

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

**Copyright © ΕΜΠ - Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών - Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών - 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.**

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Εκπαιδευτική Ενότητα 14^η Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων με την Ενεργειακή Αρχή Lagrange – Εφαρμογή

Γενικά

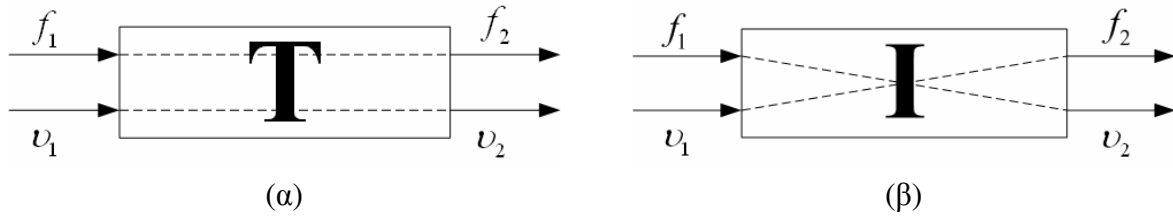
Σε προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01 & 07), παρουσιάστηκε η χρήση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange στη μοντελοποίηση *μηχανικών* δυναμικών συστημάτων. Ειδικότερα, στην περίπτωση ενός *μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος* διαπιστώσαμε ότι η έννοια της ενέργειας, λόγω της τετραγωνικής της μορφής, αποτελεί ένα εξαιρετικά απλό, στη χρήση, εργαλείο, με το οποίο, γρήγορα και εύκολα, καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης του συστήματος. Στη συνέχεια, είδαμε ότι σε ένα *πολυβάθμιο μηχανικό σύστημα*, η χρήση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι εξίσου απλή και εύκολη, διότι, η ενέργεια, ως βαθμωτό μέγεθος, χαρακτηρίζεται από την προσθετική ιδιότητα, συνεπώς η αντιμετώπιση ενός πολυβάθμιου μηχανικού συστήματος ανάγεται σε απλή άθροιση ομοίων ενεργειακών όρων. Στη συνέχεια (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 13), είδαμε ότι *η χρήση της εν λόγω ενεργειακής αρχής* δεν περιορίζεται μόνον στα μηχανικά δυναμικά συστήματα, αλλά *είναι εφαρμόσιμη σε κάθε είδος δυναμικού συστήματος* (π.χ. ηλεκτρικό, υδραυλικό, θερμικό, κοκ).

Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα θα γνωρίσουμε τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε την *Ενεργειακή Αρχή Lagrange στη μοντελοποίηση σύνθετων* (ή, ισοδύναμα, *συζευγμένων*) *δυναμικών συστημάτων*, δηλαδή δυναμικών συστημάτων τα οποία περιλαμβάνουν υποσυστήματα διαφορετικής φύσης. Για παράδειγμα, ένα ρευστομηχανικό σύστημα αποτελείται από (τουλάχιστον) ένα υδραυλικό και ένα μηχανικό υποσύστημα, ενώ ένα ηλεκτρομηχανικό σύστημα αποτελείται από (τουλάχιστον) ένα ηλεκτρικό και ένα μηχανικό υποσύστημα. Είναι προφανές ότι στη σχεδίαση ενός σύνθετου συστήματος δεν υπάρχει περιορισμός ούτε ως προς το πλήθος των υποσυστημάτων ούτε ως προς τη φύση των υποσυστημάτων, τα οποία είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν. Συνεπώς, η διατύπωση ενός συστηματικού τρόπου για την κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης ενός σύνθετου συστήματος είναι εξαιρετικής σημασίας για την περαιτέρω ανάλυση του συστήματος και τον υπολογισμό της απόκρισής του. Βασικό στοιχείο στη διαμόρφωση αυτού του συστηματικού τρόπου αποτελεί η σύζευξη μεταξύ δύο, διαφορετικής φύσεως, υποσυστημάτων. Η σύζευξη αυτή επιτυγχάνεται διότι τα υποσυστήματα διαθέτουν συγκεκριμένα τεχνολογικά στοιχεία, τα οποία καλούνται μετασχηματιστές, μέσω των οποίων επιτρέπεται η ανταλλαγή ενέργειας (και ειδικότερα ισχύος) μεταξύ των υποσυστημάτων.

Μετασχηματιστές (Ενισχυτές και αναστροφείς)

Οι μετασχηματιστές διακρίνονται σε ενισχυτές και αναστροφείς. Ένας τυπικός ενισχυτής απεικονίζεται στο Σχήμα 1α. Η αριστερή πλευρά του ενισχυτή θεωρείται ως η είσοδος του ενισχυτή και σε αυτήν σημειώνεται ένα ζεύγος μεταβλητών ισχύος (F_1, u_1) , οι οποίες ονομάζονται μεταβλητές ισχύος εισόδου. Κατ' αντιστοιχία, η δεξιά πλευρά του ενισχυτή

θεωρείται ως η έξοδος του ενισχυτή και σε αυτήν σημειώνεται πάλι ένα ζεύγος μεταβλητών ισχύος (F_2, v_2) , οι οποίες ονομάζονται μεταβλητές ισχύος εξόδου.



Σχήμα 1: Μετασχηματιστές: (α) ενισχυτής και (β) αναστροφέας

Επειδή η ισχύς διατηρείται, έπεται ότι ισχύει:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 = P \quad (1)$$

Σε ένα μηχανικό σύστημα, τα σύμβολα F_1 και F_2 , εκφράζουν δύναμη. Πιο γενικά όπως είδαμε στην Εκπαιδευτική Ενότητα 13, τα σύμβολα αυτά αντιστοιχούν σε ‘σθένος’. Επίσης, σε ένα μηχανικό σύστημα, τα σύμβολα v_1 και v_2 εκφράζουν ταχύτητα, ενώ, γενικότερα, εκφράζουν ‘ροή’. Σε έναν ενισχυτή, μεταξύ των ‘σθενών’ F_1 και F_2 , ισχύει:

$$F_2 = T F_1 \quad (2)$$

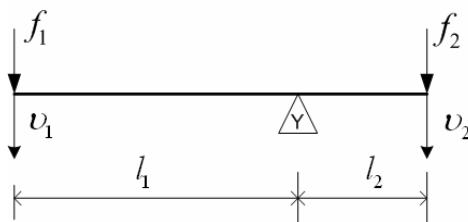
Η σταθερά T καλείται σταθερά του ενισχυτή. Ο συνδυασμός των Εξ.(1,2) δίδει:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 \Rightarrow \cancel{F_1} v_1 = T \cancel{F_1} v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{T} \right) v_1 \quad (3)$$

Στην κατηγορία των ενισχυτών ανήκουν διάφορα τεχνολογικά συστήματα, όπως:

- Σύστημα μοχλού

Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται ένα σύστημα μοχλού πρώτου είδους (δηλαδή, το υπομόχλιο βρίσκεται μεταξύ των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων F_1 και F_2). Ως l_1 και l_2 συμβολίζονται οι μοχλοβραχίονες των δυνάμεων F_1 και F_2 , αντίστοιχα.



