ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 12η
Μετασχηματισμός Laplace

Γενικά

Στις προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες, παρουσιάσθηκαν οι εξής μέθοδοι υπολογισμού της δυναμικής απόκρισης ενός συστήματος:

- Μέθοδος Προσδιοριστέων Συντελεστών
- Μέθοδος Ιδιοανυσματικού Μετασχηματισμού
- Μέθοδος Συνάρτησης Μεταφοράς

Ένας επιπρόσθετος, εναλλακτικός, τρόπος υπολογισμού είναι η Μέθοδος Μετασχηματισμού Laplace. Η ιδιαίτερη αξία αυτού του τεχνικού τρόπου επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων (Δ.Ε.) στη Δυναμική έγκειται στο γεγονός ότι:

- Αποτελεί ένα εξαιρετικά πιο σύντομο και περιεκτικό εργαλείο επίλυσης (Δ.Ε.).
- Συμβάλλει στην αναπαράσταση, με πολύ συνοπτικό τρόπο, της φυσικής συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος.

Αυτοί είναι και οι λόγοι, για τους οποίους θα ασχοληθούμε με το Μετασχηματισμό Laplace στο πλαίσιο του μαθήματος ‘Δυναμική Μηχανών Ι’.

Διατύπωση Μετασχηματισμού Laplace

Η μαθηματική διατύπωση του Μετασχηματισμού Laplace μίας, χρονικά μεταβαλλόμενης, ποσότητας $x(t)$ είναι:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = X = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t)\,dt \tag{1}$$

όπου $x(t)$ είναι μια συνάρτηση στο χρόνο και s είναι ένας μιγαδικός αριθμός, δηλαδή μία ποσότητα με ένα πραγματικό μέρος σ και ένα φανταστικό μέρος $j\omega$:

$$s = \sigma + j\omega \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τη γραφή Euler ενός μιγαδικού αριθμού, ισχύει:

$$e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \xrightarrow{Euler:\, e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta} e^{-st} = e^{-\sigma t}\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right) \tag{3}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(1,3) δίδει:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-\sigma t}\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right) dt = \underbrace{\int_0^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} \cos\omega t dt}_{\mathrm{Re}} - \underbrace{\int_0^{\infty} j\, x(t) e^{-\sigma t} \sin\omega t dt}_{\mathrm{Im}} \tag{4}$$

Έπεται, λοιπόν, ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα της Εξ.(1) ανάγεται στην ολοκλήρωση δύο τμημάτων: στην ολοκλήρωση του πραγματικού μέρους και στην ολοκλήρωση του φανταστικού μέρους (βλ. Εξ.(4)). Ο βασικός λόγος, για τον οποίο χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση με μιγαδικούς αριθμούς, είναι το γεγονός ότι επιτυγχάνεται η συμπύκνωση δύο πληροφοριών (πραγματικό μέρος και φανταστικό μέρος) στην ίδια μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα, στην ίδια αναπαράσταση, συνυπάρχει ένα σήμα (όρος $e^{-\sigma t}$), το οποίο μειώνεται εκθετικά, και ένα σήμα (όρος $\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right)$), το οποίο εκφράζει ταλάντωση. Ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές σ και ω (βλ. Εξ.(2), περιγράφεται μία χαρακτηριστική δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος. Συνεπώς, στην ίδια αναπαράσταση είναι δυνατόν να συμπεριληφθεί ο μεταβατικός όρος και ο μόνιμος όρος της απόκρισης ενός δυναμικού συστήματος.

Από φυσικής απόψεως, η Εξ.(1) δηλώνει πόσο μοιάζει η απόκριση $x(t)$ στην ταλάντωση e^{-st}. Με άλλα λόγια, ο Μετασχηματισμός Laplace αποτελεί μία ποιοτική γενίκευση της ανάπτυξης Fourier.

Στις εφαρμογές του Μηχανικού, χρησιμοποιούμε τυποποιημένους πίνακες, στους οποίους αναγράφονται οι Μετασχηματισμοί Laplace διαφόρων συναρτήσεων. Για τις ανάγκες του μαθήματος ‘Δυναμική Μηχανών Ι’, χρήσιμοι είναι οι ακόλουθοι Μετασχηματισμοί Laplace:

- Ιδιότητα γραμμικότητας:

$$\mathcal{L}\left\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right\} = a_1 \underbrace{\mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}}_{X_1(s)} + a_2 \underbrace{\mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\}}_{X_2(s)} = X_1(s) + X_2(s) \tag{5}$$

- Πρώτη χρονική παράγωγος:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{x}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{x(s)\right\} - x(0) = s\,X(s) - x(0) = s\,X - x_o \tag{6}$$

  Ως x_o συμβολίζεται η τιμή της συνάρτησης τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ παρατηρείται ένα πολύ ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του Μετασχηματισμού Laplace: αυτό που στο πεδίο του χρόνου είναι παράγωγος (όρος $\dot{x}(t)$), στο πεδίο συχνότητας μεταφράζεται ως πολλαπλασιασμός της μιγαδικής ποσότητας $X(s)$ επί τον μιγαδικό αριθμο s.

- Μετασχηματισμός συνάρτησης ημιτόνου:

$$\mathcal{L}\left\{\sin(\Omega t)\right\} = \left(\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\right) \tag{7}$$

- Μετασχηματισμός συνάρτησης συνημιτόνου:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(\Omega t)\right\} = \left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right) \tag{8}$$

- Μετασχηματισμός συνάρτησης Heaviside $H^*(t)$:

$$\mathcal{L}\left\{H^*(t)\right\} = \left(\frac{1}{s}\right) \tag{9}$$

Από τις Εξ.(7,8,9), διαπιστώνουμε ότι ο Μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης, οριζομένης στο πεδίο του χρόνου, είναι ένα κλάσμα, στο οποίο ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι, εν γένει, πολυώνυμα της μιγαδικής μεταβλητής s.

Μετασχηματισμός Laplace και συμπεριφορά μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος

Κατά τα γνωστά (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02), η εξίσωση ισορροπίας ενός ***μονοβάθμιου*** δυναμικού συστήματος σε αρμονική διέγερση είναι:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \cos\left(\Omega t\right) \tag{10}$$

Η αδιαστατοποιημένη έκφραση της Εξ.(10) (βλ. Παράρτημα Α, Εξ.(Α.1-Α.6)), είναι:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X_s \cos\left(\Omega t\right) \tag{11}$$

Εφαρμόζοντας τον Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(11), και λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ.(5,6,8), προκύπτει (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα Α/Εξ.(Α.12)):

$$\left[s^2 X - s x_o - \dot{x}_o\right] + 2\zeta\omega\left(sX - x_o\right) + \omega^2 X = \omega^2 X_s \left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right) \tag{12}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους της Εξ.(12), προκύπτει:

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right) X = \left(s + 2\zeta\omega\right) x_o + \dot{x}_o + \omega^2 X_s \left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right) \tag{13}$$

Επιλύοντας την Εξ.(13) ως προς την μεταβλητή X, προκύπτει:

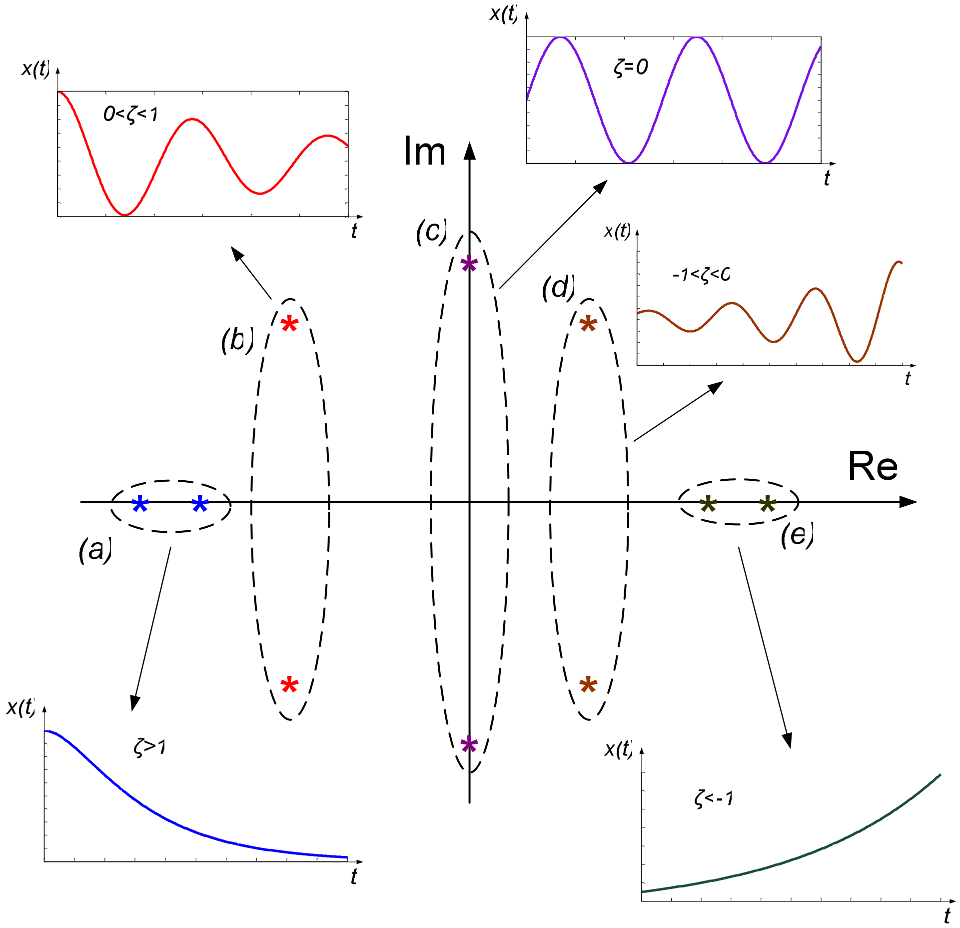
$$X = \underbrace{\frac{1}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)}\left[\left(s + 2\zeta\omega\right) x_o + \dot{x}_o\right]}_{\text{απόκριση σε ελεύθερη ταλάντωση}} + \underbrace{\omega^2 X_s \left(\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right)\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right)}_{\text{απόκριση σε αρμονική διέγερση}} \tag{14}$$

Στην Εξ.(14) εμφανίζεται ο όρος $\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)$, ο οποίος δεν είναι άλλος από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος.[1] Η θέση των ριζών του συγκεκριμένου όρου, στο μιγαδικό επίπεδο, είναι εκείνη που προσδιορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος (οι εν λόγω ρίζες καλούνται 'πόλοι του συστήματος'). Αναλυτικά, όλες οι δυνατές περιπτώσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 1 και περιγράφονται στον Πίνακα 1.

Δεδομένου ότι το μιγαδικό επίπεδο καλείται και επίπεδο συχνότητας, έπεται ότι ***με το Μετασχηματισμό Laplace επιτυγχάνεται η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας***. Αυτό, πρακτικά, σημαίνει ότι μία ποσότητα, η οποία περιγράφεται ως συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου, εκφράζεται, μέσω του Μετασχηματισμού Laplace, ως πολυώνυμο της μιγαδικής μεταβλητής s στο πεδίο συχνότητας. Τέτοια πολυώνυμα, εκτός

[1] *Στην Εκπαιδευτική Ενότητα 02/Εξ.(13) είχε χρησιμοποιηθεί η μεταβλητή S για τη γραφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Η επιλογή του συμβολισμού δεν ήταν τυχαία, διότι αντιστοιχεί στο σύμβολο S του Μετασχηματισμού Laplace.*

της μεγάλης ευχέρειας που παρέχουν στο μαθηματικό χειρισμό (εκτέλεση υπολογισμών), αποτελούν έναν πολύ συνοπτικό τρόπο περιγραφής της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος.



