ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα16^{η}

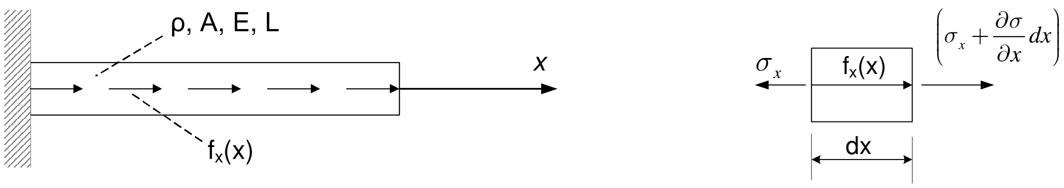
Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων συνεχούς μέσου - Μοντελοποίηση δοκού σε εφελκυσμό - Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Εισαγωγή)

Γενικά

Μέχρι στιγμής, στις προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες, εξετάσθηκαν ***διακριτά*** δυναμικά συστήματα, δηλαδή δυναμικά συστήματα, τα οποία είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από μία συγκεκριμένη διάταξη (συνδεσμολογία) πεπερασμένου πλήθους δυναμικών στοιχείων, όπως είναι η μάζα, το ελατήριο και ο αποσβεστήρας. Ως παράδειγμα, αναφέρεται η απλοποιημένη θεώρηση της ανάρτησης ενός οχήματος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 04 / Σχήμα 4). Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση δεν επαρκεί σε όλες τις περιπτώσεις. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν το αμάξωμα ενός οχήματος, η πτέρυγα ενός αεροσκάφους και ο άξονας μίας μηχανής. Αυτά αποτελούν συστήματα ***συνεχούς μέσου*** (ισοδύναμα, συνεχή συστήματα ή κατανεμημένα συστήματα), η χρονική απόκριση των οποίων καθορίζεται τόσο από τη ***χωρική κατανομή*** όσο και από τις ***ιδιότητες*** του υλικού κατασκευής. Η μοντελοποίηση ενός συνεχούς μέσου αποτελεί προέκταση της μοντελοποίησης των διακριτών συστημάτων, συνεπώς και σε αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν οι, γνωστές από τη Μηχανική, ενεργειακές μέθοδοι, όπως είναι η Ενεργειακή Αρχή Lagrange.

Δοκός σε εφελκυσμό

Έστω η μονόπακτη δοκός (πρόβολος) του Σχήματος 1α, η οποία υπόκειται σε εφελκυσμό.



(α) (β)

Σχήμα 1: Μονόπακτη δοκός σε εφελκυσμό: (α) σχηματική αναπαράσταση και (β) ισορροπία στοιχειώδους τμήματος, μήκους dx, της δοκού

Η περίπτωση της δοκού του Σχήματος 1α αποτελεί την πλέον απλή περίπτωση συνεχούς συστήματος (ισοδύναμα, συστήματος συνεχούς μέσου). Ειδικότερα, πρόκειται για μία δοκό μήκους L, διατομής με εμβαδόν A και κατασκευασμένης από υλικό πυκνότητας ρ και μέτρου ελαστικότητας E. Κατά τον διαμήκη άξονα x της δοκού, γύρω από τον οποίο είναι κατανεμημένη η μάζα της δοκού, επιβάλλεται κατανεμημένο εφελκυστικό φορτίο $f(x)$. Τυπική περίπτωση εμφάνισης τέτοιου είδους φόρτισης αποτελεί η θερμοκρασιακή συστολή ή διαστολή της δοκού, η οποία επιτυγχάνεται όταν στα δύο άκρα της δοκού επιβληθούν διαφορετικές θερμοκρασίες. Εξ αιτίας της επιβολής του φορτίου $f(x)$, κάθε σημείο του άξονα της δοκού εμφανίζει μία μετατόπιση $u(x,t)$, δηλαδή μία μετατόπιση u, η τιμή της οποίας εξαρτάται και από την εξεταζόμενη χρονική στιγμή t αλλά και από τη χωρική θέση (συντεταγμένη) x του εξεταζόμενου σημείου πάνω στον άξονα της δοκού. Η μετατόπιση $u(x,t)$ αποτελεί μία κινηματική μεταβλητή. Η δοκός, ως συνεχές μέσο, αποτελείται από άπειρο πλήθος υλικών σημείων. Επειδή κάθε υλικό σημείο χαρακτηρίζεται από τη δική του μετατόπιση, άρα από τη δική του κινηματική μεταβλητή, έπεται ότι η δοκός, θεωρητικά, χαρακτηρίζεται από άπειρο πλήθος κινηματικών μεταβλητών. Στις προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες, έχει παρουσιασθεί ο τρόπος με τον οποίο ο Μηχανικός καταστρώνει την εξίσωση κίνησης ενός συστήματος πεπερασμένου πλήθους κινηματικών μεταβλητών, μέσω της Ενεργειακής Αρχής Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \tag{1}$$

Ανακύπτει, λοιπόν, άμεσα το ερώτημα με ποιον τρόπο δύναται ο Μηχανικός να καταστρώσει την εξίσωση κίνησης ενός συστήματος ***απείρου*** πλήθους κινηματικών μεταβλητών. Δεδομένου ότι η Ενεργειακή Αρχή Largrange ισχύει για κάθε σύστημα, είναι προφανές ότι η Εξ.(1) ισχύει και στην περίπτωση του απείρου πλήθους κινηματικών μεταβλητών, απλά απαιτείται επαναδιατύπωση του τρόπου υπολογισμού των επί μέρους ενεργειακών όρων.

Έστω ότι αναζητείται η εξίσωση κίνησης της δοκού του Σχήματος 1α, υπό την παραδοχή ότι οι μεταβλητές ρ, A, E είναι σταθερές κατά τον διαμήκη άξονα x και το ***υλικό*** της δοκού είναι ***γραμμικά ελαστικό***. Προς τούτο, πρώτα θα καταστρωθεί η εξίσωση ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος, μήκους dx, της δοκού (βλ. Σχήμα 1β). Από τη Μηχανική του Παραμορφωσίμου Σώματος, είναι γνωστό ότι η αξονική παραμόρφωση ε_x ενός στοιχειώδους τμήματος της δοκού, υπό την επιβολή αξονικού κατανεμημένου φορτίου f_x, ισούται με:

$$\varepsilon_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=u' \tag{2}$$

Από το νόμο του Hooke, λόγω της παραμόρφωσης ε_x, στο στοιχειώδες τμήμα της δοκού εμφανίζεται αξονική τάση σ_x ίση με:

$$\sigma_x=E\varepsilon_x \tag{3}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας (μέτρου του Young) του υλικού της δοκού. Ο συνδυασμός των Εξ.(2,3) δίδει:

$$\sigma_x=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4}$$

Από την ***στατική*** ισορροπία στο στοιχειώδες τμήμα του Σχήματος 1β, και χρησιμοποιώντας, για τις τάσεις, ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξεως, προκύπτει:

$$\sum F_x=0\Rightarrow f_x dx+A\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)-A\sigma_x=0\Rightarrow f_x dx+A\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)dx=0 \tag{5}$$

Εισάγοντας την Εξ.(4) στην Εξ.(5), προκύπτει:

$$f_x dx + A\frac{\partial}{\partial x}\left(E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)dx = 0 \Rightarrow f_x dx + AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx = 0 \tag{6}$$