Σχήμα 2: Σύστημα μοχλού (πρώτου είδους)

Σε αυτήν την περίπτωση, από την ισορροπία των ροπών περί το υπομόχλιο Y προκύπτει:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \Rightarrow F_2 = \underbrace{\left(\frac{l_1}{l_2} \right)}_T F_1 \quad (4)$$

Από τον συνδυασμό των Εξ.(2,4), προκύπτει ότι η σταθερά T του ενισχυτή, σε αυτήν την περίπτωση, ισούται με:

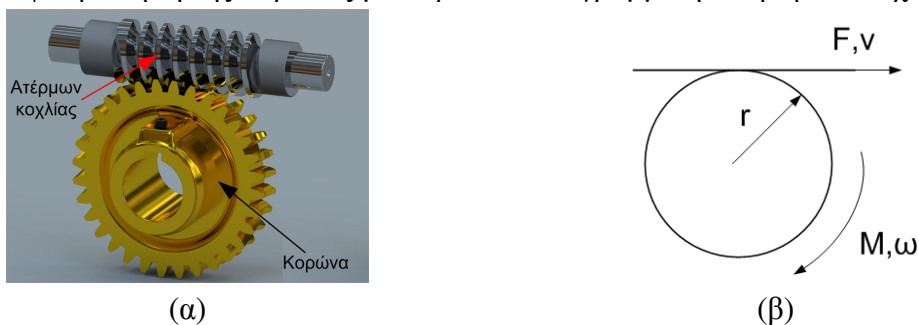
$$T = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ως εκ τούτου, ο συνδυασμός των Εξ.(3,5) δίδει:

$$v_2 = \left(\frac{1}{T} \right) v_1 \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}} v_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ l_1 \end{pmatrix} v_1 \quad (6)$$

Το ποιοτικό συμπέρασμα των Εξ.(4,6) είναι ο γνωστός κανόνας: 'ό,τι κερδίζεται σε δύναμη, χάνεται σε ταχύτητα'.

- Σύστημα ατέρμονα κοχλία – κορώνας
 Στο Σχήμα 3 απεικονίζεται ένα σύστημα ατέρμονα κοχλία – κορώνας, μέσω του οποίου η περιστροφική κίνηση της κορώνας μετατρέπεται σε γραμμική κίνηση του κοχλία.



Σχήμα 3: Σύστημα ατέρμονα κοχλία – κορώνας: (α) 3Δ απεικόνιση¹ και (β) σχηματική αναπαράσταση

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει:

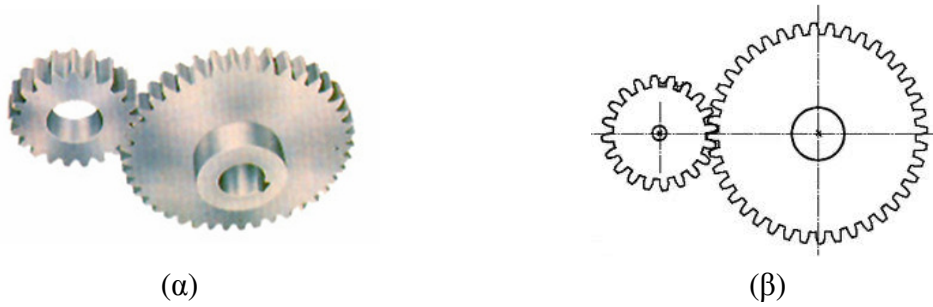
$$M = r F \quad \text{και} \quad \omega = \left(\frac{1}{r} \right) v \quad (7)$$

Συνεπώς, ο συντελεστής του ενισχυτή ισούται με:

$$T = r \quad (8)$$

- Ζεύγος οδοντωτών τροχών
 Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται ένα ζεύγος οδοντωτών τροχών, μέσω του οποίου η περιστροφική κίνηση του κινητηρίου τροχού μεταδίδεται στον κινούμενο τροχό και προκαλεί την περιστροφή του, μη την ίδια ή διαφορετική ταχύτητα περιστροφής (ανάλογα με τη σχέση μετάδοσης).

¹ Πηγή: <http://www.indiastudychannel.com/resources/73621-Mechanical-Gears.aspx>



Σχήμα 4: Σύστημα ζεύγους οδοντωτών τροχών: (α) 3Δ απεικόνιση² και (β) σχηματική αναπαράσταση

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει:

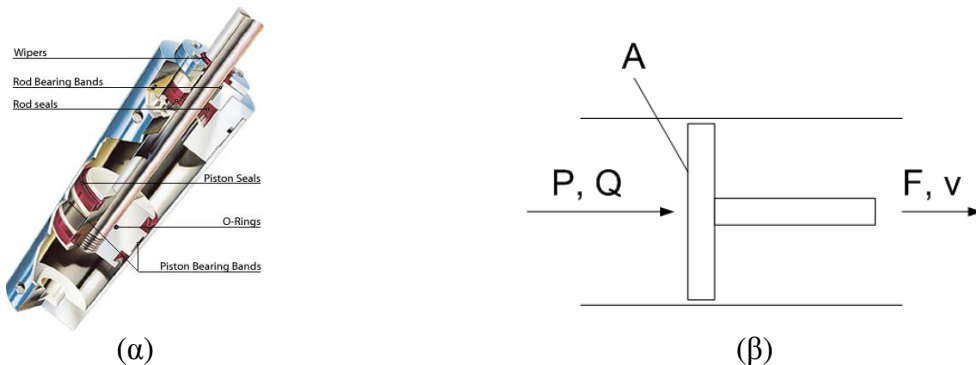
$$F = \frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2} \Rightarrow M_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) M_1 \quad \text{και} \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = v \Rightarrow \omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \omega_1 \quad (9)$$

Συνεπώς, ο συντελεστής του ενισχυτή ισούται με:

$$T = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (10)$$

- Υδραυλικό έμβολο

Στο Σχήμα 5 απεικονίζεται ένα υδραυλικό έμβολο. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5β απεικονίζεται ένα έμβολο με εμβαδόν επιφάνειας A , το οποίο ωθείται προς τα δεξιά λόγω διοχέτευσης ρευστού προς την εν λόγω επιφάνεια με παροχή Q και υπό πίεση P . Το έμβολο θα κινηθεί με ταχύτητα v , ενώ το ελεύθερο άκρο του είναι ικανό να ασκήσει δύναμη F .



