ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Copyright © ΕΜΠ - Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών - Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών - 2010. Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Εκπαιδευτική Ενότητα13η
Τετράεδρο κατάστασης - Εφαρμογή

Γενικά

Από προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, 07), προέκυψε ότι η Ενεργειακή Αρχή Lagrange αποτελεί ένα εξαιρετικά εύχρηστο εργαλείο, με τη χρήση του οποίου είναι δυνατή η κατασκευή μοντέλων δυναμικών συστημάτων, ενός ή και πολλών Βαθμών Ελευθερίας, με απώτερο σκοπό τον υπολογισμό της απόκρισης ενός δυναμικού συστήματος. Το επόμενο βήμα είναι η επέκταση της χρήσης της εν λόγω Αρχής, προκειμένου να είναι δυνατή η μοντελοποίηση σύνθετων τεχνολογικών κατασκευών, δηλαδή προκειμένου να είναι δυνατή, για αυτά τα συστήματα, η κατάστρωση της, γνωστής από τη Γραμμική Δυναμική, εξίσωσης:

$$\underline{M}\,\underset{\sim}{\ddot{x}} + \underline{C}\,\underset{\sim}{\dot{x}} + \underline{K}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \tag{1}$$

Γενικά, η Εξ.(1) είναι δυνατόν να προκύψει εφαρμόζοντας κάποια από τις, γνωστές από τη Μηχανική, Ενεργειακές Αρχές, όπως είναι η Ενεργειακή Αρχή των Δυνατών Έργων, η Ενεργειακή Αρχή Galerkin και η Ενεργειακή Αρχή Hamilton. Διευκρινίζεται ότι όλες οι Ενεργειακής Αρχές είναι μεταξύ τους ισοδύναμες, δεδομένου ότι αποτελούν διαφορετικές προσεγγίσεις της ίδιας βασικής ενεργειακής αρχής. Στον κλάδο της Δυναμικής, χρησιμοποιείται η Ενεργειακή Αρχή Lagrange διότι βολεύει ιδιαιτέρως, λόγω των μορφών της ενέργειας που εισάγει. Η μαθηματική έκφρασή της είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, 07):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}_i},\ i = 1, 2, ..., N \tag{2}$$

όπου q είναι κάθε μία από τις ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμός Ελευθερίας) του συστήματος, ως P_C συμβολίζεται η ενέργεια, η οποία διαχέεται λόγω της απόσβεσης του συστήματος, ως P_t συμβολίζεται η ισχύς που προσφέρεται στο σύστημα από τις εξωτερικές δυνάμεις και ως L συμβολίζεται η αποκαλούμενη ‘Ενεργειακή Μεταβλητή Lagrange’. Εξ ορισμού, ισχύει:

$$L = T - U \tag{3}$$

όπου ως T συμβολίζεται η κινητική ενέργεια του συστήματος, ενώ ως U συμβολίζεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος. Ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα της Ενεργειακής Αρχής Lagrange (το ίδιο πλεονέκτημα χαρακτηρίζει όλες τις ενεργειακές μορφές, απλά η Μέθοδος Lagrange είναι σημαντικά πιο εύχρηστη) είναι το γεγονός ότι μπορεί να ομαδοποιήσει τον διαφορετικό τρόπο μοντελοποίησης, διαφορετικής μορφής, ενεργειακών συστημάτων. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας την ίδια αρχή με την οποία μοντελοποιούνται τα γραμμικά μηχανικά συστήματα, είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί ένα στρεφόμενο μηχανικό σύστημα, ένα ηλεκτρικό σύστημα, ένα υδραυλικό σύστημα και, μέχρι ενός σημείου, ένα θερμικό σύστημα. Ισοδύναμα, προκειμένου να είναι εφικτή η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής

Lagrange σε οποιοδήποτε φυσικό σύστημα, αρκεί να αναγνωρισθεί, στο εκάστοτε εξεταζόμενο φυσικό σύστημα, ποιες φυσικές ποσότητες αντιστοιχούν στα μεγέθη T, U, P_C και P_t. Αυτό επιτυγχάνεται αξιοποιώντας την αποκαλούμενη ‘Θεωρία των Τετραέδρων Κατάστασης’, βασικά στοιχεία της οποίας παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