Για την κατάστρωση της εξίσωσης της ***δυναμικής*** ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος του Σχήματος 1β, αξιοποιείται η Αρχή του D'Alembert. Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με την Αρχή του D'Alembert, η εξίσωση της δυναμικής ισορροπίας ενός σώματος προκύπτει εάν, στην εξίσωση της στατικής ισορροπίας, προστεθεί ο αδρανειακός όρος του σώματος, με φορά αντίθετη από αυτήν της συνισταμένης των εξωτερικών δυνάμεων. Για το στοιχειώδες τμήμα, μήκους dx, της δοκού, ο αδρανειακός όρος ισούται με (θεωρώντας ότι το μήκος dx είναι πολύ μικρό, δεχόμαστε ότι η ταχύτητα $\dot{u}$ είναι σταθερή σε όλη την έκταση του τμήματος μήκους dx):

$$ma \xrightarrow[a=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)]{m=\rho A dx} \rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx \tag{7}$$

Με βάση τα ανωτέρω, η ***δυναμική*** ισορροπία του στοιχειώδους τμήματος του Σχήματος 1β εκφράζεται ως εξής:

$$-\rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx + AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx + f_x dx = 0 \Rightarrow -\rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + f_x = 0 \tag{8}$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(8) γράφεται και ως εξής:

$$-\rho A\ddot{u} + AEu'' = -f_x \tag{9}$$

Στην Εξ.(9) αναγνωρίζουμε ότι οι δυνάμεις αδρανείας $\left(-\rho A\ddot{u}\right)$ και οι δυνάμεις ελαστικότητας $\left(AEu''\right)$ εξισορροπούν τις εξωτερικές δυνάμεις $\left(-f_x\right)$.

Σε ένα τυπικό δυναμικό σύστημα $m-k$, η εξίσωση κίνησης ισούται με (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02 / Εξ.(1) για $c=0$):

$$m\ddot{x} + k\,x = F\left(t\right) \tag{10}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ.(9,10), προκύπτει ότι αυτές, αν και εμπλέκουν όρους με την ίδια φυσική σημασία (όροι αδράνειας, όροι ελαστικότητας και εξωτερικές δυνάμεις) εμφανίζουν μία σημαντική διαφορά: η Εξ.(10) αφορά σε ***ολόκληρο*** το δυναμικό σύστημα, ενώ η Εξ.(9) αφορά σε κάθε ***στοιχειώδες τμήμα*** αυτού. Η ισχύς της Εξ.(9) σε κάθε σημείο της εξεταζομένης δοκού (συνεχές μέσο) αναγνωρίζεται ποιοτικά από την παρουσία της χωρικής παραγώγου u'', η οποία δηλώνει ότι οι δυνάμεις ελαστικότητας εν γένει μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο ενός συνεχούς σώματος. Αντίστοιχες παρατηρήσεις είναι δυνατόν να διατυπωθούν και για άλλες περιπτώσεις φορέων, όπως είναι η πλάκα και το κέλυφος, καθώς και για άλλες περιπτώσεις φόρτισης, όπως είναι η κάμψη και η στρέψη.

Σχετικά με την κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης της εξεταζομένης δοκού, θα χρησιμοποιήσουμε την Ενεργειακή Αρχή Lagrange (βλ. Εξ.(1)). Στην Εκπαιδευτική Ενότητα 07, παρουσιάσθηκε η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για δυναμικά συστήματα, τα οποία περιγράφονται από την Εξ.(10). Επειδή η Εξ.(10) είναι όμοια με την Εξ.(9), έπεται ότι ο υπολογισμός των ενεργειακών όρων, οι οποίοι αναφέρθηκαν στην Εκπαιδευτική Ενότητα 07, εφαρμόζεται και για συστήματα τα οποία περιγράφονται από την Εξ.(9), αλλά με τη ***σημαντική διαφορά ότι η εφαρμογή αφορά στοιχειώδη τμήματα του συστήματος*** (του φορέα εν προκειμένω). Από μαθηματικής απόψεως, αυτό σημαίνει ότι:

- Η κινητική ενέργεια dT του ***στοιχειώδους τμήματος*** του φορέα, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα dm του εν λόγω στοιχειώδους τμήματος, ισούται με (όπως και προηγουμένως, θεωρούμε ότι το μήκος dx είναι πολύ μικρό και δεχόμαστε ότι η ταχύτητα $\dot{u}$ είναι σταθερή σε όλη την έκταση του τμήματος μήκους dx):

$$dT = \frac{1}{2} dm \dot{u}^2 \xrightarrow{m=\rho A dx} dT = \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 dx \tag{11}$$

- Η δυναμική ενέργεια dU του ***στοιχειώδους τμήματος*** του φορέα, η οποία συσσωρεύεται, λόγω της ελαστικότητας E του υλικού, στον όγκο του εν λόγω τμήματος, ισούται με:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV \xrightarrow{\sigma_x = E\varepsilon_x} \frac{1}{2} E\left(\varepsilon_x\right)^2 dV \xrightarrow[dV=A dx]{\varepsilon_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=u'} dU = \frac{1}{2} E\left(u'\right)^2 A dx \tag{12}$$

- Στο ***στοιχειώδες τμήμα*** του φορέα δεν διαχέεται ενέργεια dP_C, διότι θεωρήθηκε ότι το υλικό του φορέα είναι γραμμικά ελαστικό, άρα δεν διαθέτει χαρακτηριστικά απόσβεσης:

$$dP_C = 0 \tag{13}$$

- Η εξωτερική ισχύς dP_t, η οποία προσφέρεται στο ***στοιχειώδες τμήμα*** του φορέα, είναι:

$$dP_t = f_x \dot{u} \tag{14}$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό των ενεργειακών όρων T, U, P_C και P_t, δηλαδή για τον υπολογισμό των ενεργειακών όρων της Εξ.(1) για ***ολόκληρο*** το φορέα (και όχι μόνο για ένα στοιχειώδες τμήμα του), απαιτείται η ολοκλήρωση των Εξ.(11,12,13,14). Συνεπώς, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια T του φορέα, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m του, ισούται με:

$$T = \int_{x=0}^{x=L} dT = \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 dx \right) \Rightarrow T = \frac{1}{2} \rho A \int_{x=0}^{x=L} \left(\dot{u}^2 dx \right) \tag{15}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του φορέα, η οποία συσσωρεύεται, λόγω της ελαστικότητας E του υλικού, στον όγκο του φορέα, ισούται με:

$$U = \int_{x=0}^{x=L} dU = \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{2} E\left(u'\right)^2 A dx \Rightarrow U = \frac{1}{2} AE \int_{x=0}^{x=L} \left(u'\right)^2 dx \tag{16}$$

- Στο φορέα δεν διαχέεται ενέργεια P_C, διότι θεωρήθηκε ότι το υλικό του φορέα είναι γραμμικά ελαστικό, άρα δεν διαθέτει στοιχεία απόσβεσης, οπότε ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{17}$$

- Η εξωτερική ισχύς P_t, η οποία προσφέρεται στο φορέα, ισούται με:

$$P_t = \int_{x=0}^{x=L} dP_t = \int_{x=0}^{x=L} f_x \dot{u} dx \xrightarrow{f_x = const} P_t = f_x \int_{x=0}^{x=L} \dot{u} dx \tag{18}$$