Σχήμα 1: Δυνατές θέσεις πόλων (σημειώνονται ως αστερίσκοι) δυναμικού συστήματος

Η φυσική σημασία της θέσης των πόλων ενός συστήματος περιγράφεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Πόλοι δυναμικού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο

Θέση	Περιγραφή πόλων	Φυσική σημασία
(a)	δύο πραγματικοί πόλοι, με αρνητικό πραγματικό μέρος	Ταλάντωση με υπερκρίσιμη απόσβεση
(b)	δύο πόλοι, συμμετρικοί, με αρνητικό πραγματικό μέρος	Ταλάντωση με υποκρίσιμη απόσβεση (εκθετικά αποσβενόμενη ταλάντωση)
(c)	δύο πόλοι, συμμετρικοί, με μηδενικό πραγματικό μέρος	Ταλάντωση μηδενικής απόσβεσης (ελεύθερη ταλάντωση με συχνότητα την ιδιοσυχνότητα του συστήματος)
(d)	δύο πόλοι, συμμετρικοί, με θετικό πραγματικό μέρος	Ταλάντωση με αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης
(e)	δύο πραγματικοί πόλοι, με θετικό πραγματικό μέρος	Ταλάντωση με εκθετική αύξηση του πλάτους ταλάντωσης

Καθίσταται, λοιπόν, φανερό, από το Σχήμα 1 και τον Πίνακα 1, ότι:

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\left(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2\right)$ στο μιγαδικό επίπεδο καλούνται 'πόλοι του συστήματος' και η θέση τους στο μιγαδικό επίπεδο προσδιορίζει πλήρως τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

Με βάση το Σχήμα 1 και τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι:

- Αρνητικό πραγματικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής s (δηλαδή $\sigma<0$, βλ. Εξ.(2)), δηλώνει θετική απόσβεση.
- Ισοδύναμα, θετικό πραγματικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής s (δηλαδή $\sigma>0$, βλ. Εξ.(2)), δηλώνει αρνητική απόσβεση. Σε αυτήν την περίπτωση, στο σύστημα προσδίδεται ενέργεια (δεν καταστρέφεται ενέργεια), με αποτέλεσμα την αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης (αύξηση του πλάτους της απόκρισης).
- Ύπαρξη συζυγών μιγαδικών ριζών, δηλαδή μη-μηδενικό φανταστικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής s (δηλαδή $\omega\neq 0$, βλ. Εξ.(2)), δηλώνει ταλαντωτική συμπεριφορά.
- Μηδενικό φανταστικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής s (δηλαδή $\omega=0$, βλ. Εξ.(2)), δηλώνει μη-ταλαντωτική συμπεριφορά.

Παρατηρήσεις επί του Μετασχηματισμού Laplace

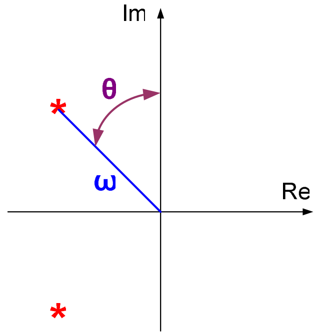
Με τον Μετασχηματισμό Laplace επιτυγχάνεται η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Το αντίστροφο, δηλαδή η μετάβαση από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου, επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του Αντιστρόφου Μετασχηματισμού Laplace. Και σε αυτήν την περίπτωση, για τις εφαρμογές του Μηχανικού, χρησιμοποιούμε έτοιμους πίνακες, από τους οποίους αντλούμε τη σχέση για τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα, από πίνακες βρίσκουμε ότι ισχύουν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα Β):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=e^{-\zeta\omega t}\left(\cos\left(\omega_n t\right)-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right),\ \ \omega_n=\omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{15}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega_n t\right),\ \ \omega_n=\omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{16}$$

Υπενθυμίζεται ότι ως ω_n συμβολίζεται η συχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03, Πίνακα 2). Εφαρμόζοντας τις Εξ.(15,16) στην Εξ.(14), επιτυγχάνεται η επιστροφή από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο του χρόνου. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα, παρατίθεται στο Παράρτημα Γ η αναλυτική εφαρμογή του αντιστρόφου Μετασχηματισμού Laplace στον υπολογισμό της απόκρισης μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ υποκρίσιμης απόσβεσης και υπό αρμονική διέγερση.

Εν γένει, ένα δυναμικό σύστημα διαθέτει ιδιοσυχνότητες και μη-μηδενικό λόγο απόσβεσης. Στην περίπτωση της υποκρίσιμης απόσβεσης, η θέση των πόλων του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο και η αντίστοιχη πολική αναπαράσταση απεικονίζονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Πολική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ με υποκρίσιμη απόσβεση

Η απόσταση των πόλων από την αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 2) εκφράζει τη φυσική συχνότητα του συστήματος (εξ ου και η ονομασία του μιγαδικού επιπέδου ως 'επίπεδο συχνότητας'). Η εφαπτομένη της γωνίας θ, η οποία σχηματίζεται μεταξύ του ευθυγράμμου τμήματος, που εκφράζει τη φυσική συχνότητα, και του άξονα των φανταστικών αριθμών (βλ. Σχήμα 2) σχετίζεται με το λόγο απόσβεσης ζ του συστήματος. Μηδενική γωνία θ αντιστοιχεί σε μηδενικό λόγο απόσβεσης ($\zeta=0$), ενώ γωνία $\theta=90^o$ αντιστοιχεί σε μοναδιαίο λόγο απόσβεσης ($\zeta=1$). Αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα Δ.

Επίσης, επισημαίνεται ότι ο Μετασχηματισμός Laplace:

- Αποτελεί τον πιο σύντομο τεχνικό δρόμο επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων.
- Για τεχνικές εφαρμογές Μηχανικού, είναι εξαιρετικά απλός στην εφαρμογή του, διότι η συνδυασμένη χρήση της τεχνικής των μερικών κλασμάτων και έτοιμων πινάκων με μετασχηματισμούς Laplace βασικών συναρτήσεων απαλλάσσει από τον αναλυτικό υπολογισμό των εμπλεκομένων ολοκληρωμάτων.
- Με συνοπτικό τρόπο, εκφράζει τη δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος: από τη θέση των πόλων του δυναμικού συστήματος (ρίζες του αντιστοίχου χαρακτηριστικού πολυωνύμου) στο μιγαδικό επίπεδο, προσδιορίζεται η δυναμική απόκριση του συστήματος σε ελεύθερες ταλαντώσεις.

Υπολογισμός χρονικής απόκρισης μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace

Η απόκριση του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος στο πεδίο συχνότητας (βλ. Εξ.(14), η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για την πληρότητα του κειμένου) είναι:

$$X=\underbrace{\frac{1}{\left(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2\right)}\left[\left(s+2\zeta\omega\right)x_o+\dot{x}_o\right]}_{\text{απόκριση σε ελεύθερες ταλαντώσεις}}+\underbrace{\omega^2 X_s\left(\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right)}_{\text{απόκριση σε αρμονική διέγερση}} \qquad (17)$$

Στο δεξί μέλος της Εξ.(17) διακρίνονται δύο όροι:

- Ο πρώτος όρος περιγράφει την απόκριση του συστήματος σε ελεύθερη ταλάντωση, ενώ οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (πόλοι του συστήματος) καθορίζουν τον τύπο της δυναμικής συμπεριφοράς.
- Ο δεύτερος όρος περιγράφει την απόκριση του συστήματος σε αρμονική διέγερση.

Η Εξ.(17) (ισοδύναμα, η Εξ.(14)) προέκυψε από την εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace, μέσω του οποίου μεταβαίνουμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας. Για τη μετάβαση από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιούμε τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace. Στις επόμενες δύο παραγράφους περιγράφεται αναλυτικότερα η εφαρμογή του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace σε κάθε έναν από τους δύο προαναφερθέντες όρους (όρος ελεύθερης ταλάντωσης και όρος αρμονικής διέγερσης).

Υπολογισμός χρονικής απόκρισης μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος λόγω ελεύθερης ταλάντωσης με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace

Στην περίπτωση απουσίας εξωτερικής αρμονικής διέγερσης, η τιμή της μεταβλητής X_s (πλάτος αρμονικής διέγερσης) είναι μηδενική και η Εξ.(17) δίδει:

$$X = \frac{1}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)}\left[\left(s + 2\zeta\omega\right)x_o + \dot{x}_o\right] \tag{18}$$

Ωστόσο, ισχύει:

$$\left(s + 2\zeta\omega\right)x_o + \dot{x}_o = sx_o + 2\zeta\omega x_o + \dot{x}_o = sx_o + \left(2\zeta\omega x_o + \dot{x}_o\right) \tag{19}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(18,19) δίδει:

$$X = x_o\frac{s}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)} + \left(2\zeta\omega x_o + \dot{x}_o\right)\frac{1}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)} \tag{20}$$

Η εφαρμογή του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace στην Εξ.(20), δίδει:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{x_o\frac{s}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(2\zeta\omega x_o + \dot{x}_o\right)\frac{1}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)}\right\} \tag{21}$$

Από την εφαρμογή της Ιδιότητας της Γραμμικότητας (βλ. Εξ.(5)), στην Εξ.(21), προκύπτει:

$$x(t) = x_o\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)}\right\} + \left(2\zeta\omega x_o + \dot{x}_o\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)}\right\} \tag{22}$$

Από την Εξ.(Β.18) (βλ. Παράρτημα Β), ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right\} = e^{-\zeta\omega}\left(\cos\left(\omega_n t\right) - \left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right), \quad \omega_n = \omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{23}$$

Επίσης, από την Εξ.(Β.12) (βλ. Παράρτημα Β), ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega_n t\right),\quad \omega_n=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{24}$$

Τονίζεται ότι, όπως φαίνεται στο Παράρτημα Β, οι Εξ.(Β.12, Β.18), , ισχύουν για:

$$1-\zeta^2\geq 0\Rightarrow 1\geq\zeta^2\Rightarrow 1\geq\zeta\geq -1 \tag{25}$$

Υπενθυμίζεται ότι η Εξ.(25) καλύπτει και στην περίπτωση της υποκρίσιμης απόσβεσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02, σελ. 2.6). Ο συνδυασμός των Εξ.(22,23,24) δίδει:

$$x(t)=x_o e^{-\zeta\omega t}\left(\cos\left(\omega_n t\right)-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right)+\left(2\zeta\omega x_o+\dot{x}_o\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega_n t\right) \tag{26}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(26), προκύπτει:

$$x(t)=e^{-\zeta\omega t}x_o\cos\left(\omega_n t\right)-e^{-\zeta\omega t}x_o\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)+\left(2\zeta\omega x_o+\dot{x}_o\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega_n t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{-\zeta\omega t}x_o\cos\left(\omega_n t\right)+e^{-\zeta\omega t}\left(\left(2\zeta\omega x_o+\dot{x}_o\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)-x_o\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\right)\sin\left(\omega_n t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{-\zeta\omega t}x_o\cos\left(\omega_n t\right)+e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{2\zeta\omega x_o+\dot{x}_o-\zeta\omega x_o}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{-\zeta\omega t}x_o\cos\left(\omega_n t\right)+e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\zeta\omega x_o+\dot{x}_o}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{-\zeta\omega t}\left[x_o\cos\left(\omega_n t\right)+\left(\frac{\zeta\omega x_o+\dot{x}_o}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right],\quad \omega_n=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{27}$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ.(27) δεν είναι άλλη από την Εξ.(15) της Εκπαιδευτικής Ενότητας 02.

Υπολογισμός χρονικής απόκρισης μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος λόγω αρμονικής διέγερσης με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace

Σε περίπτωση απουσίας ελεύθερων ταλαντώσεων, δηλαδή για μηδενικές αρχικές συνθήκες ($x_o=\dot{x}_o=0$), η Εξ.(17) δίδει:

$$X(s)=\omega^2 X_s\left(\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right) \tag{28}$$

Αναπτύσσοντας το δεξί μέλος της Εξ.(18) σε μερικά κλάσματα, προκύπτει:

$$X(s)=\underbrace{\left(\frac{A_o s+A_1}{s^2+\Omega^2}\right)}_{1^{ος}\ όρος}+\underbrace{\left(\frac{B_o s+B_1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)}_{2^{ος}\ όρος} \tag{29}$$

Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με την τεχνική των μερικών κλασμάτων, σε κάθε μερικό κλάσμα, το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μικρότερο κατά ένα βαθμό από το αντίστοιχο πολυώνυμο του παρονομαστή. Ο αναλυτικός προσδιορισμός των αριθμητικών συντελεστών A_o, A_1, B_o, B_1 της Εξ.(29) παρατίθεται στο Παράρτημα Γ.

Στην Εξ.(19) παρατηρούμε ότι:

- Ο παρονομαστής του πρώτου όρου έχει προέλθει από τον συνημιτονικό όρο της εξωτερικής διέγερσης με συχνότητα διέγερσης Ω (βλ. Εξ.(10)). Συνεπώς ο εν λόγω όρος αντιστοιχεί στη μόνιμη απόκριση του συστήματος λόγω της εξωτερικής αρμονικής διέγερσης.
- Ο πολυωνυμικός παρονομαστής του δεύτερου όρου αντιστοιχεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος, άρα αντιστοιχεί στην ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος με ιδιοσυχνότητα ω (ισοδύναμα, αντιστοιχεί στη μεταβατική απόκριση του συστήματος).

Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτει ότι ($x_p(t)$: μερική λύση, $x_h(t)$:ομογενής λύση):

$$X(s) = \underbrace{\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2 + \Omega^2}\right)}_{x_p(t)} + \underbrace{\left(\frac{B_o s + B_1}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right)}_{x_h(t)} \tag{30}$$

Εάν, λοιπόν, με τη βοήθεια του Μετασχηματισμού Laplace, μεταβούμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace, μεταβούμε από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο του χρόνου, τότε:

- Από τον όρο $\left(s^2 + \Omega^2\right)$ θα προκύψουν όροι της μορφής $\sin(\Omega t)$ (ημιτονικός όρος) και $\cos(\Omega t)$ (συνημιτονικός όρος).
- Από τον όρο $\left(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2\right)$ θα προκύψουν όροι της μορφής $\sin(\omega_n t)$ (ημιτονικός όρος) και $\cos(\omega_n t)$ (συνημιτονικός όρος), όπου $\omega_n = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ είναι η συχνότητα των αποσβενομένων ταλαντώσεων.