Βασικά στοιχεία Θεωρίας Τετραέδρων Κατάστασης

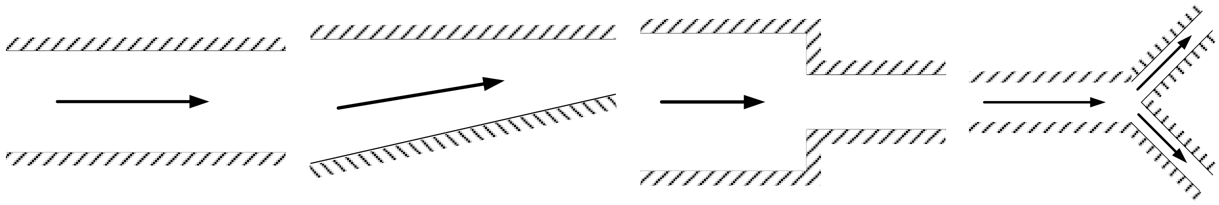
Όλα τα δυναμικά συστήματα χαρακτηρίζονται από τρεις τύπους παθητικών στοιχείων: το στοιχείο ελαστικότητας, το στοιχείο αδρανείας και το στοιχείο απόσβεσης.

Μέχρι στιγμής, έχουμε εξετάσει γραμμικά δυναμικά συστήματα. Μία άλλη κατηγορία συστημάτων είναι τα στροφικά δυναμικά συστήματα, στα οποία τα στροφικά ελατήρια αποτελούν τα στοιχεία ελαστικότητας (τυπική μορφή: σπειροειδές ελατήριο), ενώ οι στροφικοί αποσβεστήρες χαρακτηρίζονται από την σχετική περιστροφική κίνηση μεταξύ του εμβόλου και του τοιχώματος του αποσβεστήρα. Τυπικό στροφικό δυναμικό σύστημα αποτελεί ένας εύκαμπτος άξονας, ο οποίος υποβάλλεται σε στρέψη.

Μία άλλη κατηγορία συστημάτων είναι τα υδραυλικά/πνευματικά συστήματα. Ένα υδραυλικό σύστημα συμπεριφέρεται ως ένα τυπικό δυναμικό σύστημα. Αυτό γίνεται κατανοητό μέσα από την ανάλυση της λειτουργίας μίας απλής τρόμπας ποδηλάτου. Για την ακρίβεια, το εργαζόμενο μέσο στην τρόμπα ποδηλάτου είναι αέριο (ο ατμοσφαιρικός αέρας), οπότε η συγκεκριμένη τρόμπα αποτελεί ένα πνευματικό σύστημα. Ειδικότερα:

- Όταν, διατηρώντας κλειστή την οπή εξόδου του αέρα, πιέζουμε το έμβολο της τρόμπας, αυτό μετατοπίζεται, συμπιέζοντας τον αέρα στο θάλαμο της τρόμπας. Επειδή μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της εξωτερικά ασκούμενης δύναμης, παράγεται έργο, το οποίο προσδίδεται στο σύστημα τρόμπα-αέρας.
- Εάν, στη συνέχεια, αφήσουμε το έμβολο, τότε αυτό τείνει να επιστρέψει στην αρχική του θέση (τείνει να εκτελέσει κάποιας μορφής ταλάντωση). Αυτό σημαίνει ότι για την μετακίνηση (επαναφορά) του εμβόλου δαπανάται ενέργεια από το σύστημα τρόμπα-άερας, άρα έπεται ότι, από την προσδιδόμενη ενέργεια, έχει αποθηκευθεί, τουλάχιστον, ένα μέρος αυτής. Επίσης, η υποτυπώδης ταλάντωση, την οποία τείνει να εκτελέσει, παραπέμπει σε αδρανειακή συμπεριφορά, δηλαδή παραπέμπει στην εμφάνιση αδρανειακών φαινομένων.
- Επειδή το έμβολο δεν επιστρέφει εντελώς στην αρχική του θέση, έπεται ότι ένα μέρος από την ενέργεια, που αρχικά προσδόθηκε στο πνευματικό σύστημα, έχει καταστραφεί. Αυτό παραπέμπει στην εμφάνιση κάποιας μορφής απόσβεση.