Σχήμα 5: Υδραυλικό έμβολο απλής ενέργειας: (α) 3Δ απεικόνιση³ και (β) σχηματική αναπαράσταση

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει:

$$F = A P \quad \text{και} \quad v = \left(\frac{1}{A}\right) Q \quad (11)$$

² Πηγή: <http://www.indiamart.com/taherengineering/gears.html>

³ Πηγή: <http://www.allsealsinc.com/hydraulicseals.html>

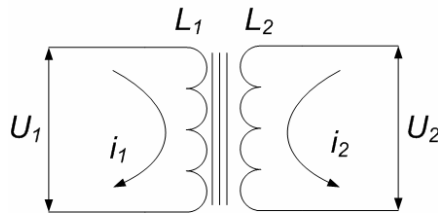
Συνεπώς, ο συντελεστής του ενισχυτή ισούται με:

$$T = A \quad (12)$$

Τυπική εφαρμογή αυτού του ενισχυτή αποτελεί ο υδραυλικός γρύλος, ο οποίος χρησιμοποιείται στα συνεργεία αυτοκινήτων για την ανύψωση των οχημάτων.

- Ηλεκτρικός μετασχηματιστής

Πρόκειται για μια συσκευή, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας μεταξύ δύο κυκλωμάτων. Λειτουργεί σύμφωνα με το νόμο επαγωγής Faraday.



Σχήμα 6: Σχηματική απεικόνιση ηλεκτρικού μετασχηματιστή

Ειδικότερα, για τον ηλεκτρικό μετασχηματιστή του Σχήματος 6, μία μεταβολή της τάσης U_1 έχει ως αποτέλεσμα την επαγωγή τάσης U_2 , σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow U_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right) U_1 \quad (13)$$

όπου με το σύμβολο N συμβολίζεται το πλήθος των περιελίξεων. Από την Εξ.(12) έπεται ότι η σταθερά του ενισχυτή ισούται με:

$$T = \left(\frac{N_1}{N_2} \right) \quad (14)$$

Με άλλα λόγια, η σταθερά του ηλεκτρικού μετασχηματιστή ισούται με το λόγο των τυλιγμάτων του μετασχηματιστή.

Συνοψίζοντας:

*Οι ενισχυτές είναι τεχνολογικά στοιχεία, τα οποία μετατρέπουν
'Σθένος' σε 'Σθένος' και 'Ροή' σε 'Ροή'.*

Εκτός των ενισχυτών, υπάρχει και η αντίθετη (ανάστροφη) δυνατότητα:

*Οι αναστροφείς είναι τεχνολογικά στοιχεία, τα οποία μετατρέπουν
'Σθένος' σε 'Ροή' και 'Ροή' σε 'Σθένος'.*

Ένας τυπικός αναστροφέας απεικονίζεται στο Σχήμα 1β. Επειδή και στην περίπτωση του αναστροφέα, η ισχύς διατηρείται, έπεται ότι ισχύει:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 = P \quad (15)$$

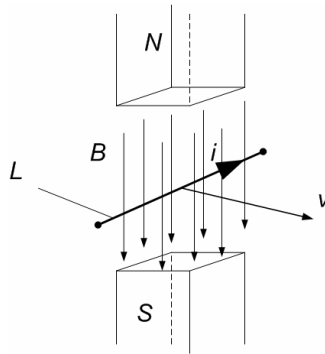
Σύμφωνα με τον συμβολισμό που υιοθετήθηκε προηγουμένως, οι μεταβλητές v_1 και v_2 εκφράζουν ‘ροή’ και οι μεταβλητές F_1 και F_2 εκφράζουν ‘σθένος’. Σε έναν αναστροφέα ισχύει:

$$F_2 = G v_1 \quad (16)$$

Η σταθερά G καλείται σταθερά του αναστροφέα. Ο συνδυασμός των Εξ.(15,16) δίδει:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 \Rightarrow F_1 v_1 = G v_1 v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{G} \right) F_1 \quad (17)$$

Το πλέον κλασσικό παράδειγμα αναστροφέα είναι η ηλεκτρομηχανική μετατροπή ενέργειας.



Σχήμα 7: Σχηματική απεικόνιση ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας

Πιο συγκεκριμένα, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 7, έστω ότι μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο έντασης B βρίσκεται ηλεκτρικός αγωγός μήκους L , ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης i και κινείται με ταχύτητα v . Θεωρώντας ότι η διεύθυνση του αγωγού, η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου B και η διεύθυνση της ταχύτητας v είναι μεταξύ τους κάθετες, έπεται ότι η δύναμη Laplace, η οποία θα αναπτυχθεί στον αγωγό αυτό, είναι ίση προς:

$$F = BLi \quad (18)$$

Η διεύθυνση της ανωτέρω δύναμης βρίσκεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου (κανόνας της δεξιάς χειρός). Επιπροσθέτως, στα άκρα του αγωγού θα εμφανισθεί ηλεκτρεγερτική δύναμη U μέτρου:

$$U = \underbrace{BL}_{G} v \quad (19)$$

Από την Εξ.(19) προκύπτει:

$$v = \left(\frac{1}{BL} \right) U \quad (20)$$

Στο αριστερό μέρος των Εξ.(18,20) διακρίνουμε μηχανικά μεγέθη, ενώ στο δεξί μέρος των ίδιων εξισώσεων διακρίνουμε ηλεκτρικά μεγέθη. Συνεπώς, διαπιστώνουμε ότι οι Εξ.(18,20) περιγράφουν μια ηλεκτρομηχανική μετατροπή ενέργειας, στην οποία:

- Η δύναμη F , η οποία σε ένα μηχανικό σύστημα εκφράζει ‘σθένος’, μετατρέπεται σε ένταση ρεύματος i , η οποία σε ένα ηλεκτρικό σύστημα εκφράζει ‘ροή’. Η, δε, σταθερά αναλογίας ισούται με το γινόμενο της έντασης B του μαγνητικού πεδίου επί το μήκος L του αγωγού.
- Η ταχύτητα v , η οποία σε ένα μηχανικό σύστημα εκφράζει ‘ροή’, μετατρέπεται σε διαφορά δυναμικού (τάση) U , η οποία σε ένα ηλεκτρικό σύστημα εκφράζει ‘σθένος’. Η, δε, σταθερά αναλογίας είναι αντιστρόφως ανάλογη του γινομένου της έντασης B του μαγνητικού πεδίου επί το μήκος L του αγωγού.