Στο Παράρτημα Γ παρουσιάζεται και η εφαρμογή του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace στον όρο $x_p(t)$ της Εξ.(20). Το τελικό αποτέλεσμα της εν λόγω εφαρμογής είναι:

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \vartheta) \tag{31}$$

όπου

$$X = \left(\frac{\omega^2 X_s}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}}\right) \quad \text{και} \quad \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\Omega}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)}\right) \tag{32}$$

Υπενθυμίζεται ότι ως X_S συμβολίζεται το Στατικό Πλάτος της ταλάντωσης. Διαπιστώνουμε ότι οι Εξ.(31,32) είναι ίδιες με εκείνες, οι οποίες εμφανίζονται στον Πίνακα 3 της

Εκπαιδευτικής Ενότητας 03 και χρησιμεύουν για τον υπολογισμό του πλάτους ταλάντωσης X λόγω εξωτερικής αρμονικής διέγερσης και της διαφοράς φάσης ϑ στη μόνιμη κατάσταση, αντίστοιχα.

Επίσης, στο Παράρτημα Γ παρουσιάζεται η εφαρμογή του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace στον όρο $x_h\left(t\right)$ της Εξ.(20). Το τελικό αποτέλεσμα της εν λόγω εφαρμογής είναι:

$$x_h\left(t\right) = Ae^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega t+\varphi\right) \tag{33}$$

όπου

$$A = \sqrt{\left(\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)^2 + \left(\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{-\left(q^2+1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\right)^2}\,, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(q^2+1\right)}{\left(q^2-1\right)}\right) \tag{34}$$

Υπενθυμίζεται ότι στην Εκπαιδευτική Ενότητα 03 (Εξ.18), είχε ορισθεί ο λόγος q ως:

$$q = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \tag{35}$$

όπου Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη και ω είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Παράδειγμα

Έστω μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα με μηδενικές αρχικές συνθήκες ($x_o = \dot{x}_o = 0$), με μηδενικό λόγο απόσβεσης ($\zeta = 0$) και με βηματική διέγερση Heaviside $F\left(t\right) = F_o\,H^*\left(t\right)$. Ζητείται ο υπολογισμός, με τη βοήθεια του Μετασχηματισμού Laplace, της απόκρισης του δυναμικού συστήματος.

Λύση

Από την Εξ.(10), για μηδενικό λόγο απόσβεσης (άρα για μηδενική απόσβεση) και για διέγερση Heaviside, προκύπτει ότι η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$m\ddot{x} + kx = F_o\,H^*\left(t\right) \tag{36}$$

Αδιαστατοποιώντας την Εξ.(36) δια της μάζας m του συστήματος (βλ. Παράρτημα Α), προκύπτει:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X_s H^*\left(t\right) \tag{37}$$

Εφαρμόζοντας τον Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(37) (βλ. και Εξ.(5,9)), προκύπτει:

$$s^2 X + \omega^2 X = \omega^2 X_s\left(\frac{1}{s}\right) \tag{38}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους της Εξ.(38), προκύπτει:

$$X = \omega^2 X_s \left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\left(\frac{1}{s}\right) \tag{39}$$

Εφαρμόζοντας της τεχνική των μερικών κλασμάτων στην Εξ.(39), προκύπτει:

$$X = \left[\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2+\omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right)\right] \tag{40}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(40), προκύπτει:

$$\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2+\omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right) = \left(\frac{\left(A_o s + A_1\right)s + B_o\left(s^2+\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right) = \left(\frac{A_o s^2 + A_1 s + B_o s^2 + B_o\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_o s + A_1}{s^2+\omega^2}\right) + \left(\frac{B_o}{s}\right) = \left(\frac{\left(A_o + B_o\right)s^2 + A_1 s + B_o\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right) \tag{41}$$

Από το συνδυασμό των Εξ.(39,40,41), προκύπτει:

$$\left(\frac{\omega^2 X_s}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right) = \left(\frac{\left(A_o + B_o\right)s^2 + A_1 s + B_o\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)s}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A_o + B_o = 0 \\ A_1 = 0 \\ B_o \cancel{\omega^2} = \cancel{\omega^2} X_s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o \\ A_1 \\ B_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_s \end{bmatrix} \tag{42}$$

Η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος της Εξ.(42) ισούται με:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{43}$$

Επομένως, θα ισχύει:

- για τον αριθμητικό συντελεστή A_o

$$A_o = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_s & 0 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{X_s \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = X_s\left(0-1\right) \Rightarrow A_o = -X_s \tag{44}$$

- για τον αριθμητικό συντελεστή A_1

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_s & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ X_s & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 - 0 \Rightarrow A_1 = 0 \tag{45}$$

- για τον αριθμητικό συντελεστή B_o

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X_s \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_s \end{vmatrix}}{1} = X_s - 0 \Rightarrow B_1 = X_s \tag{46}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(40,44,45,46), δίδει:

$$X = \left[\left(\frac{A_o s + A_1}{s^2 + \omega^2} \right) + \left(\frac{B_o}{s} \right) \right] = \left[\left(\frac{-X_s s}{s^2 + \omega^2} \right) + \left(\frac{X_s}{s} \right) \right] \Rightarrow X = X_s \left[\underbrace{\left(\frac{1}{s} \right)}_{x_p} - \underbrace{\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)}_{x_h} \right] \tag{47}$$

Στην Εξ.(47) αναγνωρίζουμε τη μερική λύση x_p (ο αντίστοιχος όρος έχει προκύψει από την επιβολή της εξωτερικής βηματικής διέγερσης Heaviside) και την ομογενή λύση x_h (ο αντίστοιχος όρος έχει προκύψει από την ελεύθερη ταλάντωση του δυναμικού συστήματος). Εφαρμόζοντας τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(47), και αξιοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace των Εξ.(8,9), προκύπτει:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ X_s \left[\left(\frac{1}{s} \right) - \left(\frac{s}{s^2+\omega^2} \right) \right] \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ X_s \left(\frac{1}{s} \right) \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ X_s \left(\frac{-s}{s^2+\omega^2} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{X\} = X_s\, \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{1}{s} \right) \right\} - X_s\, \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{s}{s^2+\omega^2} \right) \right\} = X_s \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{1}{s} \right) \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{s}{s^2+\omega^2} \right) \right\} \right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{Εξ.(9)}]{\text{Εξ.(8)}} x(t) = X_s \left[H^*(t) - \cos(\omega t) \right] \tag{48}$$

Μετασχηματισμός Laplace και συμπεριφορά πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος

Σε ένα σύστημα πολλών Βαθμών Ελευθερίας και με απόσβεση, η εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$\underline{M}\, \underset{\sim}{\ddot{x}} + \underline{C}\, \underset{\sim}{\dot{x}} + \underline{K}\, \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \tag{49}$$

Για λόγους απλότητας, έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Η εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace στην Εξ.(34) επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τον Μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μία συνιστώσα του διανύσματος $\underset{\sim}{x}$. Με άλλα λόγια, σε ένα δυναμικό σύστημα με N Βαθμούς Ελευθερίας, η διάσταση του διανύσματος $\underset{\sim}{x}$ θα είναι $N \times 1$ και ο Μετασχηματισμός Laplace θα πρέπει να εφαρμοσθεί σε κάθε έναν Βαθμό Ελευθερίας (άρα, συνολικά θα εφαρμοσθεί N φορές). Σε μητρωϊκή γραφή, ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{ \underline{M}\, \underset{\sim}{\ddot{x}} + \underline{C}\, \underset{\sim}{\dot{x}} + \underline{K}\, \underset{\sim}{x} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \underset{\sim}{F}(t) \right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{ \underline{M}\, \underset{\sim}{\ddot{x}} \right\} + \mathcal{L}\left\{ \underline{C}\, \underset{\sim}{\dot{x}} \right\} + \mathcal{L}\left\{ \underline{K}\, \underset{\sim}{x} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \underset{\sim}{F}(t) \right\} \tag{50}$$

Εκτελώντας πράξεις (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα Ε), προκύπτει:

$$s^2 \underline{M}\, \underset{\sim}{X} + s\underline{C}\, \underset{\sim}{X} + \underline{K}\, \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{f}(s) + \underline{M}\left(s\underset{\sim}{x}_o + \underset{\sim}{\dot{x}}_o \right) + \underline{C}\left(\underset{\sim}{x}_o \right) \tag{51}$$

όπου $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}(s)$ είναι ένα διάνυσμα, κάθε στοιχείο του οποίου προέρχεται από την εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace στον αντίστοιχο Βαθμό Ελευθερίας:

$$\underset{\sim}{X}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(x_1(t)) \\ \mathcal{L}(x_2(t)) \\ \dots \\ \mathcal{L}(x_N(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \dots \\ X_N(s) \end{bmatrix} \tag{52}$$

Ομοίως, $\underset{\sim}{f}(s)$ είναι ένα διάνυσμα κάθε στοιχείο του οποίου προέρχεται από την εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace στην εξωτερική διέγερση του αντίστοιχου Βαθμού Ελευθερίας.

$$\underset{\sim}{f}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(F_1(t)) \\ \mathcal{L}(F_2(t)) \\ \dots \\ \mathcal{L}(F_N(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \dots \\ f_N(s) \end{bmatrix} \tag{53}$$

Αξιοποιώντας την έννοια της Συνάρτησης Μεταφοράς (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 10):

$$\underset{\sim}{X}(s) = \underline{H}(s)\, \underset{\sim}{f}(s) \tag{54}$$

όπου $\underline{H}(s)$ είναι ο πίνακας των Συναρτήσεων Μεταφοράς του συστήματος.
Αντιστρέφοντας τον πίνακα $\underline{H}(s)$, προκύπτει:

$$\underline{H}(s) = \left(s^2\underline{M} + s\underline{C} + \underline{K}\right)^{-1} \tag{55}$$

Για να είναι δυνατή η αντιστροφή του πίνακα $\underline{H}(s)$, πρέπει η ορίζουσά του να είναι διαφορετική του μηδενός. Η εν λόγω ορίζουσα μηδενίζεται όταν ισχύει:

$$\det\left(s^2\underline{M} + s\underline{C} + \underline{K}\right) = 0 \tag{56}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Η απόσβεση του συστήματος είναι μηδενική
  Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει:

$$\underline{C} = \underline{0} \tag{57}$$

  Ο συνδυασμός των Εξ.(56,57) δίδει:

$$\det\left(s^2\underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{58}$$

  Από την Εκπαιδευτική Ενότητα 07 (Εξ.43), προκύπτει ότι:

$$\det\left(-\omega^2\underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{59}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ.(58,59) μεταξύ τους, προκύπτει ότι ισχύει:

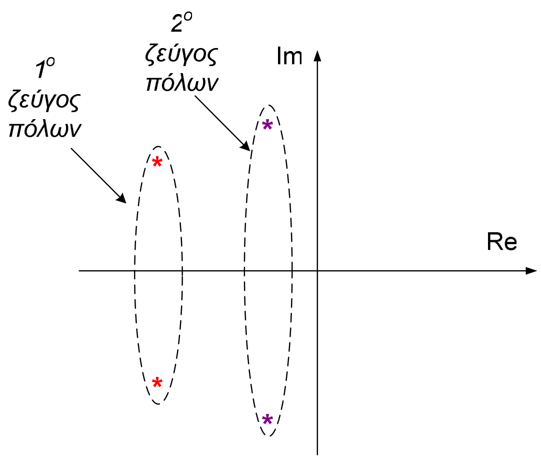
$$s^2 = -\omega^2 \xrightarrow{j^2=-1} s^2 = j^2\omega^2 = \left(j\omega\right)^2 \Rightarrow s = \pm j\omega \tag{60}$$

Για την ειδική περίπτωση μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος, βλ. Σχήμα 1 και Παράρτημα Δ.