Γενικεύοντας, σε ένα υδραυλικό (πνευματικό) σύστημα εμφανίζεται συμπεριφορά που αντιστοιχεί στους τρεις τύπους παθητικών στοιχείων ενός δυναμικού συστήματος: αποθήκευση ενέργειας, αδράνεια και καταστροφή ενέργειας. Άρα το υδραυλικό (πνευματικό) σύστημα είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται ως ένα τυπικό δυναμικό σύστημα. Η υδραυλική αντίσταση οφείλεται στη συνεκτικότητα του ρευστού και αφορά στους μηχανισμούς τριβής, οι οποίοι παρεμβάλλονται στην κίνηση ενός ρευστού μέσα από στερεά τοιχώματα. Κάτι τέτοιο παρατηρείται στη ροή ρευστού εντός σωλήνα με παράλληλα τοιχώματα (βλ. Σχήμα 1α), όπου αναπτύσσεται διάτμηση του ρευστού σε σχέση με τα τοιχώματα του σωλήνα, αναπτύσσεται τριβή, άρα σημειώνεται απώλεια ενέργειας (καταστροφή ενέργειας) της ροής ρευστού. Με άλλα λόγια, εμφανίζεται απόσβεση. Αντίστοιχο φαινόμενο απόσβεσης παρατηρείται και σε άλλες περιπτώσεις, όπως είναι οι στενώσεις (βλ. Σχήμα 1β), τα στοιχεία αλλαγής διαμέτρου (βλ. Σχήμα 1γ) και τα στοιχεία αλλαγής κατεύθυνσης ροής (γωνίες) (βλ. Σχήμα 1δ).



(α) (β) (γ) (δ)

Σχήμα 1: Στοιχεία απώλειας ενέργειας ρευστού: (α) παράλληλη ροή εντός σωλήνα, (β) στένωση, (γ) αλλαγή διαμέτρου και (δ) αλλαγή κατεύθυνσης ροή

Μία άλλη κατηγορία συστημάτων είναι τα ηλεκτρικά κυκλώματα, στα οποία η ενέργεια καταστρέφεται όταν διοχετεύεται σε ηλεκτρικές αντιστάσεις. Πάνω σε αυτήν την αρχή, στηρίζεται η λειτουργία της ηλεκτρικής απόσβεσης (ηλεκτρική πέδη), η οποία είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί σε έναν ηλεκτροκινητήρα. Πιο συγκεκριμένα, εάν αντιστραφεί η λειτουργία ενός ηλεκτροκινητήρα, τότε αυτός λειτουργεί ως γεννήτρια, η παραγόμενη ενέργεια της οποίας είναι δυνατόν να καταστραφεί εάν διοχετευθεί σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο με αντιστάσεις. Τυπική τεχνολογική εφαρμογή αυτής της αρχής, αποτελεί η ηλεκτρική πέδη στους ηλεκτροκινητήρες των γερανογεφυρών.

Τέλος, μία ακόμα κατηγορία συστημάτων είναι τα θερμικά συστήματα, τα οποία χαρακτηρίζονται από μία ιδιαιτερότητα: δεν διαθέτουν στοιχεία συσσώρευσης κινητικής ενέργειας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όλες οι εξισώσεις των θερμικών συστημάτων διαθέτουν παραγώγους πρώτης τάξεως. Αντιθέτως, τα δυναμικά συστήματα διαθέτουν παραγώγους δευτέρας τάξεως, οπότε διαθέτουν και στοιχεία αδρανείας.