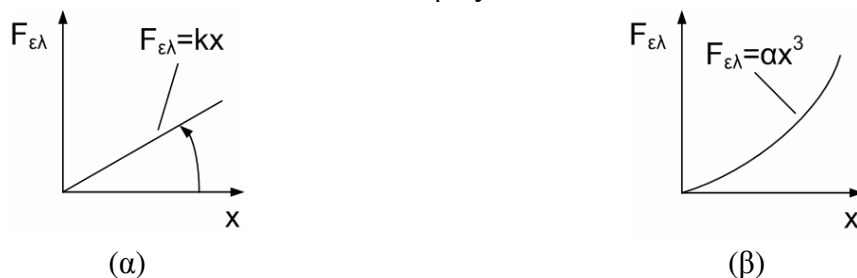
Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτει ότι ο ηλεκτροκινητήρας, στη βασική του σύλληψη, δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας ηλεκτρομηχανικός μετατροπέας ενέργειας, στον υπολογισμό του οποίου λογίζεται το συνολικό μήκος του αγωγού που χρησιμοποιείται στον ηλεκτροκινητήρα. Η, δε, ένταση του μαγνητικού πεδίου σχετίζεται με την ικανότητα ανάπτυξης μαγνητικού πεδίου μέσα στον ηλεκτροκινητήρα. Διευκρινίζεται ότι η τιμή της σταθεράς G του ηλεκτροκινητήρα (βλ. Εξ.19) δίδεται από τον εκάστοτε κατασκευαστή. Αντίστοιχα λειτουργεί μία ηλεκτρογεννήτρια, στην περίπτωση της οποίας, αντί δύναμης F και ταχύτητας v , εμφανίζεται ροπή M και γωνιακή ταχύτητα ω .

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι η μέχρι στιγμής προσέγγιση των ενισχυτών και των αναστροφών στηρίζεται σε δύο απλοποιητικές παραδοχές:

- Στα προαναφερθέντα τεχνολογικά συστήματα διατηρείται η ισχύς (ισοδύναμα, οι απώλειες ισχύος είναι μηδενικές). Για παράδειγμα, στην περίπτωση του μοχλού (βλ. Σχήμα 2) δεν υπάρχουν απώλειες λόγω συνεργασίας μοχλού-υπομοχλίου. Τεχνικά, κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να επιτευχθεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό χρησιμοποιώντας κάποια άρθρωση με περιστροφικό αποσβεστήρα χαμηλής απόσβεσης.
- Στα προαναφερθέντα τεχνολογικά συστήματα ισχύει η παραδοχή της γραμμικότητας. Ειδικότερα, στην απλούστερη περίπτωση δυναμικού συστήματος (δηλαδή στο μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα) καταλήξαμε στην ακόλουθη εξίσωση κίνησης:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (21)$$

Στην Εξ.(21), δεχόμαστε ότι τα δυναμικά στοιχεία m , c και k λαμβάνουν σταθερές τιμές. Αυτό, ωστόσο, δεν είναι πάντοτε αληθές.



Σχήμα 8: Συμπεριφορά μηχανικού ελατηρίου: (α) γραμμική και (β) μη-γραμμική

Για παράδειγμα, υπάρχουν μηχανικά ελατήρια, τα οποία εμφανίζουν γραμμική συμπεριφορά (βλ. Σχήμα 8α). Ωστόσο, υπάρχουν και ελατήρια με μη-γραμμική συμπεριφορά (βλ. Σχήμα 8β). Στη δεύτερη περίπτωση, η ‘σταθερά’ k του ελατηρίου είναι συνάρτηση της μετατόπισης ($k = k(x)$), άρα δεν έχει σταθερή τιμή.

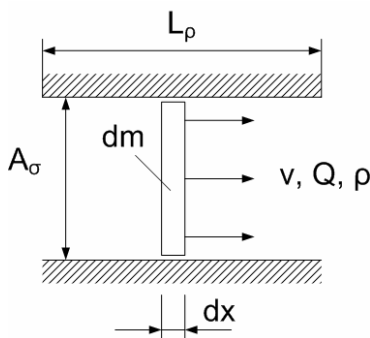
Οι προωθητικοί πύραυλοι αποτελούν ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα μη-σταθερής τιμής της μάζας m . Δεδομένης της κατανάλωσης του καυσίμου που φέρουν, η μάζα αυτών των πυραύλων είναι συνάρτηση του χρόνου ($m = m(t)$), άρα δεν έχει σταθερή τιμή. Αντίστοιχα παραδείγματα υπάρχουν και για τους αποσβεστήρες. Συνεπώς, η διατήρηση σταθερής τιμής για τα δυναμικά στοιχεία m , c και k αποτελεί παραδοχή.

Στην πραγματικότητα, η πλειοψηφία των δυναμικών συστημάτων, τα οποία εμπίπτουν στο πεδίο μελέτης του Μηχανικού, είναι μη-γραμμικά. Ωστόσο, μελετάμε τα γραμμικά συστήματα για τρεις σημαντικούς λόγους:

- Αποτελούν την απλούστερη μορφή δυναμικών συστημάτων.
- Για τα γραμμικά συστήματα, έχουν αναπτυχθεί τεχνικοί τρόποι επίλυσής τους, οι οποίοι καταλήγουν σε αποτελέσματα με μεγάλη ακρίβεια.
- Με την τεχνική της γραμμικοποίησης, οποιαδήποτε μη-γραμμική συμπεριφορά είναι δυνατόν να προσεγγισθεί ως μια ακολουθία γραμμικών συμπεριφορών.

Περί της αδρανείας ρευστού

Έστω τμήμα σωλήνα σταθερής διατομής A_σ και μήκους L_ρ , εντός του οποίου κινείται ρευστό σταθερής πυκνότητας ρ και με σταθερή ταχύτητα v (βλ. Σχήμα 9).



