Γ.10, Γ.11) στην Εξ.(Γ.12), προκύπτει:

$$m_1\,\ddot{x}_1+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2+\left(c_1+c_2\right)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2=f_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1\,\ddot{x}_1+\left(c_1+c_2\right)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=f_1 \tag{Γ.13}$$

Επαναλαμβάνοντας την ανωτέρω διαδικασία για την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή $q=x_2$, προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2-\left(\frac{1}{2}k_1x_1^{\;2}+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2\right)\right)=m_2\,\dot{x}_2 \tag{Γ.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(m_2\,\dot{x}_2\right)=m_2\,\ddot{x}_2 \tag{Γ.15}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2-\left(\frac{1}{2}k_1x_1^{\;2}+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2\right)\right)\right)=k_2\left(x_1-x_2\right)\left(-1\right)=-k_2x_1+k_2x_2 \tag{Γ.16}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)c_1\dot{x}_1^2+\left(\frac{1}{2}\right)c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right)=c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right) \tag{Γ.17}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}_2}=0 \tag{Γ.18}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(Β.15,Β.16,Β.17,Β.18) στην Εξ.(Β.19), προκύπτει:

$$m_2\,\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2+c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)=0 \Rightarrow m_2\,\ddot{x}_2+c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)-k_2x_1+k_2x_2=0 \tag{Γ.19}$$

Χρησιμοποιώντας μητρωϊκή γραφή, οι Εξ.(Γ.13, Γ.19) γράφονται και ως εξής:

$$\left\{\begin{matrix} m_1\,\ddot{x}_1+\left(c_1+c_2\right)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=f_1 \\ m_2\,\ddot{x}_2+c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \left(k_1+k_2\right) & -k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=f_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{F}} \qquad (\Gamma.20)$$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα της εκφώνησης (δηλαδή ότι $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$ και $c_1 = c_2 = c$) στην Εξ.(Γ.20), τελικά προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (\Gamma.21)$$

Συνεπώς, το μητρώο απόσβεσης του συστήματος ισούται με:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \qquad (\Gamma.22)$$