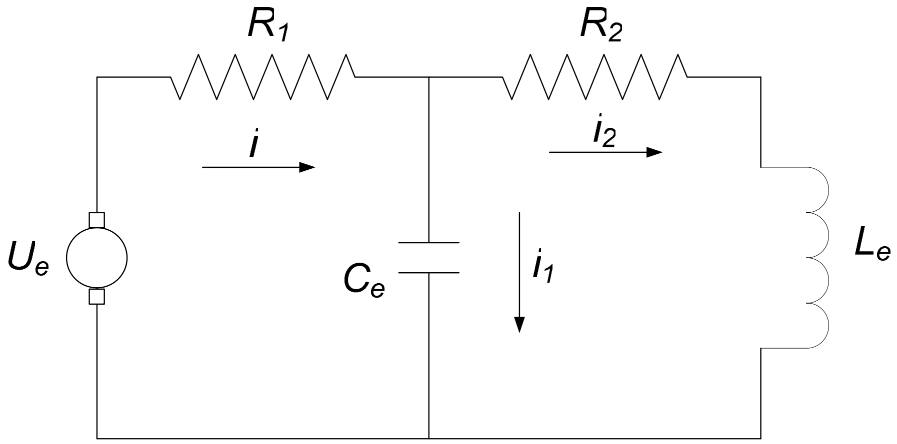
Η ισχύς, κατ' επέκταση και η ενέργεια, είναι μία φυσική ποσότητα, κοινή σε όλα τα συστήματα. Αυτός, άλλωστε, είναι και ο λόγος για τον οποίο, στους διάφορους υπολογισμούς, χρησιμοποιούνται οι ενεργειακές αρχές. Επειδή, δε, είναι κοινή σε όλα τα συστήματα, είναι δυνατόν να την προσθέτουμε. Ωστόσο, το ζεύγος των μεταβλητών, το οποίο ορίζει την ισχύ, είναι διαφορετικό από σύστημα σε σύστημα. Συνεπώς, για κάθε φυσικό σύστημα, πρέπει να βρεθούν εκείνες οι μεταβλητές, το γινόμενο των οποίων δίδει την ισχύ. Σε ένα μηχανικό σύστημα, η ισχύς ορίζεται ως το γινόμενο της ταχύτητας (στοιχείο ροής) επί τη δύναμη (στοιχείο σθένους). Επομένως, αντίστοιχος ορισμός είναι δυνατόν να διατυπωθεί και για κάθε άλλο σύστημα. Το μόνο που απαιτείται είναι η αναγνώριση των εκάστοτε στοιχείων ροής και σθένους. Όλοι οι σχετικοί ορισμοί παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Αντιστοιχία φυσικών συστημάτων

Σύστημα	Στοιχείο αδρανείας	Στοιχείο ελαστικότητας	Στοιχείο απόσβεσης	‘Ροή’	‘Σθένος’	Ισχύς
Γραμμικό δυναμικό σύστημα	m (μάζα)	k (μηχανικό ελατήριο)	c (γραμμικός αποσβεστήρας)	$\upsilon = \dot{x}$ (υ:ταχύτητα, x: μετατόπιση)	F (δύναμη)	$F\,\upsilon$
Στρεφόμενο δυναμικό σύστημα	I (ροπή αδρανείας)	k_φ (στροφικό ελατήριο)	c_φ (στροφικός αποσβεστήρας - απόσβεση στροφικών ταλαντώσεων)	$\omega = \dot{\varphi}$ (ω:γωνιακή ταχύτητα, φ:περιστροφή)	M (ροπή)	$M\,\dot{\varphi}$
Ηλεκτρικό κύκλωμα	L (αυτεπαγωγή)	$\frac{1}{C_e}$ (C_e: χωρητικότητα πυκνωτή)	R_e (ηλεκτρική αντίσταση)	$I = \dot{q}$ (I:ένταση ρεύματος, q:φορτίο)	U (διαφορά δυναμικού, τάση ρεύματος)	UI
Υδραυλικό σύστημα	I_ρ (αδράνεια ρευστού)	$\frac{1}{C_\rho}$ (C_ρ: προσδιορίζεται από τη συμπιεστότητα του ρευστού)	R_ρ (υδραυλική αντίσταση)	$Q = \dot{U}_P$ (Q:παροχή, U_P: μεταβολή όγκου ρευστού)	P (πίεση)	$Q\,P$
Θερμικό σύστημα	Δεν διαθέτει αδράνεια (δεν συσσωρεύει κινητική ενέργεια)	$\frac{1}{C_\vartheta}$ (C_ϑ: θερμοχωρητικότητα)	R_ϑ (θερμική αντίσταση)	Q_T: παροχή θερμότητας	T (θερμοκρασία)	$Q_T\,T$

Εφαρμογή

Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 1, στο οποίο επιβάλλεται μία εξωτερική τάση $U_e = U_e(t)$. Ζητείται η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος.