Σχήμα 9: Ροή εντός σωλήνα σταθερής διαμέτρου

Η στοιχειώδης μάζα dm του ρευστού ισούται με:

$$dm = \rho dV \Rightarrow \xrightarrow{dV=A_\sigma dx} dm = \rho A_\sigma dx \quad (22)$$

Η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας dm του ρευστού, ισούται με:

$$E_{kin} = \left(\frac{1}{2}\right) dm v^2 = dT \quad (23)$$

Η ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας dm του ρευστού, ισούται με:

$$Q = vA_\sigma \Rightarrow v = \left(\frac{Q}{A_\sigma} \right) \quad (24)$$

όπου Q είναι η παροχή όγκου του ρευστού. Η συνολική κινητική ενέργεια του ρευστού στο μήκος L_ρ του σωλήνα ισούται με:

$$T = \int_0^l dT \quad (25)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(22,23,24,25) δίδει:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l dT = \int_0^{L_\rho} \left(\frac{1}{2} \right) dm v^2 = \int_0^{L_\rho} \left(\frac{1}{2} \right) \rho A_\sigma \left(\frac{Q}{A_\sigma} \right)^2 dx = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\rho}{A_\sigma} \right) Q^2 \int_0^{L_\rho} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\rho}{A_\sigma} \right) Q^2 L_\rho \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2} \right) \underbrace{\left(\frac{\rho L_\rho}{A_\sigma} \right)}_{I_\rho} Q^2 \end{aligned} \quad (26)$$

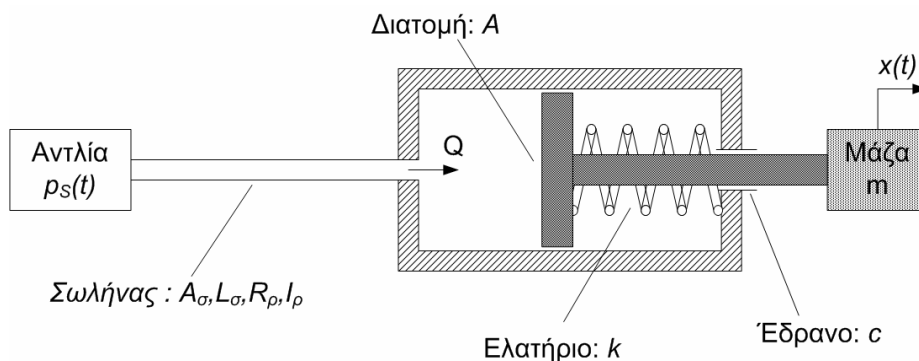
Από την Εξ.(26) προκύπτει ότι ο όρος

$$I_\rho = \left(\frac{\rho L_\rho}{A_\sigma} \right) \quad (27)$$

λειτουργεί ως στοιχείο αδρανείας στην εξίσωση της κινητικής ενέργειας. Με άλλα λόγια, εκκινώντας από τον ορισμό της κινητικής ενέργειας σε ένα γραμμικό μηχανικό σύστημα, και χρησιμοποιώντας την έννοια της μάζας ενός ρευστού, καταλήξαμε στην Εξ.(27), η οποία εκφράζει την ισοδύναμη αδράνεια ενός υδραυλικού συστήματος. Όπως θα γνωρίσουμε σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί και σε άλλα δυναμικά συστήματα καθώς και για άλλα δυναμικά στοιχεία (π.χ. ελατήριο) με τη βοήθεια της Ισοδύναμης Ενεργειακής Αρχής.

Εφαρμογή

Έστω το σύστημα του Σχήματος 1 (υδραυλικός επενεργητής). Ζητείται η εξίσωση κίνησης του συστήματος.



Σχήμα 10: Υδραυλικός επενεργητής

Λύση

Το σύστημα αποτελείται από ένα υδραυλικό υποσύστημα και ένα μηχανικό υποσύστημα. Το υδραυλικό υποσύστημα αποτελείται από μία αντλία, η οποία παρέχει γνωστή εξωτερική πίεση $p_s(t)$, και από έναν αγωγό (σωλήνα) μήκους L_σ και διατομής A_σ , μέσα από τον οποίο διέρχεται το εργαζόμενο μέσο. Θεωρείται ότι το εργαζόμενο μέσο είναι ασυμπίεστο ρευστό. Κατά την κίνησή του μέσα στο σωλήνα, το ρευστό εμφανίζει αδράνεια I_ρ και αντιμετωπίζει αντίσταση R_ρ . Ο αγωγός καταλήγει σε έναν υδραυλικό κύλινδρο, στον οποίο το ρευστό διοχετεύεται με παροχή Q . Το μηχανικό υποσύστημα αποτελείται από ένα έμβολο με επιφάνεια διατομής A , στο άκρο του οποίου είναι σταθερά προσαρμοσμένη μία μάζα m . Η μάζα μετακινείται οριζόντια κατά $x(t)$. Το έμβολο στηρίζεται στα τοιχώματα του κυλίνδρου με τη βοήθεια ενός γραμμικού ελατηρίου σταθεράς k και ενός εδράνου, το οποίο δρα ως αποσβεστήρας με σταθερά απόσβεσης c . Πιο συγκεκριμένα, το έδρανο φέρει στεγανοποιητική διάταξη (στεγανοποιητικό δακτύλιο), ενώ λόγω της κίνησης (ταλάντωσης) του εμβόλου αναπτύσσονται σε αυτήν υδροδυναμικές τριβές. Μοντελοποιούμε, λοιπόν, τη συγκεκριμένη διάταξη ως αποσβεστήρα με σταθερά απόσβεσης c .