Από τις Εξ.(15,16,17,18), προκύπτει ότι η εφαρμογή της ***Ενεργειακής Αρχής Lagrange*** σε ***συνεχή*** δυναμικά ***συστήματα*** απαιτεί τον ***υπολογισμό ολοκληρωμάτων***, η παράγουσα των οποίων εμπλέκει την άγνωστη μετατόπιση $u(x,t)$. Συνεπώς, για να καταστεί δυνατή η ολοκλήρωση, θα πρέπει, με κάποιον τρόπο, να εκφρασθεί η μετατόπιση $u(x,t)$ συναρτήσει γνωστών ή/και προσδιοριστέων ποσοτήτων. Η πλέον απλή θεώρηση, η οποία αποτελεί και τη βάση μοντελοποίησης των συνεχών συστημάτων, είναι η γραμμική παρεμβολή:

$$u(x,t) = c_1 x + c_2, \quad x \in [x_l, x_u], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Πιο συγκεκριμένα, για τιμές του x μέσα στο πεδίο ορισμού $[x_l, x_u]$, η μετατόπιση $u(x,t)$ θεωρείται ότι μεταβάλλεται γραμμικά, ενώ c_1 και c_2 είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Στην προκειμένη περίπτωση (δοκός σε εφελκυσμό), θεωρούμε το ακόλουθο πεδίο ορισμού:

$$[x_l, x_u] = [0, L] \tag{20}$$

Επομένως, ως $x_l = 0$ περιγράφεται το αριστερό άκρο της δοκού, το οποίο είναι πακτωμένο, ενώ ως $x_u = L$ περιγράφεται το δεξί άκρο της δοκού, το οποίο είναι ελεύθερο. Επειδή η Εξ.(19) πρέπει να ισχύει σε όλο το πεδίο ορισμού, θα πρέπει να ισχύει και στα άκρα x_l και x_u αυτού. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει:

- Για το άκρο x_l

  Πρόκειται για το πακτωμένο άκρο της δοκού, το οποίο είναι ακλόνητο (δεν εμφανίζει μετατόπιση, ή, ισοδύναμα, εμφανίζει μηδενική μετατόπιση. Η Εξ.(19) δίδει:

$$x = 0: \ u(x,t) = c_1 x + c_2 \Rightarrow u(0,t) = c_2 \tag{21}$$

  Το ακλόνητο άκρο εμφανίζει μηδενική μετατόπιση (συνθήκη στήριξης, ή, ισοδύναμα, οριακή συνθήκη στη θέση $x = 0$), επομένως ισχύει:

$$u(0,t) = 0 \tag{22}$$

  Ο συνδυασμός των Εξ.(21,22) δίδει:

$$c_2 = 0 \tag{23}$$

- Για το άκρο x_u

  Πρόκειται για το ελεύθερο άκρο της δοκού, το οποίο είναι δυνατόν να μετατοπισθεί οριζόντια (δηλαδή, κατά το διαμήκη άξονα της δοκού, βλ. Σχήμα 1α). Η Εξ.(19) δίδει:

$$x = L:\ u(x,t) = c_1 x + c_2 \Rightarrow u(L,t) = u_L = c_1 L + c_2 \tag{24}$$

  Εισάγοντας την Εξ.(23) στην Εξ.(24), προκύπτει:

$$u(L,t) = u_L = c_1 L \Rightarrow c_1 = \left(\frac{u_L}{L}\right) \tag{25}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(19,23,25) δίδει:

$$u(x,t) = \left(\frac{u_L(t)}{L}\right)x, \quad x \in [0, L] \tag{26}$$

Μέσω της Εξ.(26), η μετατόπιση $u(x,t)$, για οποιοδήποτε σημείο x του πεδίου ορισμού $[0, L]$, εκφράζεται συναρτήσει του (γνωστού) μήκους της δοκού και της (άγνωστης) οριζόντιας μετατόπισης του ελευθέρου άκρου της δοκού. Από την Εξ.(26), προκύπτει ότι:

- Η πρώτη ***χρονική*** παράγωγος της μετατόπισης ισούται με:

$$\dot{u}(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{u_L(t)}{L}\right)x\right] = \left(\frac{\dot{u}_L(t)}{L}\right)x, \quad x \in [0, L] \tag{27}$$

- Η πρώτη ***χωρική*** παράγωγος της μετατόπισης ισούται με:

$$u'(x,t) = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{u_L(t)}{L}\right)x\right] = \left(\frac{u_L(t)}{L}\right), \quad x \in [0, L] \tag{28}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(27,28) στις Εξ.(15,16,17,18), προκύπτει:

- Η κινητική ενέργεια T του φορέα ισούται με:

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{\dot{u}_L}{L}x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\dot{u}_L}{L}\right)^2 \int_{x=0}^{x=L} x^2 dx = \frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\dot{u}_L}{L}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=L} \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho A L}{3}\right)\dot{u}_L^2 \tag{29}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του φορέα ισούται με:

$$U = \frac{1}{2}AE \int_{x=0}^{x=L} \left(u'\right)^2 dx = \frac{1}{2}AE \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{u_L}{L}\right)^2 dx = \frac{1}{2}AE \left(\frac{u_L}{L}\right)^2 [x]_{x=0}^{x=L} \Rightarrow U = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right)u_L^{\ 2} \tag{30}$$

- Στο φορέα δεν διαχέεται ενέργεια P_C, οπότε ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{31}$$

- Η εξωτερική ισχύς P_t, η οποία προσφέρεται στο φορέα, ισούται με:

$$P_t = f_x \int_{x=0}^{x=L} \dot{u} dx = f_x \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{\dot{u}_L}{L}\right) x dx = f_x \left(\frac{\dot{u}_L}{L}\right) \int_{x=0}^{x=L} x dx = f_x \left(\frac{\dot{u}_L}{L}\right) \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=L} \Rightarrow P_t = f_x \left(\frac{L}{2}\right) \dot{u}_L \quad (32)$$

Παρατηρώντας τις Εξ.(29,30,31,32), διαπιστώνουμε ότι η μοναδική εμφανιζόμενη ***ανεξάρτητη*** κινηματική μεταβλητή είναι η μετατόπιση u_L (οριζόντια μετατόπιση του ελευθέρου άκρου της δοκού), η οποία αποτελεί και τον Βαθμό Ελευθερίας του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος (της δοκού, εν προκειμένω). Εφαρμόζοντας, κατά τα γνωστά, την Ενεργειακή Αρχή Lagrange για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = u_L$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \quad (33)$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(29,30,33), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho A L}{3}\right)\dot{u}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2 \quad (34)$$

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_L} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_L}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho A L}{3}\right)\dot{u}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_L} = \left(\frac{\rho A L}{3}\right)\dot{u}_L \quad (35)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\rho A L}{3}\right)\dot{u}_L\right) = \left(\frac{\rho A L}{3}\right)\ddot{u}_L \quad (36)$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=u_L} -\frac{\partial L}{\partial u_L} = \frac{\partial (T-U)}{\partial u_L} = -\frac{\partial}{\partial u_L}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho A L}{3}\right)\dot{u}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2\right\} = -\left\{-\left(\frac{AE}{L}\right)u_L\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial u_L} = \left(\frac{AE}{L}\right)u_L \quad (37)$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_L} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_L}(0) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_L} = 0 \quad (38)$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_L} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_L}\left(f_x \left(\frac{L}{2}\right)\dot{u}_L\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_L} = f_x \left(\frac{L}{2}\right) \quad (39)$$

Εισάγοντας τις Εξ.(36,37,38,39) στην Εξ.(1), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}}\Rightarrow$$