- Η απόσβεση του συστήματος είναι μη-μηδενική
  Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει:

$$\underline{C} \neq \underline{0} \tag{61}$$

Και πάλι καταλήγουμε σε πολυωνυμικές εξισώσεις, οι ρίζες των οποίων καλούνται '*πόλοι του πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος*' και είναι, εν γένει, μιγαδικοί αριθμοί. Το διάγραμμα για τη θέση των πόλων ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος (βλ. Σχήμα 1) επεκτείνεται και στην περίπτωση των πολυβάθμιων δυναμικών συστημάτων. Οι πόλοι ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος προκύπτουν από την επίλυση της Εξ.(51), ενώ η θέση τους στο μιγαδικό επίπεδο χαρακτηρίζουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Διευκρινίζεται ότι σε κάθε Βαθμό Ελευθερίας αντιστοιχεί ένα ζεύγος πόλων, το οποίο τοποθετείται στο μιγαδικό επίπεδο σύμφωνα με έναν από τους πέντε διαφορετικούς τρόπους που απεικονίζονται στο Σχήμα 1. Για παράδειγμα, ένα διβάθμιο δυναμικό σύστημα με υποκρίσιμη απόσβεση, διαθέτει δύο Βαθμούς Ελευθερίας, σε κάθε έναν από τους οποίους αντιστοιχεί ένα ζεύγος πόλων. Η, δε, θέση κάθε ζεύγους πόλων στο μιγαδικό επίπεδο αποτυπώνεται, ποιοτικά, στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Πόλοι διβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ με υποκρίσιμη απόσβεση

Στην περίπτωση, λοιπόν, πολυβάθμιων δυναμικών συστημάτων, η Συνάρτηση Μεταφοράς είναι μιγαδική. Εάν, δε, αντικαταστήσουμε στην εν λόγω Συνάρτηση Μεταφοράς τη μεταβλητή s του Μετασχηματισμού Laplace με την μιγαδική ποσότητα $j\Omega$, τότε προκύπτει:

$$\underline{H}\left(s\right) = \left(s^2\underline{M} + s\underline{C} + \underline{K}\right)^{-1} \xrightarrow{s\to j\Omega} \underline{H}\left(j\Omega\right) \tag{62}$$

Αποδεικνύεται (βλ. Παράρτημα ΣΤ) ότι η ποσότητα $\underline{H}(s) = \underline{H}(j\Omega)$ περιγράφει τον Πίνακα με τις Συναρτήσεις Μεταφοράς ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος (για την έννοια της Συνάρτησης Μεταφοράς, βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 10). Την ίδια έννοια συναντούμε και στη Θεωρία του Αυτομάτου Ελέγχου, στα λεγόμενα Διαγράμματα Bode, τα οποία εκφράζουν τις συναρτήσεις μόνιμης απόκρισης ενός δυναμικού συστήματος σε αρμονική διέγερση.

Περί της Συνάρτησης Μεταφοράς $H(s)$ σε μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα

Για μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα και για μηδενικές αρχικές συνθήκες, η Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$ ισούται με (βλ. Παράρτημα Α, Εξ.(Α.15)):

$$H(s) = \left(\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \right) \tag{63}$$

Η μεταβλητή s είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Θεωρώντας ότι η μεταβλητή s έχει μόνο φανταστικό μέρος (δηλαδή ότι $s = j\Omega$), τότε η Εξ.(63) γράφεται ως εξής:

$$H(j\Omega) = \left(\frac{\omega^2}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\omega j\Omega + \omega^2} \right) \xrightarrow{j^2=-1} H(j\Omega) = \left(\frac{\omega^2}{-\Omega^2 + 2\zeta\omega j\Omega + \omega^2} \right) \tag{64}$$

Στην Εκπαιδευτική Ενότητα 02 (βλ. Εξ.18), είχε ορισθεί ο λόγος q ως εξής:

$$q = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \tag{65}$$

Μετά από πράξεις και εισάγοντας την Εξ.(65) στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$H(j\Omega) = \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{1}{-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 + 2\zeta j \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + 1} \right) \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} H(j\Omega) = \left(\frac{1}{-q^2 + 2\zeta jq + 1} \right) \tag{66}$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(66) γράφεται ως εξής:

$$H(j\Omega) = \left(\frac{1}{(1-q^2) + (2\zeta q) j} \right) \tag{67}$$

Στην Εξ.(67) παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο παρονομαστής είναι μιγαδικός αριθμός. Σύμφωνα με τη Θεωρία των Μιγαδικών Αριθμών, μια πιο βολική γραφή της Εξ.(67) προκύπτει πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το δεξί μέλος της Εξ.(67) με τον συζυγή του μιγαδικού παρονομαστή:

$$H(j\Omega) = \left(\frac{1}{(1-q^2) + (2\zeta q) j} \right) \left(\frac{(1-q^2) - (2\zeta q) j}{(1-q^2) - (2\zeta q) j} \right) \tag{68}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(68), προκύπτει:

$$H(j\Omega)=\left(\frac{(1-q^2)-(2\zeta q)j}{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}\right)\Rightarrow H(j\Omega)=\underbrace{\left(\frac{(1-q^2)}{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}\right)}_{\mathrm{Re}(H(j\Omega))}+\underbrace{\left(\frac{(-2\zeta q)}{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}\right)}_{\mathrm{Im}(H(j\Omega))}j \quad (69)$$

Υπενθυμίζεται ότι το γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού επί τον συζυγή του ισούται με το μέτρο του εν λόγω μιγαδικού αριθμού. Στην Εξ.(69) αναγνωρίζουμε το πραγματικό (Re) και το φανταστικό (Im) μέρος της συνάρτησης $H(j\Omega)$. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, θα υπολογισθεί το μέτρο και η πολική γωνία της $H(j\Omega)$ (πολική γραφή). Ειδικότερα, ισχύει:

- Για το μέτρο $|H(j\Omega)|$:

$$|H(j\Omega)|=\sqrt{\left(\frac{(1-q^2)}{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}\right)^2+\left(\frac{(-2\zeta q)}{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(1-q^2)^2+(-2\zeta q)^2}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|H(j\Omega)|=\sqrt{\frac{\cancel{(1-q^2)^2+(-2\zeta q)^2}}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)^{\cancel{2}}}}\Rightarrow|H(j\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}} \quad (70)$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ.(70) εκφράζει το μέτρο της Συνάρτησης Μεταφοράς $|H(j\Omega)|$ και ισούται με τον Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος, όπως αυτός είχε ορισθεί στην Εκπαιδευτική Ενότητα 03/ Εξ.21.

- Για την πολική γωνία (διαφορά φάσης μεταξύ διέγερσης και απόκρισης):

$$\vartheta=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(H(j\Omega))}{\mathrm{Re}(H(j\Omega))}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{(-2\zeta q)}{\cancel{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}}\right)}{\left(\frac{(1-q^2)}{\cancel{(1-q^2)^2+(2\zeta q)^2}}\right)}\right)\Rightarrow\vartheta=\tan^{-1}\left(-\frac{2\zeta q}{(1-q^2)}\right) \quad (71)$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ.(71) εκφράζει την πολική γωνία της Συνάρτησης Μεταφοράς $|H(j\Omega)|$ και ισούται με τη διαφορά φάσης διέγερσης-αποκρίσεως του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος, όπως αυτή (η διαφορά φάσης) είχε ορισθεί στην Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.30.

Ειδικά για την περίπτωση μηδενικού λόγου απόσβεσης ($\zeta=0$), η Εξ.(63) γράφεται:

$$H(s)=\left(\frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\xrightarrow{\zeta=0}H(s)=\left(\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right) \tag{72}$$

Για την εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, το οποίο εμφανίζεται στον παρονομαστή της Εξ.(72), ισχύει:

$$s^2+2\zeta\omega s+\omega^2=0\xrightarrow{\zeta=0}s^2+\omega^2=0\Rightarrow s^2=-\omega^2\Rightarrow s=\pm j\omega \tag{73}$$

Οι πόλοι του συστήματος, σε αυτήν την περίπτωση και για απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκονται επί του άξονος των φανταστικών αριθμών (βλ. Σχήμα 1, περίπτωση (c)).

Περί της Συνάρτησης Μεταφοράς $\underline{H}(s)$ σε πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα

Σε ένα πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα, ισχύει (βλ. Παράρτημα Ε, Εξ.(Ε.9)):

$$\underline{M}\left(s^2\underset{\sim}{X}-s\underset{\sim}{x}_o-\dot{\underset{\sim}{x}}_o\right)+\underline{C}\left(s\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{x}_o\right)+\underline{K}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{f}(s) \tag{74}$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες ($\dot{\underset{\sim}{x}}_o=\underset{\sim}{x}_o=\underset{\sim}{0}$), η Εξ.(74) γράφεται ως εξής:

$$s^2\,\underline{M}\,\underset{\sim}{X}+s\,\underline{C}\,\underset{\sim}{X}+\underline{K}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{f}(s)\Rightarrow\left(s^2\,\underline{M}+s\,\underline{C}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{f}(s) \tag{75}$$

Με βάση την Εξ.(75), η απόκριση $\underset{\sim}{X}$ του συστήματος ισούται με:

$$\underset{\sim}{X}=\left[s^2\,\underline{M}+s\,\underline{C}+\underline{K}\right]^{-1}\underset{\sim}{f}(s) \tag{76}$$

Από την Εξ.(76) και με βάση την έννοια της Συνάρτησης Μεταφοράς (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 10), προκύπτει:

$$\underline{H}(s)=\left[s^2\,\underline{M}+s\,\underline{C}+\underline{K}\right]^{-1} \tag{77}$$

όπου $\underline{H}(s)$ είναι ένας πίνακας, κάθε στοιχείο $H_{ij}(s)$ του οποίου αποτελεί την αντίστοιχη Συνάρτηση Μεταφοράς. Στην περίπτωση αρμονικής διέγερσης, η μεταβλητή s έχει μόνο φανταστικό μέρος (δηλαδή $s=j\Omega$), οπότε η Εξ.(77) γράφεται ως εξής:

$$\underline{H}(j\Omega)=\left[-\Omega^2\,\underline{M}+j\Omega\,\underline{C}+\underline{K}\right]^{-1}\Rightarrow\underline{H}(j\Omega)=\left[\underbrace{\underline{K}-\Omega^2\,\underline{M}}_{\text{Re}}+j\underbrace{\Omega\,\underline{C}}_{\text{Im}}\right]^{-1} \tag{78}$$

Συνοψίζοντας, στην περίπτωση αρμονικής διέγερσης, υπολογίζοντας τον πίνακα $\underline{H}(s)$ και γνωρίζοντας την αρμονική διέγερση, μέσω της Εξ.(76) είναι δυνατόν να υπολογισθεί η απόκριση του συστήματος στο πεδίο συχνότητας. Στη συνέχεια, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, είναι δυνατόν να υπολογισθεί η απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Ένας τρόπος υπολογισμού του πίνακα $\underline{H}(s)=\underline{H}(j\Omega)$ παρουσιάζεται στο Παράρτημα ΣΤ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Μετασχηματισμός Laplace μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ σε αρμονική διέγερση και Συνάρτηση Μεταφοράς

Η εξίσωση ισορροπίας ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος σε αρμονική διέγερση είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03, Εξ.(8)):

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_o\cos(\Omega t) \tag{A.1}$$

όπου m είναι η μάζα του συστήματος, c είναι η σταθερά απόσβεσης, k είναι η σταθερά του ελατηρίου, x είναι η απόκριση του συστήματος, F_o είναι το πλάτος της διέγερσης και Ω είναι η συχνότητα του διεγέρτη. Διαιρώντας την Εξ.(Α.1) δια της μάζας m, προκύπτει:

$$\ddot{x}+\left(\frac{c}{m}\right)\dot{x}+\left(\frac{k}{m}\right)x=\left(\frac{F_o}{m}\right)\cos(\Omega t) \tag{A.2}$$

Από τον ορισμό του λόγου απόσβεσης ζ, προκύπτει:

$$\zeta=\frac{c}{c_{critical}}\xrightarrow{c_{critical}=2m\omega}\zeta=\frac{c}{2m\omega}\Rightarrow\left(\frac{c}{m}\right)=2\zeta\omega \tag{A.3}$$

Από την επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας του απλού αρμονικού ταλαντωτή, προκύπτει:

$$\omega^2=\left(\frac{k}{m}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{\omega^2}{k}\right) \tag{A.4}$$

Σχετικά με το πλάτος της δύναμης διέγερσης, ισχύει:

$$\left(\frac{F_o}{m}\right)=F_o\left(\frac{1}{m}\right)\xrightarrow{\text{Εξ.(Α.4)}}\left(\frac{F_o}{m}\right)=F_o\left(\frac{\omega^2}{k}\right)=\omega^2\underbrace{\left(\frac{F_o}{k}\right)}_{X_S}\Rightarrow\left(\frac{F_o}{m}\right)=\omega^2X_s \tag{A.5}$$

Στην Εξ.(Α.5) αναγνωρίζουμε τον όρο $X_S=(F_o/k)$ ως το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03, Εξ.(10)). Ο συνδυασμός των Εξ.(Α.2,Α.3,Α.4,Α.5) δίδει:

$$\ddot{x}+2\zeta\omega\dot{x}+\omega^2x=\omega^2X_S\cos(\Omega t) \tag{A.6}$$

Εφαρμόζοντας τον Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(Α.6), προκύπτει:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{x}+2\zeta\omega\dot{x}+\omega^2x\right\}=\mathcal{L}\left\{\omega^2X_S\cos(\Omega t)\right\}\Rightarrow\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\}+\mathcal{L}\left\{2\zeta\omega\dot{x}\right\}+\mathcal{L}\left\{\omega^2x\right\}=\mathcal{L}\left\{\omega^2X_S\cos(\Omega t)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\}+2\zeta\omega\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\}+\omega^2\mathcal{L}\left\{x\right\}=\omega^2X_S\,\mathcal{L}\left\{\cos(\Omega t)\right\} \tag{A.7}$$

