ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα15η
Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων με την Ενεργειακή Αρχή Lagrange – Εφαρμογές

Γενικά

Στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα σχολιάσθηκε η δυνατότητα μοντελοποίησης σύνθετων δυναμικών συστημάτων χρησιμοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange. Πιο συγκεκριμένα, εξετάσθηκε ένα σύνθετο σύστημα, αποτελούμενο από ένα υδραυλικό υποσύστημα και από ένα μηχανικό υποσύστημα. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, διαπιστώσαμε ότι η σύζευξη μεταξύ των δύο υποσυστημάτων επιτυγχάνεται μέσω του εμβόλου, το οποίο αποτελεί έναν ενισχυτή. Ως 'ενισχυτή' ορίσαμε εκείνο το τεχνολογικό στοιχείο, το οποίο μετατρέπει 'σθένος' σε 'σθένος' (στην προκειμένη περίπτωση, μετατρέπει πίεση σε δύναμη) και 'ροή' σε 'ροή' (στην προκειμένη περίπτωση, μετατρέπει παροχή σε ταχύτητα). Επίσης, διαπιστώσαμε ότι το εξετασθέν ρευστομηχανικό σύστημα είναι δυνατόν να θεωρηθεί:

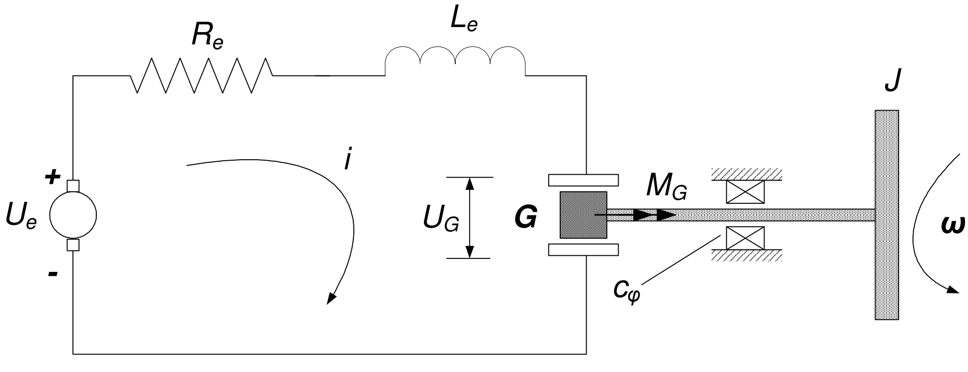
- είτε ως ένα μηχανικό σύστημα, προσαυξημένης αδράνειας και απόσβεσης, λόγω της παρουσίας του υδραυλικού υποσυστήματος,
- είτε ως ένα υδραυλικό σύστημα, προσαυξημένης αδράνειας και αντίστασης, λόγω της παρουσίας του μηχανικού υποσυστήματος, ενώ ταυτόχρονα, και αυτό αποτελεί το πολύ ενδιαφέρον στοιχείο, το, αρχικώς θεωρούμενο ασυμπίεστο, ρευστό (εργαζόμενο μέσο) αποκτά συμπιεστότητα.

Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα, θα εξετάσουμε δύο σύνθετα δυναμικά συστήματα:

- ένα ηλεκτρομηχανικό σύστημα, δηλαδή ένα σύνθετο δυναμικό σύστημα, αποτελούμενο από ένα ηλεκτρικό υποσύστημα και από ένα μηχανικό υποσύστημα,
- ένα απλοποιημένο σύστημα ανάρτησης οχήματος (απλοποιημένη προσέγγιση της δυναμικής ενός οχήματος).

Εφαρμογή #1: Ηλεκτρομηχανικό σύστημα

Έστω το ηλεκτρομηχανικό σύστημα του Σχήματος 1, το οποίο τροφοδοτείται από τάση U_e, η τιμή της οποίας είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Εάν, για παράδειγμα, η τάση είναι συνεχής, τότε είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί ως μία βηματική συνάρτηση, ενώ εάν είναι εναλλασσόμενη τότε είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί ως μία αρμονική διέγερση.



Σχήμα 1: Ηλεκτρομηχανικό σύστημα

Η τάση U_e τροφοδοτεί έναν ηλεκτρικό κύκλωμα αντίστασης R_e και αυτεπαγωγής L_e. Το εν λόγω ηλεκτρικό κύκλωμα τροφοδοτεί έναν ηλεκτροκινητήρα, ο οποίος θεωρείται ως αναστροφέας με σταθερά G (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 14). Ο άξονας του ηλεκτροκινητήρα κινεί έναν μηχανικό άξονα, ο οποίος στηρίζεται με τη βοήθεια κατάλληλου εδράνου. Η παρουσία του εν λόγω εδράνου μοντελοποιείται ως αποσβεστήρας σταθεράς c_φ. Ο άξονας περιστρέφει, με γωνιακή ταχύτητα ω, έναν σφόνδυλο, η ροπής αδρανείας του οποίου είναι J. Ζητούνται οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Λύση

Το εξεταζόμενο σύνθετο (συζευγμένο) σύστημα αποτελείται από ένα ηλεκτρικό υποσύστημα και από ένα μηχανικό (***στρεφόμενο*** δυναμικό) υποσύστημα. Για την επίλυσή του ακολουθείται η γνωστή διαδικασία:

Βήμα 1: Για ***κάθε υποσύστημα***, καταγραφή των κατά Lagrange ενεργειακών όρων (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, 07) και χρήση του Πίνακα 1 της Εκπαιδευτικής Ενότητας 13 σχετικά με την αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών συστημάτων.