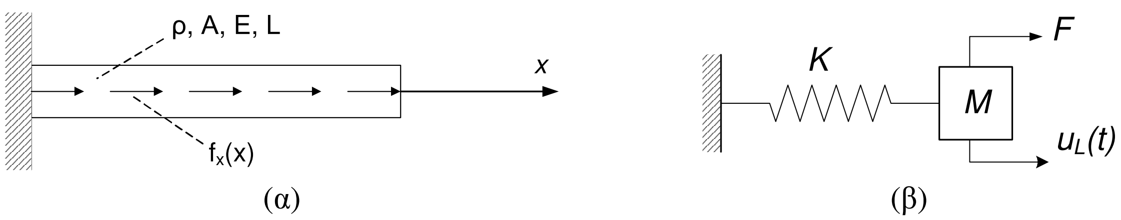
$$\Rightarrow\underbrace{\left(\frac{\rho AL}{3}\right)}_{M}\ddot{u}_L+\underbrace{\left(\frac{AE}{L}\right)}_{K}u_L=\underbrace{f_x\left(\frac{L}{2}\right)}_{F} \tag{40}$$

Η Εξ.(40) αποτελεί την εξίσωση κίνησης της δοκού σε εφελκυσμό, υπό τις παραδοχές ότι:

- οι μεταβλητές ρ, A, E είναι σταθερές κατά τον διαμήκη άξονα x και το ***υλικό*** της δοκού είναι ***γραμμικά ελαστικό*** (βλ. παραδοχές στη σελ.16.4)
- η μετατόπιση $u(x,t)$ μεταβάλλεται ***γραμμικά*** κατά μήκος της δοκού

Παρατηρήσεις

Συγκρίνοντας τις Εξ.(10,40) μεταξύ τους, προκύπτει ότι αυτές είναι ίδιες. Συνεπώς, ο φορέας του Σχήματος 1α (βλ. και Σχήμα 2α) είναι ισοδύναμος με ένα διακριτό δυναμικό σύστημα $m-k$ ενός Βαθμού Ελευθερίας (βλ. Σχήμα 2β). Αυτό σημαίνει ότι, βάσει της διαδικασίας που εφαρμόσθηκε, ο φορέας του απείρου πλήθους κινηματικών μεταβλητών μοντελοποιήθηκε ως δυναμικό σύστημα ***πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων*** κινηματικών μεταβλητών.



Σχήμα 2: Μονόπακτη δοκός σε εφελκυσμό: (α) σχηματική αναπαράσταση και (β) ισοδύναμο διακριτό σύστημα

Αντίστοιχη διαδικασία είναι δυνατόν να διατυπωθεί για οποιονδήποτε φορέα, δηλαδή ισχύει:

Βήμα 1: Υποδιαίρεση του φορέα σε ένα ή περισσότερα τμήματα. Στην περίπτωση που εξετάσθηκε, χρησιμοποιήθηκε μια υποδιαίρεση (ένα τμήμα).

Βήμα 2: Για κάθε υποδιαίρεση του φορέα, υπόθεση κατανομής σχετικά με την κινηματική παραμόρφωση του φορέα.

Βήμα 3: Εφαρμογή της ανωτέρω υπόθεσης στις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

Βήμα 4: Αντικατάσταση στους ενεργειακούς όρους.

Βήμα 6: Κατάληξη σε διακριτό δυναμικό σύστημα.

Περισσότερες λεπτομέρειες για κάθε ένα από τα βήματα αυτά, θα δοθούν σε επόμενη Εκπαιδευτική Ενότητα. Όσον αφορά στην υπόθεση της κατανομής (Βήμα 2), η πλέον απλή περίπτωση είναι η υπόθεση της γραμμικής κατανομής (ισοδύναμα, υπόθεση γραμμικής παρεμβολής). Ωστόσο, είναι δυνατόν να επιλέξουμε οποιαδήποτε άλλη μορφή κατανομής (π.χ. παραβολική, πολυωνυμική, ημιτονοειδή, κοκ), αρκεί:

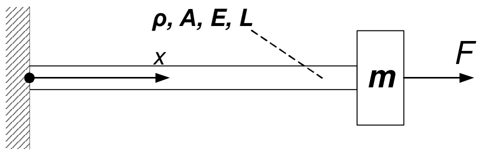
α) Να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες του προβλήματος (δηλαδή, οι μετατοπίσεις του φορέα στα άκρα του).

β) Όταν αντικαθίσταται η κατανομή στη χωρική παράγωγο της δυναμικής ενέργειας, αυτή (η δυναμική ενέργεια) να μην μηδενίζεται. Για παράδειγμα, εάν υποθέσουμε σταθερή κατανομή $u = const$, τότε θα είναι $u' = 0$, άρα και η παραμόρφωση θα είναι μηδενική (ως εάν δεν υπάρχει ελαστική παραμόρφωση, κάτι αντίθετο με το φυσικό πρόβλημα).

Επίσης, σημειώνεται ότι, ανάλογα με τη μορφή της κατανομής, η ισοδύναμη μάζα M και η ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου K στην Εξ.(40) λαμβάνουν διαφορετική έκφραση. Ένα εύλογο ερώτημα που ανακύπτει είναι '*αφού διαφορετικές κατανομές δίδουν διαφορετικά K και M, ποια κατανομή πρέπει να χρησιμοποιείται;*'. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι κάπως πιο σύνθετη: όλες οι κατανομές αποτελούν προσεγγίσεις, συνεπώς για να αξιολογηθούν θα πρέπει να συγκριθούν με την ακριβή λύση. Τέτοιες λύσεις υπάρχουν μόνον για ορισμένες απλές περιπτώσεις φορέων και φορτίσεων. Εάν, λοιπόν, υπάρχει ακριβής λύση τότε, προφανώς, επιλέγεται η κατανομή βάσει της οποίας προκύπτει απόκριση πλησιέστερα στην ακριβή λύση. Εάν, ωστόσο, δεν υπάρχει ακριβής λύση, τότε η μοναδική εναλλακτική είναι είτε η αύξηση της τάξεως της κατανομής (π.χ. από γραμμική σε παραβολική, κοκ), είτε η αύξηση των υποδιαιρέσεων του φορέα (προκειμένου να αυξηθεί το πλήθος των ανεξάρτητων Βαθμών Ελευθερίας της μοντελοποίησης), είτε και συνδυασμός αυτών, έως ότου η προκύπτουσα απόκριση του συστήματος να καταστεί ανεξάρτητη από την οποιαδήποτε *περαιτέρω* αύξηση της τάξεως της κατανομής ή/και του πλήθους των υποδιαιρέσεων.

Εφαρμογή: Δοκός υπό τη δράση συγκεντρωμένου εφελκυστικού φορτίου

Έστω η μονόπακτη δοκός (πρόβολος) του Σχήματος 3α, στην οποία μία μάζα m είναι σταθερά συνδεδεμένη στο ελεύθερο άκρο της δοκού. Η δοκός έχει μήκος L, διατομή με εμβαδόν A και είναι κατασκευασμένη από γραμμικά ελαστικό υλικό, πυκνότητας ρ και μέτρου ελαστικότητας E. Στη μάζα m επιβάλλεται μία, χρονικά σταθερή, εφελκυστική δύναμη F. Ζητείται η εξίσωση κίνησης της δοκού.



Σχήμα 3: Μονόπακτη δοκός με μάζα στο ελεύθερο άκρο της και υπό τη δράση συγκεντρωμένου εφελκυστικού φορτίου

Λύση

Το εξεταζόμενο σύστημα αποτελείται από ένα σώμα συνεχούς μέσου (δοκός) και από ένα διακριτό δυναμικό στοιχείο (μάζα m). Για την εύρεση της ζητουμένης εξίσωσης κίνησης, θα εφαρμοσθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange. Ειδικότερα, θα ακολουθηθούν τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Υπολογισμός των ενεργειακών όρων της Εξ.(1) για τη δοκό

Βήμα 2: Υπολογισμός των ενεργειακών όρων της Εξ.(1) για τη συγκεντρωμένη μάζα

Βήμα 3: Υπέρθεση των επί μέρους ενεργειακών όρων

Βήμα 4: Εφαρμογή της Εξ.(1)

Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή κάθε βήματος, ξεχωριστά.