Για τον υπολογισμό της Εξ.(Α.7), αρκεί να υπολογισθεί κάθε ένας όρος. Ειδικότερα, ισχύει:

- Για την πρώτη χρονική παράγωγο:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\}=sX-x_o \tag{A.8}$$

- Για τη δεύτερη χρονική παράγωγο, θεωρώντας την ως την πρώτη χρονική παράγωγο της ποσότητας $\dot{x}$ και εφαρμόζοντας την Εξ.(Α.8), προκύπτει:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} \xrightarrow[\text{Εξ.}(A.8)]{\chi=\dot{x}} \mathcal{L}\{\dot{\chi}\} = s\mathcal{L}\{\chi\} - \chi_o = s\mathcal{L}\{\dot{x}\} - \dot{x}_o = s\underbrace{\left(sX - x_o\right)}_{\mathcal{L}\{\dot{x}\}} - \dot{x}_o = s^2X - sx_o - \dot{x}_o \quad \text{(A.9)}$$

- Για τον συνημιτονικό όρο:

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(\Omega t\right)\right\} = \left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right) \quad \text{(A.10)}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Α.7,Α.8,Α.9,Α.10) δίδει:

$$s^2X - sx_o - \dot{x}_o + 2\zeta\omega\left(sX - x_o\right) + \omega^2 X = \omega^2 X_S\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right) \quad \text{(A.11)}$$

Η Εξ.(Α.11) γράφεται και ως εξής:

$$\left[s^2X - sx_o - \dot{x}_o\right] + 2\zeta\omega\left(sX - x_o\right) + \omega^2 X = \omega^2 X_S\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) \quad \text{(A.12)}$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες, η Εξ.(Α.12) γράφεται και ως εξής:

$$s^2X + 2\zeta\omega sX + \omega^2 X = \omega^2 X_S\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) \quad \text{(A.13)}$$

Επιλύοντας την Εξ.(Α.13) ως προς $X = X\left(s\right)$, προκύπτει:

$$X\left(s\right) = \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right)}_{H(s)}\underbrace{X_S\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)}_{F(s)} \quad \text{(A.14)}$$

Συνεπώς, με την εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace στην εξίσωση ισορροπίας ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ σε αρμονική διέγερση, προέκυψε η Εξ.(Α.14), η οποία περιγράφει την απόκριση του συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων.
Τέλος, στο αριστερό μέλος της Εξ.(Α.14) αναγνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος $X\left(s\right)$, ενώ στο δεξί μέλος της ίδιας εξίσωσης αναγνωρίζουμε μία αρμονική δύναμη διέγερσης $F\left(s\right)$ πλάτους X_S. Από τον ορισμό της Συνάρτησης Μεταφοράς (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 10, Εξ.(14)) και από την Εξ.(Α.14) προκύπτει:

$$H\left(s\right) = \left(\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right) \quad \text{(A.15)}$$

Η Εξ.(Α.15) περιγράφει τη Συνάρτηση Μεταφοράς ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Χρήσιμοι Αντίστροφοι Μετασχηματισμοί Laplace στη Δυναμική

Στο παρόν Παράρτημα θα εξετασθούν δύο Αντίστροφοι Μετασχηματισμοί Laplace, οι οποίοι είναι εξαιρετικά χρήσιμοι στη Δυναμική. Πρόκειται για τους μετασχηματισμούς:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\} \tag{B.1}$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\} \tag{B.2}$$

Για τον μετασχηματισμό της Εξ.(Β.1) ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\underbrace{s^2+2\zeta\omega s+(\zeta\omega)^2}_{(s+\zeta\omega)^2}-(\zeta\omega)^2+\omega^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\zeta\omega)^2+\omega^2-(\zeta\omega)^2}\right\} \tag{B.3}$$

Ωστόσο, ισχύει:

$$\omega^2-(\zeta\omega)^2=\omega^2\left(1-\zeta^2\right)=\omega^2\left(\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}\right)^2=\left(\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}\right)^2 \tag{B.4}$$

Στην Εξ.(Β.4) έχουμε υποθέσει ότι ισχύει:

$$1-\zeta^2\geq 0\Rightarrow 1\geq\zeta^2\Rightarrow 1\geq\zeta\geq -1 \tag{B.5}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Β.3, Β.4) δίδει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\zeta\omega)^2+\left(\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}\right)^2}\right\} \tag{B.6}$$

Θέτουμε:

$$a=\zeta\omega\quad\text{και}\quad b=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{B.7}$$

Εισάγοντας την Εξ.(Β.7) στην Εξ.(Β.6), προκύπτει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2+b^2}\right\}=\left(\frac{1}{b}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\} \tag{B.8}$$

Από Πίνακες Μετασχηματισμών Laplace, βρίσκουμε ότι ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=e^{-at}\sin\left(bt\right) \tag{B.9}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Β.7,Β.8, Β.9) δίδει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\left(\frac{1}{b}\right)e^{-at}\sin\left(bt\right)\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\left(\frac{1}{\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}t\right) \tag{B.10}$$

Ωστόσο, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02, Εξ.(16)):

$$\omega_n=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{B.11}$$

Υπενθυμίζεται ότι ως ω_n συμβολίζεται η συχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03, Πίνακα 2). Εισάγοντας την Εξ.(Β.9) στην Εξ.(Β.8), προκύπτει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega_n t\right),\quad \omega_n=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \tag{B.12}$$

Για τον μετασχηματισμό της Εξ.(Β.2) ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}\xrightarrow{\text{Εξ.}(B.6,B.7)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a-a}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a-a}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+a\right)}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\} \tag{B.13}$$

Από Πίνακες Μετασχηματισμών Laplace, βρίσκουμε ότι ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+a\right)}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=e^{-at}\cos\left(bt\right) \tag{B.14}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=\left(\frac{a}{b}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\} \tag{B.15}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Β.9, Β.15) δίδει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{\left(s+a\right)^2+b^2}\right\}=\left(\frac{a}{b}\right)e^{-at}\sin\left(bt\right) \tag{B.16}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Β.13, Β.14, Β.16) δίδει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=e^{-at}\cos\left(bt\right)-\left(\frac{a}{b}\right)e^{-at}\sin\left(bt\right)=e^{-at}\left(\cos\left(bt\right)-\left(\frac{a}{b}\right)\sin\left(bt\right)\right) \quad \text{(B.17)}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(Β.17) με τις Εξ.(Β.7), προκύπτει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right\}=e^{-\zeta\omega t}\left(\cos\left(\omega_n t\right)-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right),\quad \omega_n=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} \quad \text{(B.18)}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace στην απόκριση μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ υποκρίσιμης απόσβεσης και υπό αρμονική διέγερση

Με τη βοήθεια του Μετασχηματισμού Laplace, η απόκριση ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ υπό αρμονική διέγερση (μόνον) ισούται με (βλ. Εξ.(14) ή Εξ.(18)):

$$X(s)=\omega^2 X_s\left(\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right) \tag{Γ.1}$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, η απόκριση $X(s)$ γράφεται όπως φαίνεται στην Εξ.(19), η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας του κειμένου:

$$X(s)=\underbrace{\left(\frac{A_o s+A_1}{s^2+\Omega^2}\right)}_{1^{ος}\ όρος}+\underbrace{\left(\frac{B_o s+B_1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)}_{2^{ος}\ όρος} \tag{Γ.2}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(Γ.2), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A_o s+A_1}{s^2+\Omega^2}\right)+\left(\frac{B_o s+B_1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)=\left(\frac{(A_o s+A_1)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)+(B_o s+B_1)(s^2+\Omega^2)}{(s^2+\Omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}\right)=\\
&=\left(\frac{\left(A_o s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)+A_1(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)\right)+\left(B_o s(s^2+\Omega^2)+B_1(s^2+\Omega^2)\right)}{(s^2+\Omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}\right)=\\
&=\left(\frac{A_o s^3+2\zeta\omega A_o s^2+\omega^2 A_o s+A_1 s^2+2\zeta\omega A_1 s+A_1\omega^2+B_o s^3+B_o\Omega^2 s+B_1 s^2+B_1\Omega^2}{(s^2+\Omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}\right)=\\
&=\left(\frac{(A_o+B_o)s^3+(2\zeta\omega A_o+A_1+B_1)s^2+(\omega^2 A_o+2\zeta\omega A_1+B_o\Omega^2)s+(A_1\omega^2+B_1\Omega^2)}{(s^2+\Omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}\right)
\end{aligned} \tag{Γ.3}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των Εξ.(Γ.1, Γ.3), προκύπτει:

$$\left(\frac{\omega^2 X_s s}{(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)(s^2+\Omega^2)}\right)=\left(\frac{(A_o+B_o)s^3+(2\zeta\omega A_o+A_1+B_1)s^2+(\omega^2 A_o+2\zeta\omega A_1+B_o\Omega^2)s+(A_1\omega^2+B_1\Omega^2)}{(s^2+\Omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} A_o+B_o=0\\ 2\zeta\omega A_o+A_1+B_1=0\\ \omega^2 A_o+2\zeta\omega A_1+B_o\Omega^2=\omega^2 X_s\\ A_1\omega^2+B_1\Omega^2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} A_o+B_o=0\\ A_1+2\zeta\omega A_o+B_1=0\\ 2\zeta\omega A_1+\omega^2 A_o+B_o\Omega^2=\omega^2 X_s\\ A_1\omega^2+B_1\Omega^2=0\end{matrix}\right\} \tag{Γ.4}$$

Η Εξ.(Γ.4), σε μητρωϊκή μορφή, γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\zeta\omega & 1 & 0 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 & 0 & \Omega^2 \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_o \\ B_1 \\ B_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 X_s \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\Gamma.5)$$

Η ορίζουσα του συστήματος της Εξ.(Γ.5) ισούται με:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\zeta\omega & 1 & 0 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 & 0 & \Omega^2 \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2\zeta\omega & 0 & \Omega^2 \\ \omega^2 & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2\zeta\omega & 1 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(-\Omega^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & \Omega^2 \end{vmatrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 2\zeta\omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 \end{vmatrix} + \Omega^2 \begin{vmatrix} 1 & 2\zeta\omega \\ 2\zeta\omega & \omega^2 \end{vmatrix} \right) = \Omega^2\left(\Omega^2 - \omega^2\right) - \left(0 - \omega^4 + \Omega^2\left(\omega^2 - 4\zeta^2\omega^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \Omega^4 + \omega^4 - 2\Omega^2\omega^2 + 2\Omega^2\omega^2 2\zeta^2 = \omega^4\left(\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^4 + 1 - 2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 + \left(2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2\right) \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

$$D = \omega^4\left(q^4 + 1 - 2q^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right) = \omega^4\left(\underbrace{q^4 - 2q^2 + 1}_{\left(1-q^2\right)^2} + \left(2\zeta q\right)^2\right) \Rightarrow D = \omega^4\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right) \qquad (\Gamma.6)$$

Ο αριθμητικός συντελεστής A_1 ισούται με:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\zeta\omega & 1 & 0 \\ \omega^2 X_s & \omega^2 & 0 & \Omega^2 \\ 0 & 0 & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\omega^2 X_s \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2\zeta\omega & 1 & 0 \\ 0 & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\omega^2 X_s \begin{vmatrix} 2\zeta\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{2\zeta\omega^3\Omega^2 X_s}{D} \qquad (\Gamma.7)$$

Ο αριθμητικός συντελεστής A_o ισούται με:

$$A_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 X_s & 0 & \Omega^2 \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 X_s & 0 \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\left(\begin{vmatrix} \omega^2 X_s & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\zeta\omega & \omega^2 X_s \\ \omega^2 & 0 \end{vmatrix}\right)}{D} = -\frac{\omega^2\left(\Omega^2 - \omega^2\right)X_s}{D} \qquad (\Gamma.8)$$

Ο αριθμητικός συντελεστής B_o ισούται με:

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\zeta\omega & 0 & 0 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 & \omega^2 X_s & \Omega^2 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\omega^2 X_s \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2\zeta\omega & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\omega^2 X_s \omega^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\zeta\omega & 0 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{2\zeta\omega^5 X_s}{D} \qquad (\Gamma.9)$$

Ο αριθμητικός συντελεστής B_1 ισούται με:

$$B_o = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\zeta\omega & 1 & 0 \\ 2\zeta\omega & \omega^2 & 0 & \omega^2 X_s \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\omega^2 X_s \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\zeta\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \Omega^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\omega^2 X_s \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & \Omega^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\omega^2\left(\Omega^2 - \omega^2\right) X_s}{D} \quad (\Gamma.10)$$