Βήμα 2: Άθροιση των αντιστοίχων επί μέρους ενεργειακών όρων, οι οποίοι προκύπτουν από το Βήμα 1, προς καταγραφή των κατά Lagrange ενεργειακών όρων, για ***ολόκληρο το σύστημα***.

Βήμα 3: Σύζευξη των προαναφερθέντων υποσυστημάτων μέσω του ηλεκτροκινητήρα, ο οποίος θεωρείται ως αναστροφέας (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 14, παράγραφο για ηλεκτρικό μετασχηματιστή, σελ. 14.7).

Βήμα 4: Επιλογή της ανεξάρτητης κινηματικής μεταβλητής (Βαθμός Ελευθερίας), ως προς την οποία θα αναγραφούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Βήμα 5: Εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, χρησιμοποιώντας τους ενεργειακούς όρους από το Βήμα 2.

Βήμα 6: Καταγραφή των εξισώσεων κίνησης συναρτήσει της ανεξάρτητης κινηματικής μεταβλητής.

Αναλυτικότερα:

Για το Βήμα 1:

Για το μηχανικό (στρεφόμενο δυναμικό) υποσύστημα, υπολογίζονται οι ενεργειακοί όροι:

- Η κινητική ενέργεια T_φ του υποσυστήματος συσσωρεύεται στην ροπή αδρανείας J του περιστρεφόμενου άξονα και ισούται με:

$$T_\varphi = \frac{1}{2}\ J\ \omega^2 \tag{1}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_φ του υποσυστήματος είναι μηδενική διότι το υποσύστημα δεν διαθέτει στοιχείο συσσώρευσης δυναμικής ενέργειας (δηλαδή, δεν διαθέτει στροφικό ελατήριο) και ισχύει:

$$U_\varphi = 0 \tag{2}$$

- Η ενέργεια $P_{C,\varphi}$ του υποσυστήματος διαχέεται στην αντίσταση (απόσβεση) c_φ του εδράνου και ισούται με:

$$P_{C,\varphi} = \frac{1}{2} c_\varphi \, \omega^2 \tag{3}$$

- Στο υποσύστημα δεν προσφέρεται εξωτερικά ισχύς $P_{t,\varphi}$, συνεπώς ισχύει:

$$P_{t,\varphi} = 0 \tag{4}$$

Για το ηλεκτρικό υποσύστημα, υπολογίζονται οι ενεργειακοί όροι:

- Η κινητική ενέργεια T_e του υποσυστήματος συσσωρεύεται στο στοιχείο αυτεπαγωγής L_e και ισούται με:

$$T_e = \frac{1}{2} L_e \, i^2 \tag{5}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_e του υποσυστήματος είναι μηδενική διότι στο ηλεκτρικό σύστημα δεν υπάρχει στοιχείο συσσώρευσης δυναμικής ενέργειας (δηλαδή, δεν υπάρχει πυκνωτής):

$$U_e = 0 \tag{6}$$

- Η ενέργεια $P_{C,e}$ του υποσυστήματος διαχέεται στην αντίσταση R_e και ισούται με:

$$P_{C,e} = \frac{1}{2} R_e \, i^2 \tag{7}$$

- Η ισχύς $P_{t,e}$ του υποσυστήματος προσφέρεται εξωτερικά από την πηγή τάσης U_S και ισούται με:

$$P_{t,e} = U_S \, i \tag{8}$$

Για το Βήμα 2:

Συνολικά για το εξεταζόμενο σύστημα, οι ενεργειακοί όροι προκύπτουν από την άθροιση των επί μέρους όρων. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T = T_\varphi + T_e \Rightarrow T = \frac{1}{2} J \, \omega^2 + \frac{1}{2} L_e \, i^2 \tag{9}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος ισούται με:

$$U = U_\varphi + U_e = 0 + 0 \Rightarrow U = 0 \tag{10}$$

- Η ενέργεια P_C του συστήματος, η οποία διαχέεται, ισούται με:

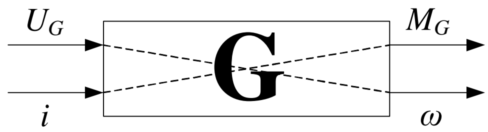
$$P_C = P_{C,\varphi} + P_{C,e} \Rightarrow P_C = \frac{1}{2} c_\varphi \, \omega^2 + \frac{1}{2} R_e \, i^2 \tag{11}$$

- Η, εξωτερικά προσφερόμενη στο σύστημα, ισχύς P_t ισούται με:

$$P_t = P_{t,\varphi} + P_{t,e} = 0 + U_S \, i \Rightarrow P_t = U_S \, i \tag{12}$$

Για το Βήμα 3:

Σύμφωνα με το Σχήμα 1, η σύζευξη του ηλεκτρικού υποσυστήματος με το μηχανικό υποσύστημα υλοποιείται μέσω της κίνησης (περιστροφής) του άξονα λόγω της λειτουργίας του ηλεκτροκινητήρα. Ο συγκεκριμένος τρόπος σύζευξης μοντελοποιείται ως αναστροφέας με σταθερά G (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 14). Ειδικότερα, η είσοδος του αναστροφέα είναι η αντι-ηλεκτρεγερτική δύναμη (τάση) U_G (‘σθένος’) στα άκρα του ηλεκτροκινητήρα και η ένταση του ρεύματος i (‘ροή’), το οποίο διαρρέει τον ηλεκτροκινητήρα. Η έξοδος του αναστροφέα είναι η ροπή M_G (‘σθένος’), η οποία μεταφέρεται μέσω του περιστρεφόμενου άξονα σταθεράς J, και η γωνιακή ταχύτητα ω (‘ροή’), με την οποία περιστρέφεται ο συγκεκριμένος άξονας.



Σχήμα 2: Σύζευξη ηλεκτροκινητήρα – άξονα.