Βήμα 1: Υπολογισμός των ενεργειακών όρων της Εξ.(1) για τη δοκό

- Η κινητική ενέργεια T_{beam} της δοκού ισούται με (βλ. Εξ.29):

$$T_{beam} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\dot{u}_L^2 \tag{41}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_{beam} της δοκού ισούται με (βλ. Εξ.30):

$$U_{beam} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2 \tag{42}$$

- Στη δοκό δεν διαχέεται ενέργεια $P_{C,beam}$ (είναι κατασκευασμένη από ελαστικό υλικό):

$$P_{C,beam} = 0 \tag{43}$$

- Στη δοκό δεν ασκείται εξωτερικό φορτίο, άρα δεν προσφέρεται εξωτερική ισχύς $P_{t,beam}$:

$$P_{t,beam} = 0 \tag{44}$$

Βήμα 2: Υπολογισμός των ενεργειακών όρων της Εξ.(1) για τη συγκεντρωμένη μάζα

- Η κινητική ενέργεια T_{beam} της μάζας ισούται με:

$$T_{mass} = \left(\frac{1}{2}\right)m\dot{u}_L^2 \tag{45}$$

- Η μάζα δεν αποτελεί στοιχείο συσσώρευσης δυναμικής ενέργεια U_{mass}, άρα ισχύει:

$$U_{mass} = 0 \tag{46}$$

- Η μάζα δεν αποτελεί στοιχείο διάχυσης ενέργειας $P_{C,mass}$, άρα ισχύει:

$$P_{C,mass} = 0 \tag{47}$$

- Η εξωτερική ισχύς $P_{t,mass}$, η οποία προσφέρεται στη μάζα, ισούται με:

$$P_{t,mass} = F\dot{u}_L \tag{48}$$

Βήμα 3: Υπέρθεση των επί μέρους ενεργειακών όρων

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T = T_{beam} + T_{mass} \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\dot{u}_L^2 + \left(\frac{1}{2}\right)m\dot{u}_L^2 \tag{49}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_{mass} του συστήματος ισούται με:

$$U = U_{beam} + U_{mass} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2 + 0 \Rightarrow U = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2 \tag{50}$$

- Η διάχυση ενέργειας $P_{C,mass}$ του συστήματος ισούται με:

$$P_C = P_{C,beam} + P_{C,mass} \Rightarrow P_C = 0 \tag{51}$$

- Η εξωτερικά προσφερόμενη ισχύς $P_{t,mass}$ στο σύστημα ισούται με:

$$P_t = P_{t,beam} + P_{t,mass} = 0 + F\dot{u}_L \Rightarrow P_t = F\dot{u}_L \tag{52}$$

Βήμα 4: Εφαρμογή της Εξ.(1)

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \tag{53}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(49,50,53), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\dot{u}_L^2 + \left(\frac{1}{2}\right)m\dot{u}_L^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2 \tag{54}$$

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_L} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_L}\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\dot{u}_L^2 + \left(\frac{1}{2}\right)m\dot{u}_L^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_L} = \left(\frac{\rho AL}{3} + m\right)\dot{u}_L \tag{55}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\rho AL}{3} + m\right)\dot{u}_L\right) = \left(\frac{\rho AL}{3} + m\right)\ddot{u}_L \tag{56}$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=u_L} -\frac{\partial L}{\partial u_L} = \frac{\partial (T-U)}{\partial u_L} = -\frac{\partial}{\partial u_L}\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\dot{u}_L^2 + \left(\frac{1}{2}\right)m\dot{u}_L^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{AE}{L}\right){u_L}^2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial u_L} = -\left\{-\left(\frac{AE}{L}\right)u_L\right\} \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial u_L} = \left(\frac{AE}{L}\right)u_L \tag{57}$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_L} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_L}(0) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_L} = 0 \tag{58}$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_L} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_L}(F\dot{u}_L) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_L} = F \tag{59}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(56,57,58,59) στην Εξ.(1), προκύπτει:

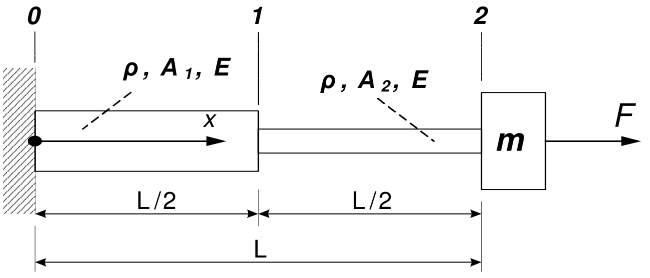
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\left(\frac{\rho AL}{3}+m\right)}_{M}\ddot{u}_L+\underbrace{\left(\frac{AE}{L}\right)}_{K}u_L=F \tag{60}$$

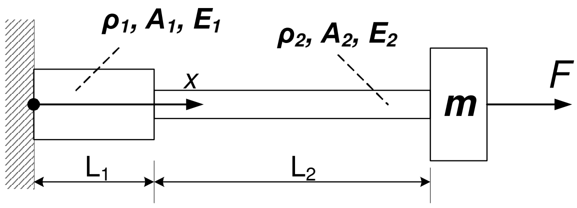
Η Εξ.(60) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου συστήματος. Και σε αυτήν την περίπτωση, το αρχικό δυναμικό σύστημα τελικά ανάγεται σε διακριτό δυναμικό σύστημα $m-k$ ενός Βαθμού Ελευθερίας (βλ. και Σχήμα 2β), στο οποίο η (ισοδύναμη) μάζα ισούται με $M=\left(\frac{\rho AL}{3}+m\right)$ και η (ισοδύναμη) σταθερά ελατηρίου ισούται με $K=\left(\frac{AE}{L}\right)$.

Περί υποδιαίρεσης του φορέα και γραμμικής κατανομής σε κάθε υποδιαίρεση

Μέχρι στιγμής, εξετάσθηκε η περίπτωση κατά την οποία ο συνεχής φορέας, η δοκός εν προκειμένω, αντιμετωπίζεται ως ένα (ενιαίο) σώμα, εντός του οποίου υποτίθεται ότι η μετατόπιση $u(x,t)$ προσεγγίζεται ως μία γραμμική κατανομή. Ωστόσο, η θεώρηση του φορέα ως ένα σώμα (μία ενιαία υποδιαίρεση) δεν είναι πάντοτε επαρκής. Όπως αναφέρθηκε στη σελ.16.4, μια τέτοια θεώρηση προϋποθέτει ότι τα μεγέθη ρ (πυκνότητα υλικού), A (εμβαδόν διατομής) και E (μέτρο ελαστικότητας) είναι σταθερά σε όλη την έκταση του φορέα. Όταν αυτή η απαίτηση παραβιάζεται, τότε ο φορέας θα πρέπει να υποδιαιρεθεί σε τμήματα, έτσι ώστε κάθε ένα από αυτά να ικανοποιεί τις προαναφερθείσες προϋποθέσεις. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα αναφέρεται η δοκός του Σχήμα 4α, η οποία διακρίνεται σε δύο τμήματα: το πρώτο τμήμα διαθέτει διατομή εμβαδού A_1, ενώ το δεύτερο τμήμα διαθέτει διατομή εμβαδού A_2. Διευκρινίζεται ότι, στο Σχήμα 4α, τα άκρα των ανωτέρω τμημάτων σημειώνονται ως θέσεις ‘0’, ‘1’ και ‘2’. Μία γενικότερη περίπτωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 4β, στο οποίο η δοκός διακρίνεται πάλι σε δύο τμήματα, απλά κάθε ένα από αυτά έχει τις δικές του τιμές για τα μεγέθη ρ, A, E και L (μήκος τμήματος).