Εισάγοντας την Εξ.(Γ.6) στις Εξ.(Γ.7, Γ.8, Γ.9, Γ.10), προκύπτει:

$$A_1 = \frac{2\zeta\omega^3\Omega^2 X_s}{D} = \frac{2\zeta\cancel{\omega^3}\Omega^2 X_s}{\cancel{\omega^4}\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} A_1 = \frac{2\zeta q\Omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \quad (\Gamma.11)$$

$$A_o = -\frac{\omega^2\left(\Omega^2-\omega^2\right) X_s}{D} = -\frac{\cancel{\omega^4}\left(\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 - 1\right) X_s}{\cancel{\omega^4}\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} A_o = \frac{\left(1-q^2\right) X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \quad (\Gamma.12)$$

$$B_1 = -\frac{2\zeta\omega^5 X_s}{D} = -\frac{\cancel{\omega^4}\, 2\zeta\omega X_s}{\cancel{\omega^4}\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \Rightarrow B_1 = \frac{-2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \quad (\Gamma.13)$$

$$B_o = \frac{\omega^2\left(\Omega^2-\omega^2\right) X_s}{D} = \frac{\cancel{\omega^4}\left(\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 - 1\right) X_s}{\cancel{\omega^4}\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} \Rightarrow B_o = \frac{\left(q^2-1\right) X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \quad (\Gamma.14)$$

Συνεπώς, έχουν πλέον προσδιορισθεί οι αριθμητικοί συντελεστές της Εξ.(Γ.2). Με αντικατάσταση των εν λόγω συντελεστών στην Εξ.(Γ.2), προκύπτει η απόκριση $X(s)$ του δυναμικού συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$X(s) = \underbrace{\left(\frac{\frac{\left(1-q^2\right) X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} s + \frac{2\zeta q\Omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}}{s^2 + \Omega^2}\right)}_{1^{o\varsigma}\ \acute{o}\rho o\varsigma} + \underbrace{\left(\frac{\frac{\left(q^2-1\right) X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} s - \frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right)}_{2^{o\varsigma}\ \acute{o}\rho o\varsigma} \quad (\Gamma.15)$$

Η αντίστροφη πορεία, δηλαδή εκκίνηση από την έκφραση της απόκρισης $X(s)$ στο πεδίο των συχνοτήτων και κατάληξη στην απόκριση $x(t)$ του δυναμικού συστήματος στο πεδίο του χρόνου, υλοποιείται εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Για την περίπτωση της Εξ.(Γ.15), ισχύει:

$$X(s) = \underbrace{\left(\frac{\left(\frac{\left(1-q^2\right) X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right) s + \left(\frac{2\zeta q\Omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)}{s^2 + \Omega^2}\right)}_{1^{o\varsigma}\ \acute{o}\rho o\varsigma} + \underbrace{\left(\frac{\left(\frac{\left(q^2-1\right) X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right) s - \left(\frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}\right)}_{2^{o\varsigma}\ \acute{o}\rho o\varsigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_s = \frac{\left(\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)s}{s^2+\Omega^2}+\frac{\left(\frac{2\zeta q\Omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)}{s^2+\Omega^2}+\frac{\left(\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}-\frac{\left(\frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right)+\frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\right)+$$

$$\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)-\frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right)+\frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)-\frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\left(\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right)\right\}}_{\beta\lambda.\text{Εξ.}(8)}+\frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\right)\right\}}_{\beta\lambda.\text{Εξ.}(7)}$$

$$\left.+\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\right\}}_{\beta\lambda.\text{Εξ.}(15)}-\frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)\right\}}_{\beta\lambda.\text{Εξ.}(16)}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=\underbrace{\left(\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\cos(\Omega t)+\left(\frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\sin(\Omega t)+}_{x_p(t)}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)e^{-\zeta\omega t}\left(\cos(\omega_n t)-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\right)-\left(\frac{2\zeta\omega X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t)}_{x_h(t)} \tag{Γ.16}$$

όπου $\omega_n=\omega\sqrt{1-\zeta^2}$ (βλ. Εξ.(15,16)) και $1\geq\zeta\geq-1$ (βλ. Εξ.(Β.5)). Ο όρος $x_p(t)$ αντιστοιχεί στη μόνιμη απόκριση, ενώ ο όρος $x_h(t)$ αντιστοιχεί στη μεταβατική απόκριση. Υπενθυμίζεται ότι η Εξ.(Γ.16) προέκυψε θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Οι όροι $x_p(t)$ και $x_h(t)$ είναι δυνατόν να γραφούν και με πιο συνοπτικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα:

- Για τον όρο $x_p(t)$ (μερική λύση ή απόκριση στη μόνιμη κατάσταση)

Αξιοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, ο όρος $x_p(t)$ της Εξ.(Γ.16) είναι δυνατόν να γραφεί ως:

$$x_p(t)=X\cos(\omega t-\vartheta) \tag{Γ.17}$$

Ειδικότερα, ισχύει:

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \vartheta) = X\left(\cos(\omega t)\cos(\vartheta) + \sin(\omega t)\sin(\vartheta)\right) = X\cos(\vartheta)\cos(\omega t) + X\sin(\vartheta)\sin(\omega t) \quad (\Gamma.18)$$

Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές:

$$A_s = X\cos(\vartheta) \quad \text{και} \quad B_s = X\sin(\vartheta) \quad (\Gamma.19)$$

Από την Εξ.(Γ.19), προκύπτει ότι:

$$A_s^{\,2} + B_s^{\,2} = \left(X\cos(\vartheta)\right)^2 + \left(X\sin(\vartheta)\right)^2 = X^2\left(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\right) = X^2 \Rightarrow X = \sqrt{A_s^2 + B_s^2} \quad (\Gamma.20)$$

Επίσης, διαιρώντας κατά μέλη τις Εξ.(Γ.19), προκύπτει:

$$\left(\frac{B_s}{A_s}\right) = \frac{X\sin(\vartheta)}{X\cos(\vartheta)} \Rightarrow \tan(\vartheta) = \left(\frac{B_s}{A_s}\right) \Rightarrow \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{B_s}{A_s}\right) \quad (\Gamma.21)$$

Με βάση τα παραπάνω, ο όρος $x_p(t)$ της Εξ.(Γ.16) είναι δυνατόν να γραφεί ως εξής:

$$x(t) = \underbrace{\left(\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)}_{A_s}\cos(\Omega t) + \underbrace{\left(\frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)}_{B_s}\sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = A_s\cos(\Omega t) + B_s\sin(\Omega t) \quad (\Gamma.22)$$

όπου

$$A_s = \frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \quad \text{και} \quad B_s = \frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)} \quad (\Gamma.23)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Γ.20, Γ.23) δίδει:

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta q X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{\frac{\left(1-q^2\right)^2 X_s^{\,2} + \left(2\zeta q\right)^2 X_s^{\,2}}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)^2}} = X_s\sqrt{\frac{\cancel{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}}{\left(\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2\right)^{\cancel{2}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = X_s\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}}\right) \quad (\Gamma.24)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το δεξί μέλος της Εξ.(Γ.24) με την ποσότητα ω^2, προκύπτει:

$$X = X_s\left(\frac{\omega^2}{\omega^2\sqrt{\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2}}\right) \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} X = \left(\frac{\omega^2 X_s}{\sqrt{\omega^4\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+\omega^4\left(2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right)^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \left(\frac{\omega^2 X_s}{\sqrt{\left(\omega^2\right)^2\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+\left(\omega^2\right)^2\left(2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right)^2}}\right) = \left(\frac{\omega^2 X_s}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\omega^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right)^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \left(\frac{\omega^2 X_s}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}}\right) \tag{Γ.25}$$

Υπενθυμίζεται ότι ως X_S συμβολίζεται το Στατικό Πλάτος της ταλάντωσης. Διαπιστώνουμε ότι η Εξ.(Γ.25) είναι ίδια με εκείνην, η οποία εμφανίζεται στον Πίνακα 3 της Εκπαιδευτικής Ενότητας 03 και χρησιμεύει για τον υπολογισμό του πλάτους ταλάντωσης X λόγω εξωτερικής αρμονικής διέγερσης.

Επίσης, ο συνδυασμός των Εξ.(Γ.21, Γ.23) δίδει:

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{B_s}{A_s}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{2\zeta q X_s}{\cancel{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}}\right)}{\left(\frac{\left(1-q^2\right)X_s}{\cancel{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta q}{\left(1-q^2\right)}\right) \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)}\right) \tag{Γ.26}$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το δεξί μέλος της Εξ.(Γ.26) επί την ποσότητα ω^2, προκύπτει:

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\omega^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)\omega^2}\right) \Rightarrow \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\Omega}{\left(\omega^2-\Omega^2\right)}\right) \tag{Γ.27}$$

Διαπιστώνουμε ότι η Εξ.(Γ.27) είναι ίδια με εκείνην, η οποία εμφανίζεται στον Πίνακα 3 της Εκπαιδευτικής Ενότητας 03 και χρησιμεύει για τον υπολογισμό της διαφοράς φάσης στη μόνιμη κατάσταση, μεταξύ της συχνότητας του διεγέρτη και της απόκρισης του συστήματος.

- Για τον όρο $x_h(t)$ (ομογενής λύση ή απόκριση στη μη-μόνιμη κατάσταση)

Αξιοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, ο όρος $x_h(t)$ της Εξ.(Γ.16) είναι δυνατόν να γραφεί ως:

$$x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega t+\varphi) \tag{Γ.28}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(Γ.28), προκύπτει:

$$x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega t+\varphi) = Ae^{-\zeta\omega t}\left(\sin(\omega t)\cos(\varphi)+\cos(\omega t)\sin(\varphi)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(\underbrace{A\cos(\varphi)}_{A_s}\sin(\omega t)+\underbrace{A\sin(\varphi)}_{B_s}\cos(\omega t)\right) \Rightarrow x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(A_s\sin(\omega t)+B_s\cos(\omega t)\right) \tag{Γ.29}$$

Κατ' αντιστοιχία με τις Εξ.(Γ.20, Γ.21), ισχύει:

$$A_s^{\,2}+B_s^{\,2} = \left(A\cos(\varphi)\right)^2+\left(A\sin(\varphi)\right)^2 = A^2\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right) = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_s^2+B_s^2} \tag{Γ.30}$$

$$\left(\frac{B_s}{A_s}\right) = \frac{A\sin(\varphi)}{A\cos(\varphi)} \Rightarrow \tan(\varphi) = \left(\frac{B_s}{A_s}\right) \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{B_s}{A_s}\right) \tag{Γ.31}$$

Επίσης, από την Εξ.(Γ.16), ισχύει:

$$x_h(t) = \left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)e^{-\zeta\omega t}\left(\cos(\omega_n t)-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\right)-\left(\frac{2\zeta\omega X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\cos(\omega_n t)-e^{-\zeta\omega t}\left(\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)+\left(\frac{2\zeta\omega X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right)\sin(\omega_n t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\cos(\omega_n t)-e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)+\left(\frac{2X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\right)\sin(\omega_n t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\cos(\omega_n t)-e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{(q^2-1+2)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\sin(\omega_n t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{(q^2-1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\cos(\omega_n t)-e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{(q^2+1)X_s}{\left((1-q^2)^2+(2\zeta q)^2\right)}\right)\sin(\omega_n t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_h\left(t\right)=e^{-\zeta\omega t}\left(\left(\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\cos\left(\omega_n t\right)+\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{-\left(q^2+1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right) \qquad (\Gamma.32)$$

Συγκρίνοντας μεταξύ τους τις Εξ.(Γ.29, Γ.32), προκύπτει:

$$A_s=\left(\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right) \text{ και } B_s=\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{-\left(q^2+1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right) \qquad (\Gamma.33)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Γ.30,Γ.33) δίδει:

$$A=\sqrt{\left(\frac{\left(q^2-1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)^2+\left(\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{-\left(q^2+1\right)X_s}{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}\right)\right)^2} \qquad (\Gamma.34)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Γ.30,Γ.31) δίδει:

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(\frac{-\left(q^2+1\right)\cancel{X_s}}{\cancel{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}}\right)}{\left(\frac{\left(q^2-1\right)\cancel{X_s}}{\cancel{\left(\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2\right)}}\right)}\right)\Rightarrow\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-\left(\frac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\left(q^2+1\right)}{\left(q^2-1\right)}\right) \qquad (\Gamma.35)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Αναλυτικός υπολογισμός της γωνίας στην πολική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ με υποκρίσιμη απόσβεση

Κατά τα γνωστά (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01), η εξίσωση ισορροπίας ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ είναι:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad (\Delta.1)$$

Εφαρμόζοντας τον Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(Β.1), προκύπτει:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left\{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx\right\}=\mathcal{L}\left\{0\right\}\Rightarrow\mathcal{L}\left\{m\ddot{x}\right\}+\mathcal{L}\left\{c\dot{x}\right\}+\mathcal{L}\left\{kx\right\}=\mathcal{L}\left\{0\right\}\Rightarrow\\&\Rightarrow m\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\}+c\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\}+k\mathcal{L}\left\{x\right\}=\mathcal{L}\left\{0\right\}\end{aligned} \qquad (\Delta.2)$$

Για τον υπολογισμό της Εξ.(Δ.2), αρκεί να υπολογισθεί κάθε ένας όρος. Ειδικότερα, ισχύει:

- Για την πρώτη χρονική παράγωγο:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\}=sX-x_o \qquad (\Delta.3)$$