Σύμφωνα με την Εξ.(17) της Εκπαιδευτικής Ενότητας 14, ισχύει:

$$U_G = G\,\omega \tag{13}$$

και

$$i = \left(\frac{1}{G}\right) M_G \tag{14}$$

Από τις Εξ.(13,14) καθίσταται φανερό ότι τα κινηματικά μεγέθη (ροές) i και ω δεν συνδέονται άμεσα (τυπικό χαρακτηριστικό των αναστροφέων). Ωστόσο, σύμφωνα με την Εξ.(15) της Εκπαιδευτικής Ενότητας 14 (διατήρηση της ισχύος σε έναν αναστροφέα, ή, ισοδύναμα, για μηδενική απώλεια ισχύος), ισχύει:

$$U_G \, i = M_G \, \omega = \sigma\tau\alpha\theta \tag{15}$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(15) γράφεται ως εξής:

$$-U_G \, i + M_G \, \omega = 0 \tag{16}$$

Μέσω της Εξ.(16), επιτυγχάνεται η σύζευξη των μεγεθών i και ω. Η φυσική σημασία της Εξ.(16) είναι άμεση: εκφράζει την ισχύ, η οποία ανταλλάσεται μέσω του αναστροφέα. Ισοδύναμα, εκφράζει την ισχύ που παρέχεται στο μηχανικό υποσύστημα από το ηλεκτρικό υποσύστημα. Είναι δυνατόν να προσθέσουμε την Εξ.(16) στο δεξί μέλος της Εξ.(12) διότι:

- το μέγεθος P_t εκφράζει παροχή ισχύος, όπως και η Εξ.(16) (άρα, οι δύο εξισώσεις έχουν την ίδια φυσική σημασία)
- η Εξ.(16) είναι ταυτοτικά μηδενική, συνεπώς η πρόσθεσή της στην Εξ.(12) δεν αλλοιώνει το αριθμητικό αποτέλεσμα της Εξ.(12).

Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτει:

$$P_t = U_S\, i - U_G\, i + M_G\, \omega \Rightarrow P_t = \left(U_S - U_G\right) i + M_G\, \omega \tag{17}$$

Διευκρινίζεται ότι οι μεταβλητές U_G και M_G αποτελούν εσωτερικές μεταβλητές του εξεταζομένου ηλεκτρομηχανικού συστήματος. **Η ανωτέρω διαδικασία αποτελεί τυπική τεχνική διαδικασία αντιμετώπισης αναστροφέων:**

Προσθέτουμε την ισχύ, η οποία ανταλλάσεται μέσω του αναστροφέα, στην ισχύ, η οποία προσφέρεται από τις εξωτερικές δυνάμεις.

Με την τεχνική αυτή, εισάγεται η συσχέτιση μεταξύ των κινηματικών μεταβλητών i και ω στο σύνολο των Εξ.(9-12), οι οποίες περιγράφουν την κατά Lagrange ενεργειακή κατάσταση του εξεταζόμενου συστήματος. Διευκρινίζεται ότι εάν σε ένα εξεταζόμενο σύστημα υπάρχουν περισσότεροι ηλεκτροκινητήρες, τότε εφαρμόζεται η ανωτέρω διαδικασία για κάθε ένα από αυτούς (δηλαδή, για κάθε ηλεκτροκινητήρα καταγράφεται εξίσωση αντίστοιχη της Εξ.(16), η οποία, στη συνέχεια, προστίθεται στο δεξί μέλος της Εξ.(12)).

Για το Βήμα 4:

Για το ηλεκτρικό υποσύστημα, ως ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή είναι δυνατόν να επιλεγεί είτε το ηλεκτρικό φορτίο q είτε η ένταση του ρεύματος i. Για το περιστρεφόμενο μηχανικό υποσύστημα, ως ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή είναι δυνατόν να επιλεγεί είτε η γωνία στροφής φ είτε η γωνιακή ταχύτητα ω. Προς διευκόλυνση στην εκτέλεση των πράξεων, ως ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) επιλέγονται οι ποσότητες q και φ.

Για το Βήμα 5:

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \tag{18}$$

όπου ως q συμβολίζεται η ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας). Άρα:

- Για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = q$, ισχύει:

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial L}{\partial i} = \frac{\partial (T-U)}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\left\{\frac{1}{2}\,J\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,L_e\,i^2 - 0\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial i} = L_e\,i \tag{19}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(19) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_e\,i\right) = L_e\left(\frac{di}{dt}\right) \tag{20}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=q} -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{1}{2}\,J\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,L_e\,i^2 - 0\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{21}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial P_C}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{1}{2}\,c_\varphi\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,R_e\,i^2\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial i} = R_e\,i \tag{22}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial P_t}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\Big(\left(U_S - U_G\right)i + M_G\,\omega\Big) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial i} = \left(U_S - U_G\right) \tag{23}$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{q}=i]{q=q} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial i} = \frac{\partial P_t}{\partial i} \tag{24}$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(24), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial i} = \frac{\partial P_t}{\partial i} \Rightarrow L_e\left(\frac{di}{dt}\right) + 0 + R_e\,i = \left(U_S - U_G\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_e\left(\frac{di}{dt}\right) + R_e\,i = \left(U_S - U_G\right) \tag{25}$$

- Κατ' αντιστοιχία, για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = \varphi$, ισχύει:

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega]{q=\varphi} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\frac{1}{2}\,J\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,L_e\,i^2 - 0\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \omega} = J\,\omega \tag{26}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(26) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) = \frac{d}{dt}\left(J\,\omega\right) = J\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \tag{27}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q}\xrightarrow{q=\varphi}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=-\frac{\partial (T-U)}{\partial \varphi}=-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\frac{1}{2}J\,\omega^2+\frac{1}{2}L_e\,i^2-0\right\}\Rightarrow-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \tag{28}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega]{q=\varphi}\frac{\partial P_C}{\partial \omega}=\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{2}c_\varphi\,\omega^2+\frac{1}{2}R_e\,i^2\right)\Rightarrow\frac{\partial P_C}{\partial \omega}=c_\varphi\,\omega \tag{29}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=i]{q=x}\frac{\partial P_t}{\partial i}=\frac{\partial}{\partial i}\big((U_S-U_G)\,i+M_G\,\omega\big)\Rightarrow\frac{\partial P_t}{\partial i}=M_G \tag{30}$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=i]{q=q}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial i}=\frac{\partial P_t}{\partial i} \tag{31}$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(31), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}+\frac{\partial P_C}{\partial \omega}=\frac{\partial P_t}{\partial \omega}\Rightarrow J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)+0+c_\varphi\,\omega=M_G\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)+c_\varphi\,\omega=M_G \tag{32}$$

Συνεπώς, η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange καταλήγει στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$L_e\left(\frac{di}{dt}\right)+R_e\,i=(U_S-U_G) \tag{33}$$

$$J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)+c_\varphi\,\omega=M_G \tag{34}$$

Υπενθυμίζεται ότι, όπως είχε αναφερθεί και στο Βήμα 3, οι μεταβλητές U_G και M_G, οι οποίες εμφανίζονται στις Εξ.(33,34) ως εξωτερικά σθένη, είναι εσωτερικές μεταβλητές του συστήματος. Με τη βοήθεια των Εξ.(33,34) είναι σαν να έχει διαχωρισθεί το σύνθετο σύστημα σε δύο διαφορετικά υποσυστήματα (ένα ηλεκτρικό κύκλωμα και ένα μηχανικό υποσύστημα), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω των εσωτερικών μεταβλητών U_G, M_G.

Για το Βήμα 6:

Αντικαθιστώντας στις Εξ.(33,34) τις μεταβλητές U_G και M_G από τις Εξ.(13,14), προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης του συζευγμένου συστήματος:

$$L_e\left(\frac{di}{dt}\right)+R_e\,i=(U_S-G\,\omega)\Rightarrow L_e\left(\frac{di}{dt}\right)+R_e\,i+G\,\omega=U_S \tag{35}$$

$$J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)+c_{\varphi}\,\omega=G\,i\Rightarrow J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)+c_{\varphi}\,\omega-G\,i=0 \quad (36)$$

Διευκρινίζεται ότι η Εξ.(35) εκφράζει το νόμο πτώσης τάσης του Kirchhoff στο ηλεκτρικό κύκλωμα, ενώ η Εξ.(36) εκφράζει την ισορροπία των ροπών στο μηχανικό υποσύστημα. Στις Εξ.(35,36) αναγνωρίζουμε ότι:

- Στο δεξί μέλος τους εμφανίζεται μόνον η πραγματική εξωτερική διέγερση U_S .
- Στο αριστερό μέλος τους, η εμφάνιση της σταθεράς του αναστροφέα G στους όρους $G\omega$ και Gi δηλώνει τη σύζευξη των δύο υποσυστημάτων.

Τεχνική Παρατήρηση

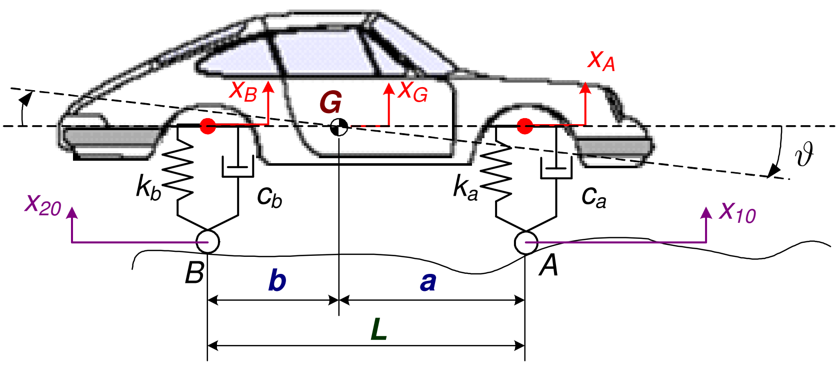
Ο πειραματικός υπολογισμός της απόσβεσης ενός εδράνου κύλισης (ρουλεμάν) είναι δυνατόν να επιτευχθεί με τον εξής τρόπο: θέτουμε σε περιστροφή τον άξονα ο οποίος εδράζεται στο υπό μέτρηση ρουλεμάν (π.χ. με τη βοήθεια ενός ηλεκτροκινητήρα). Στην συνέχεια αποσυμπλέκουμε τον ηλεκτροκινητήρα από τον άξονα και τον αφήνουμε να περιστραφεί ελεύθερα. Ο άξονας θα συνεχίσει να περιστρέφεται με συνεχώς μειούμενη ταχύτητα περιστροφής, λόγω της απόσβεσης που εμφανίζει το έδρανο κύλισης. Με βάση την σταθερά μείωσης της ταχύτητας περιστροφής (e^{-st}) εκτιμάται πειραματικά η απόσβεση του εδράνου κύλισης η οποία περιγράφεται από την ακόλουθη Διαφορική Εξίσωση:

$$J\left(\frac{d\omega}{dt}\right)+c_{\varphi}\,\omega=0 \quad (37)$$

όπου c_{φ} είναι η σταθερά απόσβεσης του εδράνου κύλισης, J η ροπή αδρανείας της περιστροφικής μάζας (άξονας και σφόνδυλος) και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του άξονα. Με βάση την Εξ.(37) και από την πειραματική καταγραφή της καμπύλης $\omega=\omega(t)$, είναι δυνατός ο προσδιορισμός της σταθεράς απόσβεσης c_{φ}.