Σχήμα 2: Ηλεκτρικό κύκλωμα

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange, κατάλληλα διατυπωμένη (βλ. Πίνακα 1) για την περίπτωση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος. Πρώτα, υπολογίζονται οι ενεργειακοί όροι.

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος συσσωρεύεται στο στοιχείο αυτεπαγωγής L_e και ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} L_e i_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} L_e \dot{q}_2^2 \tag{4}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος συσσωρεύεται στον πυκνωτή χωρητικότητας C_e και ισούται με:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^2 \tag{5}$$

- Η ενέργεια P_C του συστήματος διαχέεται στις αντιστάσεις R_1, R_2 και ισούται με:

$$P_C = \frac{1}{2} R_1 i^2 + \frac{1}{2} R_2 i_2^2 \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2 \tag{6}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος προσφέρεται εξωτερικά από την πηγή U_e και ισούται με:

$$P_t = U_e i \tag{7}$$

Έχοντας καταγράψει τους ενεργειακούς όρους (βλ. Εξ.(4,5,6,7)), το επόμενο βήμα είναι ο εντοπισμός των Βαθμών Ελευθερίας του ηλεκτρικού συστήματος. Μπορούμε να εργασθούμε χρησιμοποιώντας είτε τα φορτία q, q_1, q_2 είτε τις εντάσεις ρεύματος i, i_1, i_2 (δηλαδή τις πρώτες χρονικές παραγώγους των φορτίων q, q_1, q_2). Αναζητούμε μία συστηματική σχέση μεταξύ των q_i (ή, ισοδύναμα, μεταξύ των i_i). Από τον πρώτο νόμο του Kirchhoff ισχύει:

$$i = i_1 + i_2 \tag{8}$$

Δεδομένου ότι σε μία εξίσωση (στην Εξ.(8)) εμφανίζονται τρεις μεταβλητές, έπεται ότι δύο από αυτές θα είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, από τις τρεις μεταβλητές i, i_1, i_2 πρέπει να επιλέξουμε δύο ως ανεξάρτητες μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) του συστήματος. Το κριτήριο για την επιλογή σχετίζεται αποκλειστικά και μόνον με την ευκολία εκτέλεσης των αριθμητικών υπολογισμών. Επιλέγουμε ως ανεξάρτητες μεταβλητές τα μεγέθη i_1, i_2. Αντικαθιστώντας την εξαρτημένη μεταβλητή i στις Εξ.(4,5,6,7), προκύπτει:

- Η ενέργεια P_C του συστήματος, η οποία διαχέεται στις αντιστάσεις R_1, R_2, γράφεται:

$$P_C = \frac{1}{2} R_1 \left(i_1 + i_2\right)^2 + \frac{1}{2} R_2 i_2^2 \tag{9}$$

- Η ισχύς P_t του συστήματος, η οποία προσφέρεται εξωτερικά από την πηγή U_e, γράφεται:

$$P_t = U_e \left(i_1 + i_2\right) \tag{10}$$

Βάσει των Εξ.(4,5), η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος ισούται με:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}\right) L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^{\,2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^{\,2}\right) \tag{11}$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην ανάγνωση των εξισώσεων, διότι εμφανίζεται σύμπτωση συμβόλων. Πιο συγκεκριμένα, η Εξ.(2) αναφέρεται στη μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, η οποία επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}_i},\ i = 1, 2, ..., N \tag{12}$$

Με το σύμβολο q δηλώνεται κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές (Βαθμός Ελευθερίας) του συστήματος και με το σύμβολο $\dot{q}$ δηλώνεται η αντίστοιχη πρώτη χρονική παράγωγος. Στην περίπτωση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, όπως στην εξεταζόμενη περίπτωση, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο και αυτό συμβολίζεται ως q (σύμπτωση συμβολισμού). Η, δε, ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος ισούται με .