(α)



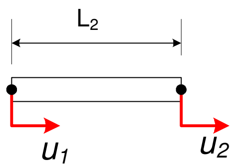
(β)

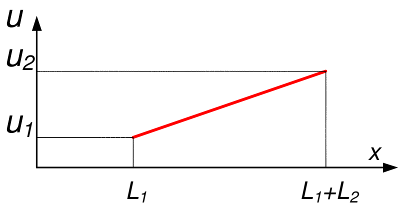
Σχήμα 4: Μονόπακτη δοκός με μάζα στο ελεύθερο άκρο της και υπό τη δράση συγκεντρωμένου εφελκυστικού φορτίου: (α) μεταβολή διατομής κατά μήκος της δοκού και (β) μεταβολή των μεγεθών ρ, A, E κατά μήκος της δοκού

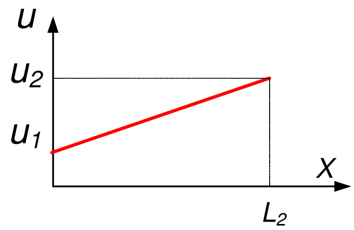
Θα εξετάσουμε τη δοκό του Σχήματος 4β. Διαιρούμε τη δοκό σε τόσα τμήματα, έτσι ώστε σε κάθε ένα από αυτά οι τιμές των μεγεθών ρ, A, E να είναι σταθερές. Άμεσα, προκύπτει ότι η δοκός πρέπει να υποδιαιρεθεί σε δύο τμήματα: το πρώτο τμήμα (Τμήμα #1) μήκους L_1 και το δεύτερο τμήμα (Τμήμα #2) μήκους L_2. Θα εξετάσουμε κάθε ένα τμήμα ξεχωριστά.

Για το Τμήμα #2: $x \in \left[L_1, L_1 + L_2\right]$

Εκτείνεται μεταξύ των θέσεων ‘1’ και ‘2’, οι οποίες ορίζονται στο Σχήμα 4α. Αποκόπτουμε το εν λόγω τμήμα και το εξετάζουμε μεμονωμένα (βλ. Σχήμα 5α). Έστω ότι η τιμή της μετατόπισης στη θέση ‘1’ είναι u_1 και στη θέση ‘2’ είναι u_2 (βλ. Σχήμα 5α). Στο Σχήμα 5β απεικονίζεται ποιοτικά η κατανομή της μετατόπισης $u(x,t)$ μεταξύ των θέσεων ‘1’ και ‘2’. Διευκρινίζεται ότι η απεικόνιση αυτή έχει σχεδιασθεί ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς του φορέα (η αρχή του συστήματος τοποθετήθηκε στη θέση ‘0’, βλ. Σχήμα 4α).







Σχήμα 5: Για το Τμήμα #2 της δοκού: (α) μοντελοποίηση, (β) ποιοτική απεικόνιση της μετατόπισης $u(x,t)$ ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς και (γ) ποιοτική απεικόνιση της μετατόπισης $u(x,t)$ ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς

Υποθέτοντας γραμμική κατανομή της μετατόπισης $u(x,t)$ μεταξύ των θέσεων ‘1’ και ‘2’, από τη Γραμμική Άλγεβρα, έπεται ότι ισχύει:

$$\frac{(u_2 - u_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(u - u_1)}{(x - x_1)} \tag{61}$$

Επιλύοντας την Εξ.(61) ως προς u, προκύπτει:

$$(u - u_1) = (x - x_1)\frac{(u_2 - u_1)}{(x_2 - x_1)} \Rightarrow u = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}(u_2 - u_1) + u_1 = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}u_2 - \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}u_1 + u_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}\right)}_{N_1(x)} u_1 + \underbrace{\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}}_{N_2(x)} u_2 \tag{62}$$

Στην Εξ.(62), ο αριθμητικός συντελεστής των μετατοπίσεων u_1 και u_2 ορίζεται ως η βοηθητική συνάρτηση $N_1(x)$ και $N_2(x)$, αντίστοιχα. Συνεπώς, για το Τμήμα #2, δηλαδή για $x \in \left[L_1, L_1 + L_2\right]$, ορίζουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $N_1(x)$ και $N_2(x)$ ως εξής:

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}\right) \tag{63}$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{64}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(62,63,64) δίδει:

$$\underbrace{u(x)}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση } x}} = \underbrace{u_1}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση '1'}}} \underbrace{N_1(x)}_{\substack{\text{ποσοστό συμμετοχής}\\ \text{τιμής } u_1 \text{ στην τιμή } u(x)}} + \underbrace{u_2}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση '2'}}} \underbrace{N_2(x)}_{\substack{\text{ποσοστό συμμετοχής}\\ \text{τιμής } u_2 \text{ στην τιμή } u(x)}} \quad , x \in [L_1, L_1 + L_2] \tag{65}$$

Η Εξ.(65) έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: για το τμήμα της δοκού $[L_1, L_1 + L_2]$, οι τιμές της μετατόπισης u_1 και u_2 στα άκρα του τμήματος συμμετέχουν στην τιμή της μετατόπισης u οποιουδήποτε σημείου του εν λόγω τμήματος, με βαρύτητα (ποσοστό συμμετοχής), η οποία περιγράφεται από τις συναρτήσεις $N_1(x)$ και $N_2(x)$. Με άλλα λόγια, η τιμή της μετατόπισης u σε οποιοδήποτε σημείο του τμήματος $[L_1, L_1 + L_2]$ της δοκού, ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των τιμών της μετατόπισης στα άκρα του εν λόγω τμήματος, όπου οι τιμές των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού περιγράφονται από τις συναρτήσεις $N_1(x)$ και $N_2(x)$.

Μία λεπτομερέστερη ματιά στις συναρτήσεις $N_1(x)$ και $N_2(x)$ αποκαλύπτει μερικές ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες. Ειδικότερα, για τη συνάρτηση $N_1(x)$ (βλ. Εξ.(63)) ισχύει:

- Ο παρονομαστής ισούται με το μήκος του εξεταζομένου Τμήματος #2 διότι (βλ. και Σχήμα 5β):

$$(x_2 - x_1) = (L_1 + L_2 - L_1) = L_2 \tag{66}$$

- Ο αριθμητής ισούται με την απόσταση από το αριστερό άκρο του εξεταζομένου Τμήματος #2 διότι (βλ. και Σχήμα 5β):

$$(x - x_1) = (x - L_1) \tag{67}$$

  Η Εξ.(67) εκφράζει τη μεταφορά του καθολικού συστήματος συντεταγμένων στο αριστερό άκρο του Τμήματος #2 (τοπικό σύστημα), και ορίζεται η νέα συντεταγμένη:

$$X = (x - x_1) = (x - L_1) \tag{68}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(66,68) στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης N_1 (βλ. Εξ.(63)), προκύπτει:

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}\right) \xrightarrow[L_2 = x_2 - x_1]{X = x - x_1} N_1(X) = \left(1 - \frac{X}{L_2}\right),\ X \in [0, L_2] \tag{69}$$

Επειδή $X \in [0, L_2]$ και η Εξ.(63) είναι γραμμική, έπεται ότι οι ακραίες τιμές της συνάρτησης N_1 εμφανίζονται για $X=0$ και $X=L_2$. Ισχύει, δε:

- για $X=0$: $N_1(X)=\left(1-\dfrac{X}{L_2}\right)\xrightarrow{X=0} N_1(0)=1$
- για $X=L_2$: $N_1(X)=\left(1-\dfrac{X}{L_2}\right)\xrightarrow{X=L_2} N_1(L_2)=\left(1-\dfrac{L_2}{L_2}\right)=(1-1)\Rightarrow N_1(L_2)=0$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $N_1(X)$ είναι $N_{1,\min}(X)=0$, ενώ η μέγιστη τιμή της είναι $N_{1,\max}(X)=1$. Τονίζεται ιδιαιτέρως ότι επειδή η μεταβλητή X εκφράζει μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων, έπεται ότι ισχύει $N_{1,\min}(x)=0$ και $N_{1,\max}(x)=1$.