Εφαρμογή #2: Απλοποιημένη Δυναμική Οχήματος

Έστω το απλοποιημένο μοντέλο οχήματος του Σχήματος 3.



Σχήμα 3: Απλοποιημένη δυναμική οχήματος

Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3 διακρίνονται τέσσερα βασικά στοιχεία του οχήματος:

- Το πρόσθιο σύστημα ανάρτησης, το οποίο μοντελοποιείται ως ένα ελατήριο σταθεράς k_a συνδεδεμένο παράλληλα με έναν αποσβεστήρα σταθεράς απόσβεσης c_a. Η κατακόρυφη κίνηση του άνω σημείου της εν λόγω ανάρτησης σημειώνεται ως x_A, ενώ το κάτω σημείο της δέχεται κινηματική διέγερση x_{10} από το οδόστρωμα.
- Το οπίσθιο σύστημα ανάρτησης, το οποίο μοντελοποιείται ως ένα ελατήριο σταθεράς k_b συνδεδεμένο παράλληλα με έναν αποσβεστήρα σταθεράς απόσβεσης c_b. Η κατακόρυφη κίνηση του άνω σημείου της εν λόγω ανάρτησης σημειώνεται ως x_B, ενώ το κάτω σημείο της δέχεται κινηματική διέγερση x_{20} από το οδόστρωμα.
- Το κέντρο βάρους G του οχήματος, το οποίο απέχει απόσταση a από τον πρόσθιο άξονα του οχήματος και απόσταση b από τον οπίσθιο άξονα του οχήματος. Το μεταξόνιο του οχήματος (απόσταση μεταξύ πρόσθιου και οπίσθιου άξονα οχήματος), ισούται με $L = a + b$. Η, δε, κατακόρυφη κίνηση του κέντρου βάρους G σημειώνεται ως x_G.
- Ο διαμήκης άξονας του οχήματος, ο οποίος περιστρέφεται περί του κέντρου βάρους G κατά γωνία ϑ.

Υπό την παραδοχή ότι το όχημα μάζας M και ροπής αδρανείας I κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_g επί οριζοντίου ανωμάλου οδοστρώματος, να βρεθούν οι εξισώσεις της κατακόρυφης κίνησης του οχήματος.

Λύση

Το απλοποιημένο μοντέλο του οχήματος είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως σύνθετο σύστημα, αποτελούμενο από τρία δυναμικά υποσυστήματα: το πρόσθιο σύστημα ανάρτησης, το οπίσθιο σύστημα ανάρτησης και το πλαίσιο. Για την επίλυσή του, ακολουθείται η διαδικασία, η οποία εφαρμόσθηκε και στην προηγούμενη εφαρμογή:

Βήμα 1: Για ***κάθε υποσύστημα***, καταγραφή των κατά Lagrange ενεργειακών όρων (π.χ. βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01, 07) και χρήση του Πίνακα 1 της Εκπαιδευτικής Ενότητας 13 σχετικά με την αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών συστημάτων.

Βήμα 2: Άθροιση των αντιστοίχων επί μέρους ενεργειακών όρων, οι οποίοι προκύπτουν από το Βήμα 1, προς καταγραφή των κατά Lagrange ενεργειακών όρων, για ***ολόκληρο το σύστημα***.

Βήμα 3: Σύζευξη των προαναφερθέντων υποσυστημάτων μέσω της κινηματικής συμπεριφοράς του πλαισίου.

Βήμα 4: Επιλογή της ανεξάρτητης κινηματικής μεταβλητής (Βαθμός Ελευθερίας), ως προς την οποία θα αναγραφούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Βήμα 5: Εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, χρησιμοποιώντας τους ενεργειακούς όρους από το Βήμα 2.

Αναλυτικότερα:

Για το Βήμα 1:
Για το πρόσθιο σύστημα ανάρτησης:

- Δεν υπάρχει στοιχείο συσσώρευσης κινητικής ενέργειας (μάζα)
- Δυναμική ενέργεια αποθηκεύεται στο ελατήριο σταθεράς k_a
- Ισχύς διαχέεται στον αποσβεστήρα σταθεράς c_a
- Δεν διατίθεται εξωτερική ισχύς
- Επιβάλλεται κινηματική διέγερση x_{10}

Κατ' αντιστοιχία, για το οπίσθιο σύστημα ανάρτησης:

- Δεν υπάρχει στοιχείο συσσώρευσης κινητικής ενέργειας (μάζα)
- Δυναμική ενέργεια αποθηκεύεται στο ελατήριο σταθεράς k_b
- Ισχύς διαχέεται στον αποσβεστήρα σταθεράς c_b
- Δεν διατίθεται εξωτερική ισχύς
- Επιβάλλεται κινηματική διέγερση x_{20}

Για το πλαίσιο:

- Συσσωρεύεται κινητική ενέργεια λόγω της ευθύγραμμης κίνησης του πλαισίου μάζας M με σταθερή ταχύτητα υ_g και λόγω της περιστροφής του πλαισίου αδράνειας I με γωνιακή ταχύτητα ω
- Δεν υπάρχει στοιχείο αποθήκευσης δυναμικής ενέργειας (δηλαδή, δεν υπάρχει ούτε ελατήριο ούτε στροφικό ελατήριο)
- Δεν υπάρχει στοιχείο διάχυσης ισχύος (δεν υπάρχει αποσβεστήρας)
- Δεν διατίθεται εξωτερική ισχύς
- ***Η κινηματική κατάσταση καθορίζεται από τις αποκρίσεις x_A και x_B.***