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \tag{13}$$

Συνεπώς, η Ενεργειακή Αρχή Lagrange στην περίπτωση ηλεκτρικού κυκλώματος γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial i}=\frac{\partial P_t}{\partial i} \tag{14}$$

όπου ως i συμβολίζεται η ένταση του ρεύματος και ως q συμβολίζεται το ηλεκτρικό φορτίο. Ενδεικτικά, η Εξ.(14) γράφεται:

- για τον πρώτο Βαθμό Ελευθερίας:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}+\frac{\partial P_C}{\partial i_1}=\frac{\partial P_t}{\partial i_1} \tag{15}$$

- για τον δεύτερο Βαθμό Ελευθερίας:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}+\frac{\partial P_C}{\partial i_2}=\frac{\partial P_t}{\partial i_2} \tag{16}$$

Συνεπώς, σχετικά με τη γραφή της Εξ.(2) για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας) $q=q_1$, ισχύει (παρατίθενται τα τελικά αποτελέσματα, ενώ, για αναλυτικό υπολογισμό των επί μέρους όρων, βλ. Παράρτημα Α):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}_1=i_1]{q=q_1}\frac{\partial L}{\partial i_1}=\frac{\partial(T-U)}{\partial i_1}=\frac{\partial}{\partial i_1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2-\left(\frac{1}{C_e}\right)q_1^{\,2}\right)\right\}\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial i_1}=0 \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_1}\right)=\frac{d}{dt}(0)=0 \tag{18}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q}\xrightarrow{q=q_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=-\frac{\partial(T-U)}{\partial q_1}=-\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2-\left(\frac{1}{C_e}\right)q_1^{\,2}\right)\right\}\Rightarrow-\frac{\partial L}{\partial q_1}=\left(\frac{q_1}{C_e}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}_1=i_1]{q=q_1}\frac{\partial P_C}{\partial i_1}=\frac{\partial}{\partial i_1}\left\{\frac{1}{2}R_1\left(i_1+i_2\right)^2+\frac{1}{2}R_2 i_2^2\right\}\Rightarrow\frac{\partial P_C}{\partial i_1}=R_1\left(i_1+i_2\right) \tag{20}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}_1=i_1]{q=q_1}\frac{\partial P_t}{\partial i_1}=\frac{\partial}{\partial i_1}\left\{U_e\left(i_1+i_2\right)\right\}\Rightarrow\frac{\partial P_t}{\partial i_1}=U_e \tag{21}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(18,19,20,21) στην Εξ.(2), προκύπτει:

$$0+\left(\frac{q_1}{C_e}\right)+R_1\left(i_1+i_2\right)=U_e\Rightarrow\left(\frac{q_1}{C_e}\right)+R_1\left(i_1+i_2\right)=U_e \tag{22}$$

Η Εξ.(22) εκφράζει το δεύτερο νόμο του Kirchhoff (νόμος πτώσης τάσης) στον βρόχο $U_e-R_1-C_e$. Κατ' αντιστοιχία, σχετικά με τη γραφή της Εξ.(2) για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας) $q=q_2$, ισχύει (πάλι, παρατίθενται μόνο τα τελικά αποτελέσματα, ενώ, ο αναλυτικός υπολογισμός των επί μέρους όρων παρατίθεται στο Παράρτημα Β):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_2=i_2]{q=q_2} \frac{\partial L}{\partial i_2} = \frac{\partial \left(T-U\right)}{\partial i_2} = \frac{\partial}{\partial i_2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right)q_1^{\,2}\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial i_2} = L_e i_2 \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_e i_2\right) = L_e \frac{d}{dt}\left(i_2\right) = L_e \frac{d}{dt}\left(\frac{dq_2}{dt}\right) = L_e \ddot{q}_2 \tag{24}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=q_2} -\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial \left(T-U\right)}{\partial q_2} = -\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right)q_1^{\,2}\right)\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_2=i_2]{q=q_2} \frac{\partial P_C}{\partial i_2} = \frac{\partial}{\partial i_2}\left\{\frac{1}{2}R_1\left(i_1+i_2\right)^2 + \frac{1}{2}R_2 i_2^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial i_2} = R_1\left(i_1+i_2\right) + R_2 i_2 = R_1\, i_1 + \left(R_1+R_2\right)i_2 \tag{26}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_2=i_2]{q=q_2} \frac{\partial P_t}{\partial i_2} = \frac{\partial}{\partial i_2}\left\{U_e\left(i_1+i_2\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial i_2} = U_e \tag{27}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(24,25,26,27) στην Εξ.(2), προκύπτει:

$$L_e\ddot{q}_2 + 0 + R_1\, i_1 + \left(R_1+R_2\right)i_2 = U_e \Rightarrow L_e\ddot{q}_2 + R_1\, i_1 + \left(R_1+R_2\right)i_2 = U_e \tag{28}$$

Η Εξ.(28) εκφράζει το δεύτερο νόμο του Kirchhoff (νόμος πτώσης τάσης) στο βρόχο $R_2 - L_e - C_2$. Χρησιμοποιώντας μητρωϊκή γραφή, οι Εξ.(22,28) γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & R_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(1/C_e\right) & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = U_e \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & L_e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & R_1+R_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = U_e \tag{30}$$

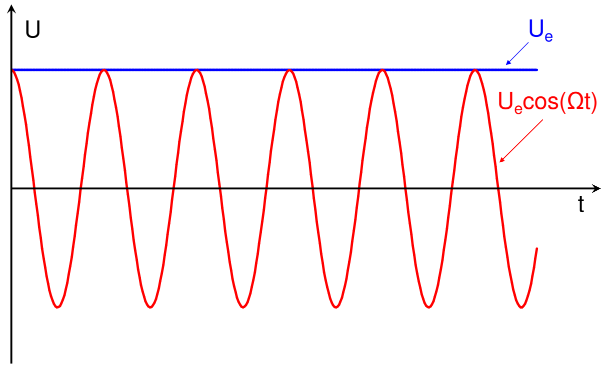
Γράφοντας μαζί τις Εξ.(29,30), προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{\ddot{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1+R_2 \end{bmatrix}}_{\underline{C}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{\dot{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \left(1/C_e\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{K}}\underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} U_e \\ U_e \end{Bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}} \tag{31}$$

Η Εξ.(31) αποτελεί την εξίσωση ισορροπίας του ηλεκτρικού κυκλώματος του Σχήματος 2. Προκύπτει, λοιπόν, ότι η συμπεριφορά του ηλεκτρικού κυκλώματος περιγράφεται από την εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά ενός μηχανικού δυναμικού συστήματος. Συνεπώς, η επίλυση οποιουδήποτε ηλεκτρικού κυκλώματος είναι δυνατόν να επιτευχθεί με τις μεθόδους επίλυσης, τις οποίες γνωρίσαμε στο πλαίσιο της μελέτης μηχανικών δυναμικών συστημάτων.

Παρατηρήσεις

- Στην Εξ.(6), δηλαδή στον ενεργειακό όρο της διάχυσης ισχύος, εμφανίζεται το κλάσμα $(1/2)$. Αυτό προκύπτει από την ολοκλήρωση της αντίστοιχης καμπύλης $F-\dot{x}$, την οποία θεωρούμε ως γραμμική (στο πλαίσιο του μαθήματος 'Δυναμική Μηχανών Ι' δεν θα εξετάσουμε συστήματα με μη-γραμμικά χαρακτηριστικά).
- Στο εξεταζόμενο ηλεκτρικό κύκλωμα είναι δυνατόν να επιβληθεί είτε σταθερή τάση είτε εναλλασσόμενη τάση (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Συνεχής (μπλε γραμμή) και εναλλασσόμενη (κόκκινη γραμμή) τάση