Η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για κάθε ένα από τα προαναφερθέντα υποσυστήματα πραγματοποιείται κατά τα γνωστά (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, 07), χρησιμοποιώντας και τον Πίνακα 1 της Εκπαιδευτικής Ενότητας 13, σχετικά με την αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών συστημάτων. Η σύζευξη των προαναφερθέντων υποσυστημάτων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της έννοιας του ενισχυτή (βλ. παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα, παράγραφο για υδραυλικό έμβολο σελ. 14.6). Ειδικότερα:

Για το υδραυλικό υποσύστημα, υπολογίζονται οι ενεργειακοί όροι:

- Η κινητική ενέργεια T_ρ του υποσυστήματος συσσωρεύεται στο στοιχείο αδρανείας I_ρ του ρευστού και ισούται με:

$$T_\rho = \frac{1}{2} I_\rho Q^2 \quad (28)$$

- Η δυναμική ενέργεια U_ρ του υποσυστήματος είναι μηδενική για δύο λόγους: πρώτον διότι υποθέσαμε ασυμπίεστο ρευστό και δεύτερον διότι, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10, η ροή του ρευστού είναι οριζόντια, άρα δεν μεταβάλλεται καθ' ύψος η στάθμη του ρευστού. Συνεπώς, ισχύει:

$$U_\rho = 0 \quad (29)$$

- Η ενέργεια $P_{C,\rho}$ του υποσυστήματος διαχέεται στην αντίσταση R_ρ του σωλήνα και ισούται με:

$$P_{C,\rho} = \frac{1}{2} R_\rho Q^2 \quad (30)$$

- Η ισχύς $P_{t,\rho}$ του υποσυστήματος προσφέρεται εξωτερικά από την αντλία πίεσης p_s και ισούται με:

$$P_{t,\rho} = p_s Q \quad (31)$$

Για το μηχανικό υποσύστημα, υπολογίζονται οι ενεργειακοί όροι:

- Η κινητική ενέργεια T_e του υποσυστήματος συσσωρεύεται στη μάζα m του υποσυστήματος και ισούται με:

$$T_e = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (32)$$

- Η δυναμική ενέργεια U_e του υποσυστήματος συσσωρεύεται στο ελατήριο σταθεράς k και ισχύει:

$$U_e = \frac{1}{2} k x^2 \quad (33)$$

- Η ενέργεια $P_{C,e}$ του υποσυστήματος διαχέεται στην αντίσταση c του εδράνου και ισούται με:

$$P_{C,e} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (34)$$

- Στο υποσύστημα δεν προσφέρεται εξωτερικά ισχύς $P_{t,e}$, συνεπώς ισχύει:

$$P_{t,e} = 0 \quad (35)$$

Συνολικά για το εξεταζόμενο σύστημα, οι ενεργειακοί όροι προκύπτουν από την άθροιση των επί μέρους όρων. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T = T_\rho + T_e \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_\rho Q^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (36)$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος ισούται με:

$$U = U_\rho + U_e = 0 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (37)$$

- Η ενέργεια P_C του συστήματος, η οποία διαχέεται, ισούται με:

$$P_C = P_{C,\rho} + P_{C,e} \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} R_\rho Q^2 + \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (38)$$

- Η, εξωτερικά προσφερόμενη στο σύστημα, ισχύς P_t ισούται με:

$$P_t = P_{t,\rho} + P_{t,e} = p_s Q + 0 \Rightarrow P_t = p_s Q \quad (39)$$

Έχοντας καταγράψει τους ενεργειακούς όρους (βλ. Εξ.(36,37,38,39)), το επόμενο βήμα είναι η επιλογή των Βαθμών Ελευθερίας του συστήματος. Για την επιλογή τους θα εφαρμόσουμε την τυπική διαδικασία επιλογής. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας τις Εξ.(36,37,38,39) διαπιστώνουμε ότι οι εμπλεκόμενες κινηματικές μεταβλητές είναι δύο: η μετατόπιση x του εμβόλου και η παροχή όγκου Q του ρευστού. Με βάση όσα αναφέρθηκαν στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα για το υδραυλικό έμβολο (βλ. σελ. 14.6), προκύπτει ότι οι κινηματικές μεταβλητές x και Q συνδέονται μεταξύ τους μέσω της Εξ.(11). Επειδή, λοιπόν, για δύο κινηματικές μεταβλητές διαθέτουμε μία εξίσωση, η οποία τις συνδέει μεταξύ τους, έπεται ότι το εξεταζόμενο συζευγμένο ρευστομηχανικό σύστημα (υδραυλικός επενεργητής) διαθέτει έναν Βαθμό Ελευθερίας. Συνεπώς, είναι δυνατόν να επιλέξουμε ως Βαθμό Ελευθερίας είτε τη μετατόπιση x του εμβόλου είτε την παροχή όγκου Q του ρευστού. Αντί, δε, της παροχής όγκου Q είναι δυνατόν να επιλέξουμε, ισοδύναμα, την μεταβολή όγκου V_ρ του ρευστού.

Επιλογή της μετατόπισης x του εμβόλου ως Βαθμό Ελευθερίας

Από την Εξ.(11), ισχύει:

$$v = \left(\frac{1}{A} \right) Q \xrightarrow{v=\dot{x}} \dot{x} = \left(\frac{1}{A} \right) Q \Rightarrow Q = A\dot{x} \quad (40)$$

Αντικαθιστώντας την εξαρτημένη μεταβλητή Q στις Εξ.(36,37,38,39), προκύπτει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} I_\rho Q^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_\rho (A\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \underbrace{(I_\rho A^2 + m)}_M \dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (41)$$

Η ποσότητα M καλείται ‘*Ισοδύναμη Μάζα Συστήματος*’. Οι εξισώσεις Εξ.(27,41) δίδουν:

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\left(\frac{\rho L_\sigma}{A_\sigma} \right) A^2 + m \right)}_M \dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (42)$$

Διευκρινίζεται ότι η αδράνεια του ρευστού I_ρ αφορά στον αγωγό που συνδέει την αντλία με τον υδραυλικό κύλινδρο (βλ. Σχήμα 10) και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την κίνηση του ρευστού μέσα στον υδραυλικό κύλινδρο.

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \xrightarrow{K=k} U = \frac{1}{2} K x^2 \quad (43)$$

Η ποσότητα K καλείται ‘*Ισοδύναμο Ελατήριο Συστήματος*’.

- Η διαχεόμενη ισχύς P_C του συστήματος ισούται με:

$$P_C = \frac{1}{2} R_\rho (A\dot{x})^2 + \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} \underbrace{(R_\rho A^2 + c)}_C \dot{x}^2 \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} C \dot{x}^2 \quad (44)$$

Η ποσότητα C καλείται ‘Ισοδύναμη Απόσβεση Συστήματος’.

- Η, εξωτερικά προσφερόμενη στο σύστημα, ισχύς P_t ισούται με:

$$P_t = p_s Q \Rightarrow P_t = \underbrace{p_s A}_{F_s} \dot{x} \Rightarrow P_t = F_s \dot{x} \quad (45)$$

Η ποσότητα F_s καλείται ‘Ισοδύναμη Διέγερση Συστήματος’.