- Για τη δεύτερη χρονική παράγωγο, θεωρώντας την ως την πρώτη χρονική παράγωγο της ποσότητας $\dot{x}$ και εφαρμόζοντας την Εξ.(Δ.3), προκύπτει:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\}\xrightarrow[\text{Εξ.}(B.3)]{\chi=\dot{x}}\mathcal{L}\left\{\dot{\chi}\right\}=s\mathcal{L}\left\{\chi\right\}-\chi_o=s\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\}-\dot{x}_o=s\underbrace{\left(sX-x_o\right)}_{\mathcal{L}\{\dot{x}\}}-\dot{x}_o=s^2X-sx_o-\dot{x}_o \qquad (\Delta.4)$$

- Για τον μηδενικό όρο, εξ ορισμού ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{0\right\}=0 \qquad (\Delta.5)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Δ.2,Β.3,Β.4,Β.5) δίδει:

$$m\left(s^2X-sx_o-\dot{x}_o\right)+c\left(sX-x_o\right)+kX=0 \qquad (\Delta.6)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες ($x_o=\dot{x}_o=0$), η Εξ.(Δ.6) δίδει:

$$ms^2X+csX+kX=0\Rightarrow\left(ms^2+cs+k\right)X=0 \qquad (\Delta.7)$$

Για να ισχύει η Εξ.(Δ.7) για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή για κάθε τιμή X , πρέπει να ισχύει:

$$\left(ms^2+cs+k\right)=0 \qquad (\Delta.8)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου στην Εξ.(Δ.8) ισούνται με:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m} \qquad (\Delta.9)$$

Στην περίπτωση όπου η διακρίνουσα X είναι αρνητική (υποκρίσιμη απόσβεση), ισχύει:

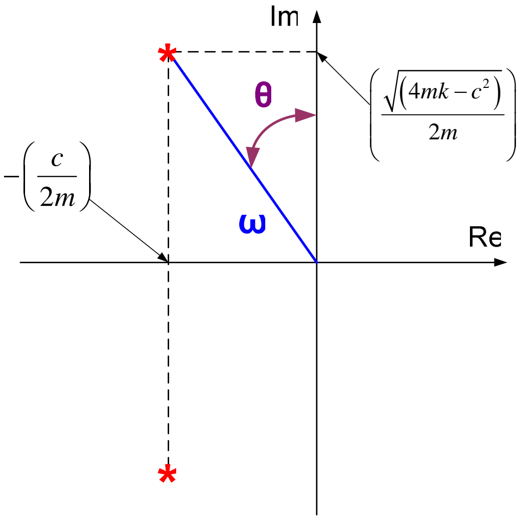
$$\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = c^2 - 4mk < 0 \Rightarrow \Delta = -\left(4mk - c^2\right) < 0 \xrightarrow{j^2=-1} \Delta = j^2\left(4mk - c^2\right) < 0 \quad (\Delta.10)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Δ.9, Β.10) δίδει:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-c \pm j\sqrt{\left(4mk - c^2\right)}}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \left(\frac{\sqrt{\left(4mk - c^2\right)}}{2m}\right) j \quad (\Delta.11)$$

Η Εξ.(Δ.11) περιγράφει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, με αρνητικό πραγματικό μέρος, οι οποίες απεικονίζονται, ως κόκκινοι αστερίσκοι, στο Σχήμα Δ.1.



Σχήμα Δ.1: Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m - c - k$ με υποκρίσιμη απόσβεση

Η εφαπτομένη της γωνίας θ ισούται με:

$$\tan\theta = \frac{-\left(\frac{c}{\cancel{2}m}\right)}{\left(\frac{\sqrt{\left(4mk - c^2\right)}}{\cancel{2}m}\right)} = -\frac{c}{\sqrt{4mk - c^2}} = -\frac{c}{\sqrt{4mk\left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)}} = -\frac{c}{\sqrt{4mk}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{\frac{c}{\sqrt{4mk}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)}} = -\frac{\left(\frac{c}{\sqrt{4mk}}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{c}{\sqrt{4mk}}\right)^2\right)}} \quad (\Delta.12)$$

Ωστόσο, ο λόγος απόσβεσης ζ ορίζεται ως ίσος με:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \xrightarrow{\omega^2 = \frac{k}{m}} \zeta = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{\sqrt{4\frac{m^2 k}{m}}} \Rightarrow \zeta = \frac{c}{\sqrt{4mk}} \quad (\Delta.13)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Δ.11, Β.12) δίδει:

$$\tan\theta = -\frac{\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}} \tag{Δ.14}$$

Από την Εξ.(Δ.13) προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Για γωνία $\theta = 0$, η αντίστοιχη εφαπτομένη έχει μηδενική τιμή, άρα ο αριθμητής του κλάσματος στο δεξί μέλος της Εξ.(Δ.13) πρέπει να είναι μηδενικός. Έπεται, λοιπόν, ότι ο αντίστοιχος λόγος απόσβεσης ζ ισούται με:

$$\zeta = 0 \tag{Δ.15}$$

- Για γωνία $\theta = 90^o$, η αντίστοιχη εφαπτομένη απειρίζεται, άρα ο παρονομαστής του κλάσματος στο δεξί μέλος της Εξ.(Δ.13) πρέπει να είναι μηδενικός. Έπεται, λοιπόν, ότι ο αντίστοιχος λόγος απόσβεσης ζ ισούται με:

$$1-\zeta^2 = 0 \Rightarrow \zeta^2 = 1 \xrightarrow{\varepsilon\xi\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}:\zeta\geq 0} \zeta = 1 \tag{Δ.16}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε: Μετασχηματισμός Laplace σε πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα

Από την Εξ.(49), προκύπτει:

$$\mathcal{L}\left\{\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}\right\}+\mathcal{L}\left\{\underline{C}\,\dot{\underset{\sim}{x}}\right\}+\mathcal{L}\left\{\underline{K}\,\underset{\sim}{x}\right\}=\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{F}\left(t\right)\right\}\Rightarrow\underline{M}\,\mathcal{L}\left\{\ddot{\underset{\sim}{x}}\right\}+\underline{C}\,\mathcal{L}\left\{\dot{\underset{\sim}{x}}\right\}+\underline{K}\,\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{x}\right\}=\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{F}\left(t\right)\right\} \quad \text{(E.1)}$$

Θα υπολογισθεί κάθε μετασχηματισμός Laplace στο αριστερό μέρος της Εξ.(Ε.1).

- Για τον όρο $\mathcal{L}\left\{\ddot{\underset{\sim}{x}}\right\}$

  Σύμφωνα με την Εξ.(Α.9), για τη βαθμωτή ποσότητα x ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\}=s^2X-sx_o-\dot{x}_o \quad \text{(E.2)}$$

  Συνεπώς, για τη διανυσματική ποσότητα $\underset{\sim}{x}$, η Εξ.(Ε.2) λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{\underset{\sim}{x}}\right\}=s^2\underset{\sim}{X}-s\underset{\sim}{x}_o-\dot{\underset{\sim}{x}}_o \quad \text{(E.3)}$$

- Για τον όρο $\mathcal{L}\left\{\dot{\underset{\sim}{x}}\right\}$

  Σύμφωνα με την Εξ.(Α.8), για τη βαθμωτή ποσότητα x ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\}=sX-x_o \quad \text{(E.4)}$$

  Συνεπώς, για τη διανυσματική ποσότητα $\underset{\sim}{x}$, η Εξ.(Ε.4) λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{\underset{\sim}{x}}\right\}=s\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{x}_o \quad \text{(E.5)}$$

- Για τον όρο $\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{x}\right\}$

  Εξ ορισμού, για τη βαθμωτή ποσότητα x ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{x\right\}=X \quad \text{(E.6)}$$

  Συνεπώς, για τη διανυσματική ποσότητα $\underset{\sim}{x}$, η Εξ.(Ε.6) λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{x}\right\}=\underset{\sim}{X} \quad \text{(E.7)}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Ε.1,Ε.3,Ε.5,Ε.7) δίδει:

$$\underline{M}\left(s^2\underset{\sim}{X}-s\underset{\sim}{x}_o-\dot{\underset{\sim}{x}}_o\right)+\underline{C}\left(s\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{x}_o\right)+\underline{K}\,\underset{\sim}{X}=\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{F}\left(t\right)\right\} \quad \text{(E.8)}$$

Εάν ορίσουμε $\mathcal{L}\left\{\underset{\sim}{F}\left(t\right)\right\}=\underset{\sim}{f}\left(s\right)$, τότε προκύπτει:

$$\underline{M}\left(s^2\underset{\sim}{X}-s\underset{\sim}{x}_o-\dot{\underset{\sim}{x}}_o\right)+\underline{C}\left(s\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{x}_o\right)+\underline{K}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{f}\left(s\right) \quad \text{(E.9)}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της Εξ.(Ε.9), προκύπτει:

$$\left(s^2\underline{M}+s\underline{C}+\underline{K}\right)\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{f}\left(s\right)+\underline{M}\left(s\underset{\sim}{x}_o+\dot{\underset{\sim}{x}}_o\right)+\underline{C}\left(\underset{\sim}{x}_o\right) \quad \text{(E.10)}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ: Συνάρτηση Μεταφοράς πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος

Ο τύπος του Euler για μιγαδικούς αριθμούς δίδεται από τη σχέση:

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta \xrightarrow{\vartheta=\omega t} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \qquad (\text{ΣΤ}.1)$$

Κατ' αντιστοιχία, ισχύει:

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t) \Rightarrow e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \qquad (\text{ΣΤ}.2)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις Εξ.(ΣΤ.1, ΣΤ.2), προκύπτει:

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) + \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \Rightarrow e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos(\omega t) \qquad (\text{ΣΤ}.3)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις Εξ.(ΣΤ.1, ΣΤ.2), προκύπτει:

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) - \big(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\big) \Rightarrow e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = -2j\sin(\omega t) \qquad (\text{ΣΤ}.4)$$

Έστω η ακόλουθη μιγαδική ποσότητα $\underset{\sim}{P}$:

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} \qquad (\text{ΣΤ}.5)$$

Η ποσότητα $\underset{\sim}{P}$ είναι ένα διάνυσμα, κάθε στοιχείο του οποίου ανήκει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Ως $\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}$ συμβολίζεται το πραγματικό μέρος του $\underset{\sim}{P}$, ενώ ως $\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}$ συμβολίζεται το φανταστικό μέρος του $\underset{\sim}{P}$. Από τον ορισμό του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού, έπεται ότι το συζυγές μιγαδικό διάνυσμα $\overline{\underset{\sim}{P}}$ ισούται με:

$$\overline{\underset{\sim}{P}} = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} - j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} \qquad (\text{ΣΤ}.6)$$

Αποδεικνύεται ότι η απόκριση $\underset{\sim}{x}(t)$ ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος σε ***περιοδική*** διέγερση, με τη βοήθεια του μιγαδικού διανύσματος $\underset{\sim}{P}$, γράφεται ως εξής:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}\, e^{(a+j\omega)t} + \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{(a+j\omega)t}} \qquad (\text{ΣΤ}.7)$$

Για την απόδειξη της Εξ.(ΣΤ.7), εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(ΣΤ.7), προκύπτει:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}\, e^{(a+j\omega)t} + \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{(a+j\omega)t}} \xrightarrow[\text{Εξ.(ΣΤ.6)}]{\text{Εξ.(ΣΤ.5)}} \underset{\sim}{x}(t) = \left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right) e^{(a+j\omega)t} + \overline{\left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right) e^{(a+j\omega)t}} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\overline{xy}=\bar{x}\,\bar{y}} \underset{\sim}{x}(t) = \left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right) e^{(a+j\omega)t} + \overline{\left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right)}\ \overline{e^{(a+j\omega)t}} = \left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right) e^{(a+j\omega)t} + \left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} - j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right) e^{(a-j\omega)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} e^{(a+j\omega)t} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} e^{(a+j\omega)t} + \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} e^{(a-j\omega)t} - j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} e^{(a-j\omega)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} e^{at} e^{j\omega t} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} e^{at} e^{j\omega t} + \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} e^{at} e^{-j\omega t} - j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} e^{at} e^{-j\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} e^{at}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} e^{at}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \qquad (\text{ΣΤ}.8)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(ΣΤ.3, ΣΤ.4, ΣΤ.8) δίδει:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} e^{at}\, 2\cos(\omega t) + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} e^{at}\, 2j\sin(\omega t) \Rightarrow \underset{\sim}{x}(t) = e^{at}\left(2\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\omega t) + j^2 2\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\omega t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}(t) = e^{at}\left(2\underset{\sim}{P}_{\mathrm{Re}}\cos(\omega t) - 2\underset{\sim}{P}_{\mathrm{Im}}\sin(\omega t)\right) \tag{ΣΤ.9}$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες μεταβλητές:

$$\underset{\sim}{P}_C = 2\underset{\sim}{P}_{\mathrm{Re}} \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{P}_S = -2\underset{\sim}{P}_{\mathrm{Im}} \tag{ΣΤ.10}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(ΣΤ.9, ΣΤ.10) δίδει:

$$\underset{\sim}{x}(t) = e^{at}\left(\underset{\sim}{P}_C\cos(\omega t) + \underset{\sim}{P}_S\sin(\omega t)\right) \tag{ΣΤ.11}$$