Με βάση τις ανωτέρω πληροφορίες, υπολογίζονται οι ενεργειακοί όροι των τριών υποσυστημάτων του εξεταζομένου συστήματος. Οι εν λόγω όροι παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Ενεργειακοί όροι του συστήματος του Σχήματος 3

	Κινητική ενέργεια T	Δυναμική ενέργεια U	Διάχυση ισχύος P_c	Εξωτερική ισχύς P_t
(a)	$T_a = 0$	$U_a = 0.5\, k_a \left(x_A - x_{10}\right)^2$	$P_{c,a} = 0.5\, c_a \left(\dot{x}_A - \dot{x}_{10}\right)^2$	$P_{t,a} = 0$
(b)	$T_b = 0$	$U_b = 0.5\, k_b \left(x_B - x_{20}\right)^2$	$P_{c,b} = 0.5\, c_b \left(\dot{x}_B - \dot{x}_{20}\right)^2$	$P_{t,b} = 0$
(c)	$T_c = 0.5M\upsilon_g^2 + 0.5I\omega^2$	$U_c = 0$	$P_{c,c} = 0$	$P_{t,c} = 0$

(a)**:** Πρόσθιο σύστημα ανάρτησης (b)**:** Οπίσθιο σύστημα ανάρτησης (c)**:** Πλαίσιο

Για το Βήμα 2:

Συνολικά, για το εξεταζόμενο σύστημα, οι ενεργειακοί όροι προκύπτουν από την άθροιση των επί μέρους όρων. Πιο συγκεκριμένα, από τον Πίνακα 1 και με άθροιση κατά στήλες, προκύπτει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T = T_a + T_b + T_c \Rightarrow T = 0.5 M \upsilon_g^2 + 0.5 I \omega^2 \tag{38}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος ισούται με:

$$U = U_a + U_b + U_c \Rightarrow U = 0.5\ k_a\ \left(x_A - x_{10}\right)^2 + 0.5\ k_b\ \left(x_B - x_{20}\right)^2 \tag{39}$$

- Η ενέργεια P_C του συστήματος, η οποία διαχέεται, ισούται με:

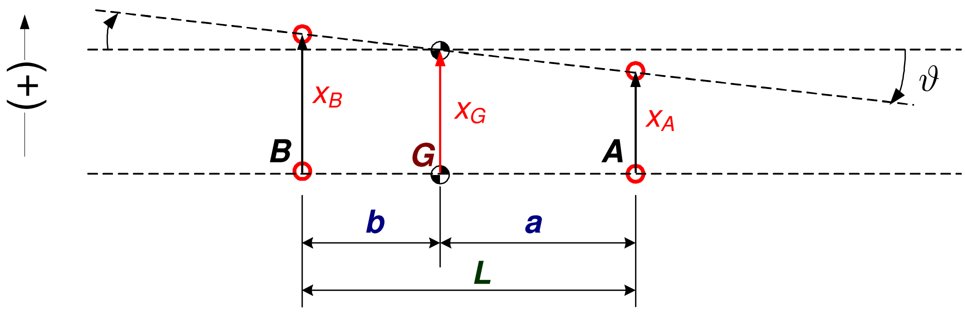
$$P_C = P_{C,a} + P_{C,b} + P_{C,c} \Rightarrow P_C = 0.5\ c_a\ \left(\dot{x}_A - \dot{x}_{10}\right)^2 + 0.5\ c_b\ \left(\dot{x}_B - \dot{x}_{20}\right)^2 \tag{40}$$

- Η, εξωτερικά προσφερόμενη στο σύστημα, ισχύς P_t ισούται με:

$$P_t = P_{t,a} + P_{t,b} + P_{t,c} \Rightarrow P_t = 0 \tag{41}$$

Για το Βήμα 3:

Η κινηματική του πλαισίου του οχήματος απεικονίζεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Κινηματική του Κέντρου Βάρους G του οχήματος

Πιο συγκεκριμένα, η κίνηση του διαμήκους άξονα του πλαισίου αποτελεί τη σύνθεση μίας κατακόρυφης μετατόπισης κατά x_G και μίας περιστροφής περί του Κέντρου Βάρους G κατά γωνία ϑ. Για πολύ μικρή γωνία περιστροφής ϑ, ισχύει:

$$\tan\left(\vartheta\right) \approx \vartheta \tag{42}$$

Με βάση αυτήν την παραδοχή (δηλαδή, με βάση την Εξ.(42)) και το Σχήμα 4 (θετική φορά μετατοπίσεων: προς τα πάνω), η κίνηση των σημείων A (άνω σημείο του πρόσθιου συστήματος ανάρτησης) και B (άνω σημείο του οπίσθιου συστήματος ανάρτησης) περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$-a\vartheta + x_G = x_A \tag{43}$$

$$b\vartheta + x_G = x_B \tag{44}$$

Επιλύοντας τις Εξ.(43,44) ως προς x_G και ϑ, προκύπτει:

$$\vartheta = \frac{\begin{vmatrix} x_A & 1 \\ x_B & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\left(x_A - x_B\right)}{\left(-a-b\right)} = \frac{\left(x_A - x_B\right)}{-\left(a+b\right)} = -\frac{\left(x_A - x_B\right)}{\left(a+b\right)} \xrightarrow{L=(a+b)} \vartheta = \frac{\left(x_B - x_A\right)}{L} \tag{45}$$

$$x_G = \frac{\begin{vmatrix} -a & x_A \\ b & x_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\left(-ax_B - bx_A\right)}{\left(-a-b\right)} = \frac{-\left(ax_B + bx_A\right)}{-\left(a+b\right)} = \frac{\left(ax_B + bx_A\right)}{\left(a+b\right)} \xrightarrow{L=(a+b)} x_G = \frac{\left(ax_B + bx_A\right)}{L} \tag{46}$$

Με τις Εξ.(45,46), οι κινηματικές μεταβλητές x_A και x_B συνδέονται με τις κινηματικές μεταβλητές x_G και ϑ.