Η ανωτέρω διαδικασία, εφαρμοζόμενη στη συνάρτηση N_2 (βλ. Εξ.(64)), δίδει:

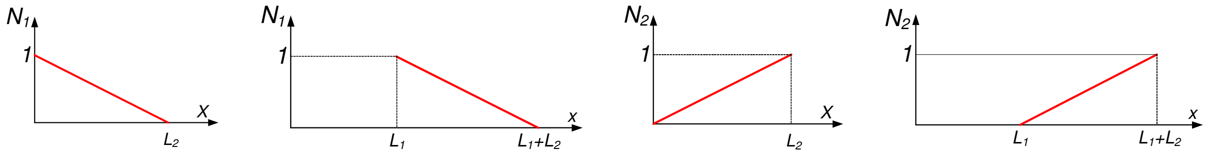
$$N_2(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\xrightarrow[L_2=x_2-x_1]{X=x-x_1} N_2(X)=\left(X/L_2\right),\ X\in[0,L_2] \tag{70}$$

Επειδή $X \in [0, L_2]$ και η Εξ.(64) είναι γραμμική, έπεται ότι οι ακραίες τιμές της συνάρτησης N_2 εμφανίζονται για $X=0$ και $X=L_2$. Ισχύει, δε:

- για $X=0$: $N_2(X)=\left(X/L_2\right)\xrightarrow{X=0} N_2(0)=0$
- για $X=L_2$: $N_2(X)=\left(X/L_2\right)\xrightarrow{X=L_2} N_2(L_2)=\left(L_2/L_2\right)\Rightarrow N_2(L_2)=1$

Κατ' αντιστοιχία με τη συνάρτηση $N_1(X)$, έπεται ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης N_2 είναι $N_{2,\min}(X)=N_{2,\min}(x)=0$, ενώ η μέγιστη τιμή της είναι $N_{2,\max}(X)=N_{2,\max}(x)=1$.

Οι συναρτήσεις N_1 και N_2 καλούνται συναρτήσεις παρεμβολής ή συναρτήσεις μορφής και η γραφική παράσταση των $N_1(X), N_1(x), N_2(X), N_2(x)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.



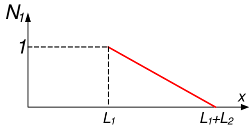
(α) (β) (γ) (δ)

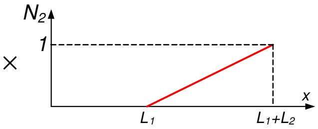
Σχήμα 6: Γραφική παράσταση της συναρτήσης παρεμβολής: (α) $N_1(X)$, (β) $N_1(x)$, (γ) $N_2(X)$ και (δ) $N_2(x)$ για το Τμήμα #2

Βάσει των Εξ.(69,70), η Εξ.(62) γράφεται, ισοδύναμα και απλούστερα, ως εξής:

$$u(X,t)=u_1(t)\,N_1(X)+u_2(t)\,N_2(X)=u_1(t)\left(1-\frac{X}{L_2}\right)+u_2(t)\left(\frac{X}{L_2}\right),\ X\in[0,L_2] \qquad (71)$$

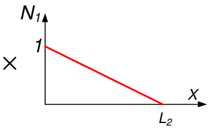
Συνοψίζοντας, για τον υπολογισμό της μετατόπισης οποιουδήποτε σημείου του Τμήματος #2, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί είτε η Εξ.(62) είτε, ισοδύναμα, η Εξ.(71). Η Εξ.(62) (έκφραση ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς) είναι δυνατόν να απεικονισθεί ως εξής:

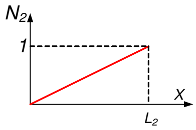
$u(x,t) = u_1(t)\times$ 

$+u_2(t)\times$ 

$,\ x\in[L_1, L_1+L_2]$

Κατ' αντιστοιχία, για την Εξ.(71) (έκφραση ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς) θα είναι:

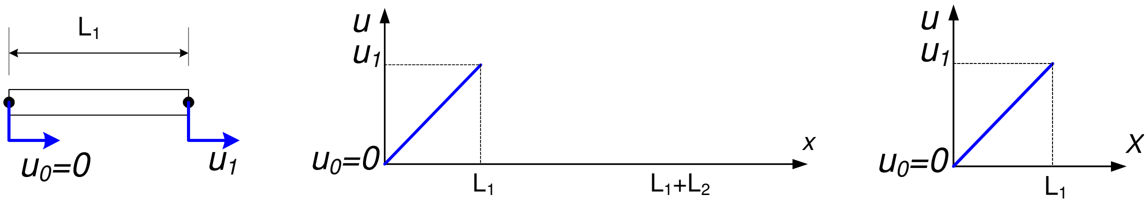
$u(X,t) = u_1(t)\times$ 

$+u_2(t)\times$ 

$X\in[0,L_2]$

Για το Τμήμα #1: $x\in[0,L_1]$

Το τμήμα αυτό εκτείνεται μεταξύ των θέσεων '0' και '1', οι οποίες ορίζονται στο Σχήμα 4α. Αποκόπτουμε το εν λόγω τμήμα και το εξετάζουμε μεμονωμένα (βλ. Σχήμα 7α), όπως ακριβώς έγινε και με το Τμήμα #2. Στη θέση '0' η τιμή της μετατόπισης u_0 είναι μηδενική, δηλαδή ισχύει $u_0=0$, διότι η θέση '0' αντιστοιχεί σε θέση στήριξης. Η θέση '1' του Τμήματος #1 συμπίπτει με τη θέση '1' του Τμήματος #2 και η τιμή της μετατόπισής είναι u_1.