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange κατά τα γνωστά (αναλυτικός υπολογισμός των επί μέρους όρων παρατίθεται στο Παράρτημα ‘Α’), τελικά προκύπτει ότι η εξίσωση της κίνησης του συστήματος είναι:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F_s \quad (46)$$

όπου τα Ισοδύναμα Δυναμικά Στοιχεία M , C και K έχουν ορισθεί στις Εξ.(42,43,44,45).

Επιλογή της μεταβολής όγκου V_ρ του ρευστού ως Βαθμό Ελευθερίας

Εξ ορισμού, η παροχή Q του ρευστού ισούται με:

$$Q = \dot{V}_\rho \quad (47)$$

όπου V_ρ είναι η μεταβολή όγκου του ρευστού και ορίζεται ως εξής:

$$V_\rho = A x \Rightarrow x = \left(\frac{1}{A}\right) V_\rho \quad (48)$$

Από την Εξ.(11), ισχύει:

$$v = \left(\frac{1}{A}\right) Q \Rightarrow \dot{x} = \left(\frac{1}{A}\right) Q \xrightarrow{Q=\dot{V}_\rho} \dot{x} = \left(\frac{1}{A}\right) \dot{V}_\rho \quad (49)$$

Αντικαθιστώντας την εξαρτημένη μεταβλητή x στις Εξ.(36,37,38,39), προκύπτει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} I_\rho Q^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \xrightarrow[x=\left(\frac{1}{A}\right)V_\rho]{Q=\dot{V}_\rho} T = \frac{1}{2} I_\rho \dot{V}_\rho^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{A} \dot{V}_\rho\right)^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_\rho + \left(\frac{m}{A^2}\right) \right)}_{\bar{I}_\rho} \dot{V}_\rho^2 \quad (50)$$

Η ποσότητα \bar{I}_ρ καλείται ‘Ισοδύναμη Αδράνεια Συστήματος’. Από την Εξ.(50), προκύπτει:

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_\rho + \left(\frac{m}{A^2}\right) \right)}_{\bar{I}_\rho} \dot{V}_\rho^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \bar{I}_\rho \dot{V}_\rho^2 \quad (51)$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \xrightarrow{x = \left(\frac{V_\rho}{A}\right)} U = \frac{1}{2} k \left(\frac{V_\rho}{A}\right)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{k}{A^2}\right)}_{\left(\frac{1}{C_\rho}\right)} V_\rho^2 \quad (52)$$

Η ποσότητα $\left(\frac{1}{C_\rho}\right)$ εκφράζει τη συμπιεστότητα του ρευστού.

- Η διαχεόμενη ισχύς P_C του συστήματος ισούται με:

$$P_C = \frac{1}{2} R_\rho (A\dot{x})^2 + \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \xrightarrow[\dot{x} = \left(\frac{\dot{V}_\rho}{A}\right)]{x = \left(\frac{V_\rho}{A}\right)} P_C = \frac{1}{2} R_\rho \left(A \left(\frac{\dot{V}_\rho}{A}\right)\right)^2 + \frac{1}{2} c \left(\frac{\dot{V}_\rho}{A}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_C = \frac{1}{2} \underbrace{\left(R_\rho + \left(\frac{c}{A^2}\right)\right)}_{\bar{R}_\rho} \dot{V}_\rho^2 \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho^2 \quad (53)$$

Η ποσότητα \bar{R}_ρ καλείται ‘Ισοδύναμη Αντίσταση Συστήματος’.

- Η, εξωτερικά προσφερόμενη στο σύστημα, ισχύς P_t ισούται με:

$$P_t = p_s Q \xrightarrow{Q = \dot{V}_\rho} P_t = p_s \dot{V}_\rho \quad (54)$$

Η ποσότητα p_s καλείται ‘Ισοδύναμη Διέγερση Συστήματος’.

Και πάλι, εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange κατά τα γνωστά (αναλυτικός υπολογισμός των επί μέρους όρων παρατίθεται στο Παράρτημα ‘B’), τελικά προκύπτει ότι η εξίσωση της κίνησης του συστήματος είναι:

$$\bar{I}_\rho \ddot{V}_\rho + \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho + \left(\frac{1}{C_\rho}\right) V_\rho = p_s \quad (55)$$

όπου τα Ισοδύναμα Δυναμικά Στοιχεία \bar{I}_ρ , \bar{R}_ρ και $\left(\frac{1}{C_\rho}\right)$ έχουν ορισθεί στις Εξ.(51,52,53,54).

Με βάση όλα τα παραπάνω, έπεται ότι, ανάλογα με την επιλογή του Βαθμού Ελευθερίας, το εξεταζόμενο συζευγμένο δυναμικό σύστημα είναι δυνατόν να αναχθεί είτε σε ένα ισοδύναμο γραμμικό μηχανικό σύστημα είτε σε ένα ισοδύναμο υδραυλικό κύκλωμα. Ειδικότερα, προέκυψε ότι:

- Για την αναγωγή σε ισοδύναμο γραμμικό μηχανικό σύστημα:

Το ρευστό εμφανίζεται στη συνολική ισοδύναμη μάζα του συστήματος (σε αυτόν τον όρο έχουμε προσθέσει την αδράνεια του ρευστού, βλ. Εξ.(42)) καθώς και στη συνολική ισοδύναμη απόσβεση του συστήματος (σε αυτόν τον όρο, έχουμε προσθέσει την απόσβεση του ρευστού, η οποία οφείλεται στις υδροδυναμικές τριβές, βλ. Εξ.(44)).

- Για την αναγωγή σε ισοδύναμο υδραυλικό κύκλωμα:
 Η μάζα του μηχανικού συστήματος εμφανίζεται ως μία πρόσθετη δύναμη αδρανείας στο υδραυλικό σύστημα (βλ. Εξ.(51)). Το ελατήριο του μηχανικού συστήματος εμφανίζεται ως μία πρόσθετη δύναμη ελαστικότητας στο υδραυλικό σύστημα (βλ. Εξ.(52)). Δηλαδή, λόγω ελαστικότητας του εμβόλου, το ρευστό αποκτά μία ισοδύναμη ελαστικότητα. Από φυσική άποψη, η ποσότητα $(1/C_\rho)$ εκφράζει τη συμπιεστότητα του ρευστού. Τέλος, ο αποσβεστήρας του μηχανικού συστήματος εμφανίζεται ως μία πρόσθετη δύναμη αντίστασης στο υδραυλικό σύστημα (βλ. Εξ.(53)).

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται, με συνοπτικό τρόπο, οι σχετικές εξισώσεις για την εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange στις δύο προαναφερθείσες αναγωγές (αναγωγή σε ισοδύναμο μηχανικό σύστημα και αναγωγή σε ισοδύναμο υδραυλικό σύστημα).