Βήμα 4:

Οι εμπλεκόμενες κινηματικές μεταβλητές είναι x_A, x_B, x_G, ϑ, x_{10} και x_{20}. Οι μεταβλητές x_{10} και x_{20} περιγράφουν την εξωτερική κινηματική διέγερση (διέγερση οδοστρώματος) και αποτελούν γνωστές συναρτήσεις του χρόνου $f\left(t\right)$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση αρμονικού οδοστρώματος ισχύει:

$$x_{10} = f\left(t\right) \Rightarrow x_{10} = x_o \cos\left(2\pi \frac{\upsilon_{οχήματος}}{L_{οδοστρώματος}} t\right) \tag{47}$$

όπου ως $\upsilon_{οχήματος}$ συμβολίζεται η ταχύτητα του οχήματος και ως $L_{οδοστρώματος}$ συμβολίζεται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών τοπικών ακροτάτων της ημιτονοειδούς μορφής του οδοστρώματος. Εάν, λοιπόν, η διέγερση x_{10} στο πρόσθιο σύστημα ανάρτησης δίδεται από τη συνάρτηση $f\left(t\right)$, τότε η διέγερση x_{20} στο οπίσθιο σύστημα ανάρτησης δίδεται από την συνάρτηση:

$$x_{20} = f\left(t - \frac{L}{\upsilon_{οχήματος}}\right) \tag{48}$$

όπου ως L συμβολίζεται το μεταξόνιο του οχήματος. Οι υπόλοιπες τέσσερεις μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους μέσω δύο εξισώσεων (είτε μέσω των Εξ.(43,44) είτε μέσω των Εξ.(45,46)). Συνεπώς, το εξεταζόμενο σύστημα διαθέτει δύο ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας): είτε τις x_A, x_B είτε τις x_G, ϑ. Για λόγους ευκολίας εκτέλεσης πράξεων, επιλέγονται οι μεταβλητές x_A και x_B ως Βαθμοί Ελευθερίας του εξεταζομένου συστήματος.

Βήμα 5:
Από την Εξ.(38), προκύπτει η έκφραση της κινητικής ενέργειας T του εξεταζομένου συστήματος συναρτήσει των μεταβλητών ω και υ_g, όπου:

$$\omega = \dot{\vartheta} \tag{49}$$

$$\upsilon_g = \dot{x}_G \tag{50}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(45,49) δίδει:

$$\omega = \dot{\vartheta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{(x_B - x_A)}{L}\right) \Rightarrow \omega = \frac{(\dot{x}_B - \dot{x}_A)}{L} \tag{51}$$

Επίσης, ο συνδυασμός των Εξ.(46,50) δίδει:

$$\upsilon_G = \dot{x}_G = \frac{d}{dt}\left(\frac{(ax_B + bx_A)}{L}\right) \Rightarrow \upsilon_G = \frac{(a\dot{x}_B + b\dot{x}_A)}{L} \tag{52}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(38) με τις Εξ.(51,52), η κινητική ενέργεια του εξεταζομένου συστήματος γράφεται συναρτήσει των ανεξαρτήτων κινηματικών μεταβλητών ως εξής:

$$T = 0.5M\left(\frac{(a\dot{x}_B + b\dot{x}_A)}{L}\right)^2 + 0.5I\left(\frac{(\dot{x}_B - \dot{x}_A)}{L}\right)^2 \tag{53}$$

Κατά τα γνωστά, η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \tag{54}$$

όπου ως q συμβολίζεται η ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας). Άρα:

- Για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = x_A$, ισχύει:

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_A=\upsilon_A]{q=x_A} \frac{\partial L}{\partial \upsilon_A} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \upsilon_A} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \upsilon_A}\left\{0.5M\left(\frac{(a\dot{x}_B + b\dot{x}_A)}{L}\right)^2 + 0.5I\left(\frac{(\dot{x}_B - \dot{x}_A)}{L}\right)^2 - \left(0.5\,k_a\,(x_A - x_{10})^2 + 0.5\,k_b\,(x_B - x_{20})^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \upsilon_A} = M\,\frac{(a\dot{x}_B + b\dot{x}_A)b}{L^2} + I\left(\frac{(\dot{x}_B - \dot{x}_A)(-1)}{L^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \upsilon_A} = \frac{(Mab\dot{x}_B + Mb^2\dot{x}_A)}{L^2} + \frac{(I\dot{x}_A - I\dot{x}_B)}{L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \upsilon_A} = \frac{\left(Mb^2 + I\right)}{L^2}\dot{x}_A + \frac{\left(Mab - I\right)}{L^2}\dot{x}_B \tag{55}$$