Στην περίπτωση επιβολής σταθερής τάσης, θεωρώντας ότι $U_e\left(t\le 0^-\right)=0$, έπεται ότι επιβάλλεται στο σύστημα μία βηματική διέγερση, συνεπώς το σύστημα θα πραγματοποιήσει φθίνουσα ταλάντωση, με πλάτος ταλάντωσης (στη χειρότερη περίπτωση) το διπλάσιο του ονομαστικού. Η εμφάνιση μεταβατικών φαινομένων σε ηλεκτρικά κυκλώματα λόγω επιβολής βηματικής διέγερσης, όπως συμβαίνει όταν ανοίγει ή κλείνει απότομα ένας διακόπτης, είναι πιο έντονη σε κυκλώματα με στοιχεία αυτεπαγωγής (πηνία). Χαρακτηριστικά ηλεκτρικά κυκλώματα τέτοιου τύπου είναι οι λάμπες φθορισμού, τα ρελέ προστασίας, οι ηλεκτροκινητήρες και οι μετασχηματιστές. Επομένως, όποια είναι η δράση μίας μάζας σε ένα μηχανικό σύστημα, αντίστοιχη είναι η δράση ενός πηνίου σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Στην περίπτωση επιβολής εναλλασσόμενης τάσης, απλώς αλλάζει το διάνυσμα της διεγείρουσας δύναμης:

$$\underset{\sim}{U}_e=\begin{bmatrix}\bar{U}_e\\ \bar{U}_e\end{bmatrix}\cos\left(\Omega t\right) \tag{32}$$

όπου Ω είναι η συχνότητα του δικτύου. Για την επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος σε αυτήν την περίπτωση, είναι δυνατή η εφαρμογή των τεχνικών (π.χ. Συνάρτηση Μεταφοράς), τις οποίες γνωρίσαμε στο πλαίσιο της μελέτης μηχανικών δυναμικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτικός υπολογισμός όρων της εξίσωσης της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = q_1$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_1 = i_1]{q=q_1} \frac{\partial L}{\partial i_1} = \frac{\partial (T-U)}{\partial i_1} = \frac{\partial}{\partial i_1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^{\,2}\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial i_1} = 0 \tag{A.1}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(Α.1) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_1}\right) = \frac{d}{dt}(0) = 0 \tag{A.2}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=q_1} -\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial q_1} = -\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^{\,2}\right)\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q_1} = \left(\frac{q_1}{C_e}\right) \tag{A.3}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_1 = i_1]{q=q_1} \frac{\partial P_C}{\partial i_1} = \frac{\partial}{\partial i_1}\left\{\frac{1}{2} R_1 \left(i_1 + i_2\right)^2 + \frac{1}{2} R_2 i_2^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial i_1} = R_1\left(i_1 + i_2\right) \tag{A.4}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_1 = i_1]{q=q_1} \frac{\partial P_t}{\partial i_1} = \frac{\partial}{\partial i_1}\left\{U_e\left(i_1 + i_2\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial i_1} = U_e \tag{A.5}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Αναλυτικός υπολογισμός όρων της εξίσωσης της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = q_2$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_2 = i_2]{q=q_2} \frac{\partial L}{\partial i_2} = \frac{\partial (T-U)}{\partial i_2} = \frac{\partial}{\partial i_2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^{\,2}\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial i_2} = L_e i_2 \tag{B.1}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(Β.1) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_e i_2\right) = L_e \frac{d}{dt}\left(i_2\right) = L_e \frac{d}{dt}\left(\frac{dq_2}{dt}\right) = L_e \ddot{q}_2 \tag{B.2}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=q_2} -\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial q_2} = -\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_e i_2^2 - \left(\frac{1}{C_e}\right) q_1^{\,2}\right)\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \tag{B.3}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_2 = i_2]{q=q_2} \frac{\partial P_C}{\partial i_2} = \frac{\partial}{\partial i_2}\left\{\frac{1}{2} R_1 \left(i_1 + i_2\right)^2 + \frac{1}{2} R_2 i_2^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial i_2} = R_1\left(i_1 + i_2\right) + R_2 i_2 = R_1 i_1 + \left(R_1 + R_2\right) i_2 \tag{B.4}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}_2 = i_2]{q=q_2} \frac{\partial P_t}{\partial i_2} = \frac{\partial}{\partial i_2}\left\{U_e\left(i_1 + i_2\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial i_2} = U_e \tag{B.5}$$