Η Εξ.(ΣΤ.11), για $a = 0$, λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \left(\underset{\sim}{P}_C\cos(\omega t) + \underset{\sim}{P}_S\sin(\omega t)\right) \tag{ΣΤ.12}$$

Ωστόσο, η Εξ.(ΣΤ.12) περιγράφει την απόκριση ενός πολυβάθμιου συστήματος υπό ***περιοδική*** διέγερση. Συνεπώς, και η Εξ.(ΣΤ.7), από την οποία προέρχεται η Εξ.(ΣΤ.12), θα εκφράζει την απόκριση ενός πολυβάθμιου συστήματος υπό ***περιοδική*** διέγερση. Άρα, ισχύει:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}e^{(a+j\omega)t} + \overline{\underset{\sim}{P}e^{(a+j\omega)t}} = e^{at}\left(\underset{\sim}{P}_C\cos(\omega t) + \underset{\sim}{P}_S\sin(\omega t)\right) \xrightarrow{a=0}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}e^{j\omega t} + \overline{\underset{\sim}{P}e^{j\omega t}} = \underset{\sim}{P}_C\cos(\omega t) + \underset{\sim}{P}_S\sin(\omega t) \tag{ΣΤ.13}$$

Συνεπώς, η απόκριση ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος υπό ***περιοδική*** διέγερση είναι δυνατόν να περιγραφεί από την Εξ.(ΣΤ.13). Στην περίπτωση ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος υπό ***αρμονική*** διέγερση, η απόκριση του συστήματος και πάλι περιγράφεται από την Εξ.(ΣΤ.13), αφού πρώτα αντικατασταθεί η συχνότητα ω με τη συχνότητα Ω της αρμονικής διέγερσης:

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{P}e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t}} = \underset{\sim}{P}_C\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{P}_S\sin(\Omega t) \tag{ΣΤ.14}$$

Ακριβώς με το ίδιο σκεπτικό, η αρμονική διέγερση ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος $\underset{\sim}{F}$ είναι δυνατόν να γραφεί ως εξής:

$$\Rightarrow \underset{\sim}{F}(t) = \underset{\sim}{f}e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{f}e^{j\Omega t}} = \underset{\sim}{f}_C\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{f}_S\sin(\Omega t) \tag{ΣΤ.15}$$

Σχετικά με τις χρονικές παραγώγους της Εξ.(ΣΤ.14):

- Για την πρώτη χρονική παράγωγο ισχύει:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t}}\right) \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t}\right) + \frac{d}{dt}\left(\overline{\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t}}\right) \tag{ΣΤ.16}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της Εξ.(ΣΤ.16) ισούται με:

$$\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t}\right) = \cancel{\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{P}\right)}\, e^{j\Omega t} + \underset{\sim}{P}\frac{d}{dt}\left(e^{j\Omega t}\right) = j\omega\underset{\sim}{P}e^{j\Omega t} \tag{ΣΤ.17}$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της Εξ.(ΣΤ.16) ισούται με:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\omega t}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{\underset{\sim}{P}}\ \overline{e^{j\Omega t}}\right) = \cancel{\frac{d}{dt}\left(\overline{\underset{\sim}{P}}\right)}\ \overline{e^{j\Omega t}} + \overline{\underset{\sim}{P}}\ \frac{d}{dt}\left(\overline{e^{j\Omega t}}\right) = \overline{\underset{\sim}{P}}\ \frac{d}{dt}\left(e^{-j\Omega t}\right) = \left(-j\omega\right)\overline{\underset{\sim}{P}}\ e^{-j\Omega t} = \left(-j\omega\right)\overline{\underset{\sim}{P}}\ \ \overline{e^{j\Omega t}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) = \left(-j\omega\right)\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}} \qquad (\text{ΣΤ}.18)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(ΣΤ.16, ΣΤ.17, ΣΤ.18) δίδει:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) = j\Omega\, \underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} - j\Omega\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}} \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) = j\Omega\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} - \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) \qquad (\text{ΣΤ}.19)$$

- Για τη δεύτερη πρώτη χρονική παράγωγο ισχύει:

$$\ddot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right)\right) \xrightarrow{\text{Εξ.(ΣΤ.18)}} \frac{d}{dt}\left(j\Omega\, \underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} - j\Omega\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) = j\Omega\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right) - j\Omega\frac{d}{dt}\left(\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) \qquad (\text{ΣΤ}.20)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(ΣΤ.17, ΣΤ.18, ΣΤ.20) δίδει:

$$\ddot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) = j\Omega\left(j\Omega\, \underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right) - j\Omega\left(\left(-j\Omega\right)\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) = j^2\Omega^2\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} + j^2\Omega^2\,\overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}} \xrightarrow{j^2=-1}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) = -\Omega^2\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) \qquad (\text{ΣΤ}.21)$$

Η εξίσωση ισορροπίας ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος (βλ. Εξ.(49) είναι:

$$\underline{M}\ \ddot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) + \underline{C}\ \dot{\underset{\sim}{x}}\left(t\right) + \underline{K}\ \underset{\sim}{x}\left(t\right) = \underset{\sim}{F} \qquad (\text{ΣΤ}.22)$$

Εισάγοντας τις Εξ.(ΣΤ.13, ΣΤ.15, ΣΤ.19, ΣΤ.21 στην Εξ.(ΣΤ.22), προκύπτει:

$$\underline{M}\left(-\Omega^2\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right)\right) + \underline{C}\left(j\Omega\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} - \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right)\right) + \underline{K}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}}\right) = \underset{\sim}{f}\, e^{j\Omega t} + \overline{\underset{\sim}{f}\, e^{j\Omega t}} \qquad (\text{ΣΤ}.23)$$

Ωστόσο, για έναν μιγαδικό αριθμό $z = a + jb$, ισχύουν τα εξής:

- Το άθροισμα ενός μιγαδικού αριθμού με τον αντίστοιχο συζυγή του, ισούται με το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού:

$$z + \overline{z} = \left(a + jb\right) + \overline{\left(a + jb\right)} = \left(a + jb\right) + \left(a - jb\right) = 2a \Rightarrow z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\left(z\right) \qquad (\text{ΣΤ}.24)$$

- Η διαφορά ενός μιγαδικού αριθμού από τον αντίστοιχο συζυγή του, ισούται με το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού:

$$z - \overline{z} = \left(a + jb\right) - \overline{\left(a + jb\right)} = \left(a + jb\right) - \left(a - jb\right) = -2\,jb \Rightarrow z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\left(z\right) \qquad (\text{ΣΤ}.25)$$

Η εφαρμογή των ανωτέρω ιδιοτήτων (βλ. Εξ.(ΣΤ.24,ΣΤ.25)) στην Εξ.(23) δίδει:

$$-\Omega^2\underline{M}\left(2\,\mathrm{Re}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right)\right) + j\Omega\underline{C}\left(2\,\mathrm{Im}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right)\right) + \underline{K}\left(2\,\mathrm{Re}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right)\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\underset{\sim}{f}\, e^{j\Omega t}\right) \qquad (\text{ΣΤ}.26)$$

Η ποσότητα $\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right)$ γράφεται και ως εξής:

$$\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right) = \left(\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\right)\left(\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)\right) = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\, j\sin(\Omega t) + j\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\, j\sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right) = \underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) + j^2\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\Omega t) + j\left(\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\sin(\Omega t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right) = \underbrace{\left[\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\Omega t)\right]}_{\text{Re}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right)} + j\underbrace{\left[\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\sin(\Omega t)\right]}_{\text{Im}\left(\underset{\sim}{P}\, e^{j\Omega t}\right)} \Rightarrow \qquad (\Sigma\text{T}.27)$$

Κατ' αντιστοιχία, ισχύει:

$$\left(\underset{\sim}{f}\, e^{j\Omega t}\right) = \underbrace{\left[\underset{\sim}{f}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underset{\sim}{f}_{\text{Im}}\sin(\Omega t)\right]}_{\text{Re}\left(\underset{\sim}{f}\, e^{j\Omega t}\right)} + j\underbrace{\left[\underset{\sim}{f}_{\text{Im}}\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{f}_{\text{Re}}\sin(\Omega t)\right]}_{\text{Im}\left(\underset{\sim}{f}\, e^{j\Omega t}\right)} \Rightarrow \qquad (\Sigma\text{T}.28)$$

Εισάγοντας τις Εξ.(ΣΤ.27, ΣΤ.28) στην Εξ.(ΣΤ.26), προκύπτει:

$$\begin{aligned} &-\omega^2\underline{M}\left(2\left[\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\Omega t)\right]\right) + j\Omega\underline{C}\left(2\left[\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\cos(\Omega t) + \underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\sin(\Omega t)\right]\right) + \\ &+ \underline{K}\left(2\left[\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\Omega t)\right]\right) = 2\left[\underset{\sim}{f}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underset{\sim}{f}_{\text{Im}}\sin(\Omega t)\right] \end{aligned} \qquad (\Sigma\text{T}.29)$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(ΣΤ.29), προκύπτει:

$$\begin{aligned} &-\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) + \Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\Omega t) + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\cos(\Omega t) + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\sin(\Omega t) + \\ &+ \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}}\sin(\Omega t) = \underset{\sim}{f}_{\text{Re}}\cos(\Omega t) - \underset{\sim}{f}_{\text{Im}}\sin(\Omega t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(-\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} - \underset{\sim}{f}_{\text{Re}}\right)\cos(\Omega t) + \left(\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} - \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + \underset{\sim}{f}_{\text{Im}}\right)\sin(\Omega t) = 0 \quad (\Sigma\text{T}.30)$$

Η Εξ.(ΣΤ.30) πρέπει να ισχύει για κάθε χρονική στιγμή t. Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές των χρονικών (τριγωνομετρικών) όρων στην Εξ.(ΣΤ.30) θα πρέπει να είναι μηδενικοί:

$$\begin{aligned} -\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} - \underset{\sim}{f}_{\text{Re}} &= 0 \\ \Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} - \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + \underset{\sim}{f}_{\text{Im}} &= 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma\text{T}.31)$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(ΣΤ.31) γράφεται και ως εξής:

$$\begin{aligned} -\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} + \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} &= \underset{\sim}{f}_{\text{Re}} \\ -\Omega^2\underline{M}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} - j\Omega\underline{C}\underset{\sim}{P}_{\text{Re}} + \underline{K}\underset{\sim}{P}_{\text{Im}} &= \underset{\sim}{f}_{\text{Im}} \end{aligned} \qquad (\Sigma\text{T}.32)$$

Η Εξ.(ΣΤ.32), σε μητρωϊκή γραφή, λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2\underline{M} + \underline{K} & j\Omega\underline{C} \\ -j\Omega\underline{C} & -\Omega^2\underline{M} + \underline{K} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}_{\text{Re}} \\ \underset{\sim}{P}_{\text{Im}} \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{P}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}_{\text{Re}} \\ \underset{\sim}{f}_{\text{Im}} \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{f}} \qquad (\Sigma\text{T}.33)$$

Στην Εξ.(ΣΤ.33) αναγνωρίζουμε ότι η μιγαδική ποσότητα $\underset{\sim}{f}$ αφορά στην αρμονική διέγερση του συστήματος (βλ. Εξ.(ΣΤ.16)), ενώ η μιγαδική ποσότητα $\underset{\sim}{P}$ αφορά στην αντίστοιχη απόκριση του δυναμικού συστήματος (βλ. Εξ.(ΣΤ.14)). Επιλύοντας την Εξ.(ΣΤ.33) ως προς $\underset{\sim}{P}$, προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}_{\mathrm{Re}} \\ \underset{\sim}{P}_{\mathrm{Im}} \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\Omega^2 \underline{M} + \underline{K} & j\Omega \underline{C} \\ -j\Omega \underline{C} & -\Omega^2 \underline{M} + \underline{K} \end{bmatrix}^{-1}}_{\underline{H}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}_{\mathrm{Re}} \\ \underset{\sim}{f}_{\mathrm{Im}} \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{f}} \qquad (\Sigma\text{T}.34)$$

Ο πίνακας $\underline{H}$ είναι ίδιος με εκείνον της Εξ.(11) στην Εκπαιδευτικής Ενότητας 10. Επίσης,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}_{\mathrm{Re}} \\ \underset{\sim}{P}_{\mathrm{Im}} \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 \underline{M} + \underline{K} & s\underline{C} \\ -s\underline{C} & s^2 \underline{M} + \underline{K} \end{bmatrix}^{-1}}_{\underline{H}(s)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}_{\mathrm{Re}} \\ \underset{\sim}{f}_{\mathrm{Im}} \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{f}} \qquad (\Sigma\text{T}.35)$$

Ο πίνακας $\underline{H}(s)$ εκφράζει τον Πίνακα των Συναρτήσεων Μεταφοράς ενός πολυβάθμιου δυναμικού συστήματος υπό αρμονική διέγερση και είναι εκείνος της Εξ.(62) και της Εξ.(77) της παρούσας Εκπαιδευτικής Ενότητας.