Ορίζουμε:

$$m_A = \frac{\left(Mb^2 + I\right)}{L^2} \tag{56}$$

και

$$m_{AB} = \frac{\left(Mab - I\right)}{L^2} \tag{57}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(55,56,57) δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \upsilon_A} = m_A\dot{x}_A + m_{AB}\dot{x}_B \tag{58}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(58) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon_A}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_A\dot{x}_A + m_{AB}\dot{x}_B\right) = m_A\ddot{x}_A + m_{AB}\ddot{x}_B \tag{59}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=x_A} -\frac{\partial L}{\partial x_A} = -\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial x_A} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_A}\left\{0.5M\left(\frac{\left(a\dot{x}_B + b\dot{x}_A\right)}{L}\right)^2 + 0.5I\left(\frac{\left(\dot{x}_B - \dot{x}_A\right)}{L}\right)^2 - \left(0.5\ k_a\ \left(x_A - x_{10}\right)^2 + 0.5\ k_b\ \left(x_B - x_{20}\right)^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_A} = -\left(-k_a\ \left(x_A - x_{10}\right)\right) \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_A} = k_a\ \left(x_A - x_{10}\right) \tag{60}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_A=\upsilon_A]{q=x_A} \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_A} = \frac{\partial}{\partial \upsilon_A}\left(0.5\ c_a\ \left(\dot{x}_A - \dot{x}_{10}\right)^2 + 0.5\ c_b\ \left(\dot{x}_B - \dot{x}_{20}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_A} = c_a\ \left(\dot{x}_A - \dot{x}_{10}\right) \tag{61}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_A=\upsilon_A]{q=x_A} \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_A} = \frac{\partial}{\partial \upsilon_A}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_A} = 0 \tag{62}$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_A=\upsilon_A]{q=x_A} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon_A}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_A} + \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_A} = \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_A} \tag{63}$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(63), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon_A}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_A}+\frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_A}=\frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_A}\Rightarrow m_A\ddot{x}_A+m_{AB}\ddot{x}_B+k_a\left(x_A-x_{10}\right)+c_a\left(\dot{x}_A-\dot{x}_{10}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_A\ddot{x}_A+m_{AB}\ddot{x}_B+c_a\,\dot{x}_A+k_a\,x_A=c_a\,\dot{x}_{10}+k_a\,x_{10} \tag{64}$$

- Κατ’ αντιστοιχία, για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q=x_B$, ισχύει:

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_B=\upsilon_B]{q=x_B}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}=\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \upsilon_B}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \upsilon_B}\left\{0.5M\left(\frac{\left(a\dot{x}_B+b\dot{x}_A\right)}{L}\right)^2+0.5I\left(\frac{\left(\dot{x}_B-\dot{x}_A\right)}{L}\right)^2-\left(0.5\,k_a\left(x_A-x_{10}\right)^2+0.5\,k_b\left(x_B-x_{20}\right)^2\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}=M\left(\frac{\left(a\dot{x}_B+b\dot{x}_A\right)a}{L}\right)+I\left(\frac{\left(\dot{x}_B-\dot{x}_A\right)}{L}\right)\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}=\frac{\left(Ma^2\dot{x}_B+Mab\dot{x}_A\right)}{L^2}+\frac{\left(I\dot{x}_B-I\dot{x}_A\right)}{L^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}=\frac{\left(Ma^2+I\right)}{L^2}\dot{x}_B+\frac{\left(Mab-I\right)}{L^2}\dot{x}_A \tag{65}$$

Ορίζουμε:

$$m_B=\frac{\left(Ma^2+I\right)}{L^2} \tag{66}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(57,65,66) δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}=m_{AB}\dot{x}_A+m_B\dot{x}_B \tag{67}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(67) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}\right)=\frac{d}{dt}\left(m_{AB}\dot{x}_A+m_B\dot{x}_B\right)=m_{AB}\ddot{x}_A+m_B\ddot{x}_B \tag{68}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q}\xrightarrow{q=x_B}-\frac{\partial L}{\partial x_B}=-\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial x_B}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_B}\left\{0.5M\left(\frac{\left(a\dot{x}_B+b\dot{x}_A\right)}{L}\right)^2+0.5I\left(\frac{\left(\dot{x}_B-\dot{x}_A\right)}{L}\right)^2-\left(0.5\,k_a\left(x_A-x_{10}\right)^2+0.5\,k_b\left(x_B-x_{20}\right)^2\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_B} = -\left(-\left(k_b\ \left(x_B - x_{20}\right)\right)\right) \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial x_B} = k_b\ \left(x_B - x_{20}\right) \tag{69}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_B=\upsilon_B]{q=x_B} \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_B} = \frac{\partial}{\partial \upsilon_B}\left(0.5\ c_a\ \left(\dot{x}_A - \dot{x}_{10}\right)^2 + 0.5\ c_b\ \left(\dot{x}_B - \dot{x}_{20}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_B} = c_b\ \left(\dot{x}_B - \dot{x}_{20}\right) \tag{70}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_B=\upsilon_B]{q=x_B} \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_B} = \frac{\partial}{\partial \upsilon_B}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_B} = 0 \tag{71}$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{x}_B=\upsilon_B]{q=x_B} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_B} + \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_B} = \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_B} \tag{72}$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(72), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon_B}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_B} + \frac{\partial P_C}{\partial \upsilon_B} = \frac{\partial P_t}{\partial \upsilon_B} \Rightarrow m_{AB}\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B + k_b\ \left(x_B - x_{20}\right) + c_b\ \left(\dot{x}_B - \dot{x}_{20}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{AB}\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B + c_b\ \dot{x}_B + k_b x_B = c_b\ \dot{x}_{20} + k_b x_{20} \tag{73}$$

Με βάση τα ανωτέρω, οι εξισώσεις κίνησης του εξεταζομένου σώματος είναι:

$$\begin{Bmatrix} m_A\ddot{x}_A + m_{AB}\ddot{x}_B + c_a\ \dot{x}_A + k_a\ x_A = c_a\ \dot{x}_{10} + k_a\ x_{10} \\ m_{AB}\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B + c_b\ \dot{x}_B + k_b x_B = c_b\ \dot{x}_{20} + k_b x_{20} \end{Bmatrix} \tag{74}$$

Σε μητρωϊκή γραφή, η Εξ.(74) γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} m_A & m_{AB} \\ m_{AB} & m_B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & c_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & c_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} \tag{75}$$