Πίνακας 1: Συνοπτική παρουσίαση εξισώσεων της εξεταζόμενης εφαρμογής

Μέγεθος	Αναγωγή σε μηχανικό σύστημα		Αναγωγή σε υδραυλικό σύστημα	
	Εξίσωση υπολογισμού	Ορισμός δυναμικών μεγεθών	Εξίσωση υπολογισμού	Ορισμός δυναμικών μεγεθών
T	$\frac{1}{2} M \dot{x}^2$	$M = I_\rho A^2 + m$ $I_\rho = \left(\frac{\rho L_\sigma}{A_\sigma} \right)$	$\frac{1}{2} \bar{I}_\rho \dot{V}_\rho^2$	$\bar{I}_\rho = I_\rho + \left(\frac{m}{A^2} \right)$
U	$\frac{1}{2} K x^2$	$K = k$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho^2$	$\left(\frac{1}{C_\rho} \right) = \left(\frac{k}{A^2} \right)$
P_C	$\frac{1}{2} C \dot{x}^2$	$C = (R_\rho A^2 + c)$	$\frac{1}{2} \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho^2$	$\bar{R}_\rho = \left(R_\rho + \left(\frac{c}{A^2} \right) \right)$
P_t	$F_S \dot{x}$	$F_S = p_S A$	$p_S \dot{V}_\rho$	p_S : πίεση αντλίας
	Εξίσωση κίνησης συστήματος			
	$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F_S$		$\bar{I}_\rho \ddot{V}_\rho + \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho + \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho = p_S$	

Σχόλιο

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου c σε ένα ρευστό εξαρτάται από την πυκνότητα ρ του ρευστού και το μέτρο διόγκωσης K του ρευστού σύμφωνα με την εξίσωση:

$$c^2 = \left(\frac{K}{\rho} \right) \tag{56}$$

Υπενθυμίζεται ότι το μέτρο διόγκωσης ενός σώματος εκφράζει την αντίσταση του σώματος σε ομοιόμορφη συμπίεση. Όσο, δε, περισσότερο ασυμπίεστο είναι ένα σώμα, τόσο υψηλότερη τιμή K διαθέτει. Όταν ένα ρευστό ρέει εντός σωλήνα με ελαστικά τοιχώματα,

τότε η ελαστικότητα του τοιχώματος επηρεάζει τη διόγκωση του ρευστού (ισοδύναμα, εισάγει στο ρευστό πρόσθετη συμπίεστικότητα), άρα επηρεάζει το μέτρο διόγκωσης K του ρευστού, με αποτέλεσμα τη μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης του ήχου μέσα στον σωλήνα. Το ίδιο ισχύει και για τη διάδοση του ήχου μέσα σε ακουστικές κοιλότητες. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η καμπίνα των επιβατών ενός οχήματος: οι υαλοπίνακες (τζάμια) εμφανίζουν ελαστική συμπεριφορά και ως εκ τούτου επηρεάζουν τη διάδοση του ήχου μέσα στην καμπίνα των επιβατών. Συνεπώς, η φυσική ερμηνεία του όρου $(1/C_\rho)$ στην Εξ.(55) είναι ότι το ρευστό, το οποίο αρχικά θεωρήθηκε ως ασυμπίεστο, αποκτά μία συμπίεστικότητα (ισοδύναμη ελαστικότητα) εξ αιτίας της ελαστικότητας του εμβόλου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτική εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = x$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}]{q=x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) (M \dot{x}^2 - K x^2) \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} \quad (\text{A.1})$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(A.1) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (M \dot{x}) = M \ddot{x} \quad (\text{A.2})$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}]{q=x} -\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) (M \dot{x}^2 - K x^2) \right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(-Kx) = Kx \quad (\text{A.3})$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}]{q=x} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left\{ \frac{1}{2} C \dot{x}^2 \right\} \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = C \dot{x} \quad (\text{A.4})$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}]{q=x} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \{ F_s \dot{x} \} \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} = F_s \quad (\text{A.5})$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}]{q=x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \quad (\text{A.6})$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(A.6), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \Rightarrow M \ddot{x} + Kx + C \dot{x} = F_s \Rightarrow \\ &\Rightarrow M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F_s \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Αναλυτική εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = V_\rho$

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=V_\rho, \dot{q}=\dot{V}_\rho} \frac{\partial L}{\partial \dot{V}_\rho} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{V}_\rho} = \frac{\partial}{\partial \dot{V}_\rho} \left(\frac{1}{2} \bar{I}_\rho \dot{V}_\rho^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{V}_\rho} = \bar{I}_\rho \dot{V}_\rho \quad (\text{B.1})$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(B.1) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_\rho} \right) = \frac{d}{dt} (\bar{I}_\rho \dot{V}_\rho) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_\rho} \right) = \bar{I}_\rho \ddot{V}_\rho \quad (\text{B.2})$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=V_\rho} -\frac{\partial L}{\partial V_\rho} &= -\frac{\partial (T-U)}{\partial V_\rho} = -\frac{\partial}{\partial V_\rho} \left(\frac{1}{2} \bar{I}_\rho \dot{V}_\rho^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial V_\rho} &= -\left(-\left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho \right) \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial V_\rho} = \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=V_\rho, \dot{q}=\dot{V}_\rho} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{V}_\rho} = \frac{\partial}{\partial \dot{V}_\rho} \left(\frac{1}{2} \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{V}_\rho} = \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho \quad (\text{B.4})$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=V_\rho, \dot{q}=\dot{V}_\rho} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{V}_\rho} = \frac{\partial}{\partial \dot{V}_\rho} (p_s \dot{V}_\rho) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{V}_\rho} = p_s \quad (\text{B.5})$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=V_\rho, \dot{q}=\dot{V}_\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_\rho} \right) - \frac{\partial L}{\partial V_\rho} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{V}_\rho} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{V}_\rho} \quad (\text{B.6})$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(B.6), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_\rho} \right) - \frac{\partial L}{\partial V_\rho} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{V}_\rho} &= \frac{\partial P_t}{\partial \dot{V}_\rho} \Rightarrow \bar{I}_\rho \ddot{V}_\rho + \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho + \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho = p_s \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{I}_\rho \ddot{V}_\rho + \bar{R}_\rho \dot{V}_\rho + \left(\frac{1}{C_\rho} \right) V_\rho &= p_s \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$