(α) (β) (γ)

Σχήμα 7: Για το Τμήμα #1 της δοκού: (α) μοντελοποίηση, (β) ποιοτική απεικόνιση της μετατόπισης $u(x,t)$ ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς και (γ) ποιοτική απεικόνιση της μετατόπισης $u(x,t)$ ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς

Υποθέτοντας γραμμική κατανομή της μετατόπισης $u(x,t)$ μεταξύ των θέσεων '0' και '1', από τη Γραμμική Άλγεβρα, έπεται ότι ισχύει:

$$\frac{(u_1-u_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{(u-u_0)}{(x-x_0)} \qquad (72)$$

Επιλύοντας την Εξ.(72) ως προς u, προκύπτει:

$$\left(u-u_0\right)=\left(x-x_0\right)\frac{\left(u_1-u_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}\Rightarrow u=\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}\left(u_1-u_0\right)+u_0=\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}u_1-\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}u_0+u_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u\left(x\right)=\underbrace{\left(1-\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}\right)}_{N_o(x)}u_0+\underbrace{\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}}_{N_1(x)}u_1 \tag{73}$$

Στην Εξ.(73), οι αριθμητικοί συντελεστές της μετατόπισης u_0 και u_1 ορίζονται ως οι βοηθητικές συναρτήσεις $N_0\left(x\right)$ και $N_1\left(x\right)$, αντίστοιχα. Συνεπώς, για το Τμήμα #1, δηλαδή για $x\in\left[0,L_1\right]$, ορίζουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $N_0\left(x\right)$ και $N_1\left(x\right)$ ως εξής:

$$N_0\left(x\right)=\left(1-\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}\right) \tag{74}$$

$$N_1\left(x\right)=\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)} \tag{75}$$

Τονίζεται ιδιαιτέρως ότι αμφότερες οι Εξ.(63,75) αφορούν στη μετατόπιση u_1. Η βασική διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι η Εξ.(63) εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο η μετατόπιση u_1 συνεισφέρει στη μετατόπιση u για $x\in\left[L_1,L_1+L_2\right]$, ενώ η Εξ.(75) εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο η μετατόπιση u_1 συνεισφέρει στη μετατόπιση u για $x\in\left[0,L_1\right]$. Ο συνδυασμός των Εξ.(73,74,75) δίδει:

$$\underbrace{u\left(x\right)}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση } x}}=\underbrace{u_0}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση '0'}}}\underbrace{N_o\left(x\right)}_{\substack{\text{ποσοστό συμμετοχής}\\ \text{τιμής } u_0 \text{ στην τιμή } u(x)}}+\underbrace{u_1}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση '1'}}}\underbrace{N_1\left(x\right)}_{\substack{\text{ποσοστό συμμετοχής}\\ \text{τιμής } u_1 \text{ στην τιμή } u(x)}}\quad,\quad x\in\left[0,L_1\right] \tag{76}$$

Ωστόσο, επειδή όπως προαναφέρθηκε, $u_0=0$, η Εξ.(76) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\underbrace{u\left(x\right)}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση } x}}=\underbrace{u_1}_{\substack{\text{μετατόπιση στη}\\ \text{θέση '1'}}}\underbrace{N_1\left(x\right)}_{\substack{\text{ποσοστό συμμετοχής}\\ \text{τιμής } u_1 \text{ στην τιμή } u(x)}}\quad,\quad x\in\left[0,L_1\right] \tag{77}$$

Επίσης, από το Σχήμα 5β προκύπτει ότι:

- Ο παρονομαστής της Εξ.(75) ισούται με το μήκος του εξεταζομένου Τμήματος #1 διότι:

$$\left(x_1-x_0\right)=\left(L_1-0\right)=L_1 \tag{78}$$

- Ο αριθμητής της Εξ.(75), εξ ορισμού, ισούται με την απόσταση από το αριστερό άκρο του εξεταζομένου Τμήματος #1. Είναι, λοιπόν, δυνατόν να ορισθεί η νέα συντεταγμένη:

$$X=\left(x-x_0\right) \tag{79}$$

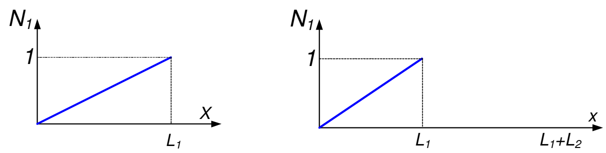
Εισάγοντας τις Εξ.(78,79) στην εξίσωση ορισμού της συνάρτησης N_1 (βλ. Εξ.(75)), προκύπτει:

$$N_1\left(x\right)=\frac{\left(x-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)}\xrightarrow[L_1=x_1-x_0]{X=x-x_0}N_1\left(X\right)=\left(\frac{X}{L_1}\right),\ X\in\left[0,L_1\right] \tag{80}$$

Επειδή $X\in\left[0,L_1\right]$ και η Εξ.(80) είναι γραμμική, έπεται ότι οι ακραίες τιμές της συνάρτησης N_1 εμφανίζονται για $X=0$ και $X=L_1$. Ισχύει, δε:

- για $X=0$: $N_1\left(X\right)=\left(\frac{X}{L_1}\right)\xrightarrow{X=0}N_1\left(0\right)=0$
- για $X=L_1$: $N_1\left(X\right)=\left(\frac{X}{L_1}\right)\xrightarrow{X=L_1}N_1\left(L_1\right)=\left(\frac{L_1}{L_1}\right)\Rightarrow N_1\left(L_1\right)=1$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $N_1\left(X\right)$ είναι $N_{1,\min}\left(X\right)=0$, ενώ η μέγιστη τιμή της είναι $N_{1,\max}\left(X\right)=1$. Τονίζεται ιδιαιτέρως ότι, όπως και στο Τμήμα #2, επειδή η μεταβλητή X εκφράζει μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων, έπεται ότι ισχύει $N_{1,\min}\left(x\right)=0$ και $N_{1,\max}\left(x\right)=1$. Στο Σχήμα 8 απεικονίζονται οι συναρτήσεις $N_1\left(X\right)$ και $N_1\left(x\right)$.



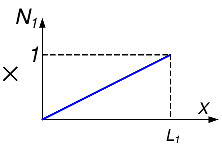
(α) (β)

Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της συναρτήσης παρεμβολής: (α) $N_1\left(X\right)$ και (β) $N_1\left(x\right)$ για το Τμήμα #1

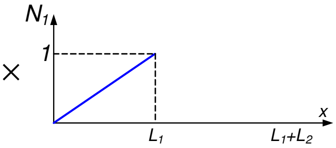
Βάσει της Εξ.(80), η Εξ.(77) γράφεται, ισοδύναμα και απλούστερα, ως εξής:

$$u\left(X,t\right)=u_1\left(t\right)N_1\left(X\right)=u_1\left(t\right)\left(\frac{X}{L_1}\right),\ X\in\left[0,L_1\right] \tag{81}$$

Συνοψίζοντας, για τον υπολογισμό της μετατόπισης οποιουδήποτε σημείου του Τμήματος #1, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί είτε η Εξ.(73) είτε, ισοδύναμα, η Εξ.(81). Η Εξ.(73) (έκφραση ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς) είναι δυνατόν να απεικονισθεί ως εξής:

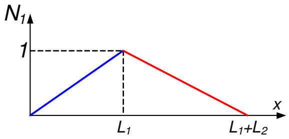
$u\left(X,t\right)\ =\ u_1\left(t\right)\times$  $X\in\left[0,L_1\right]$

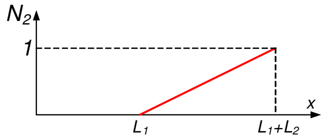
Κατ' αντιστοιχία, για την Εξ.(81) (έκφραση ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς) θα είναι:

$u\left(x,t\right)\ =\ u_1\left(t\right)\times$  , $x\in\left[0,L_1\right]$

Παρατηρήσεις

Η μετατόπιση $u(x,t)$ είναι δυνατόν να απεικονισθεί και ως εξής:

$u(x,t) = u_1(t)\times$ 

$+u_2(t)\times$ 

$, \; x\in[0, L_1+L_2]$

Στην ανωτέρω απεικόνιση, εμφανίζονται μόνον οι συναρτήσεις $N_1(x)$ και $N_2(x)$, ενώ δεν εμφανίζεται η συνάρτηση $N_0(x)$ (βλ. Εξ.(74)). Συνεπώς, εμφανίζονται οι συναρτήσεις παρεμβολής που αφορούν μόνον σε ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (στην προκειμένη περίπτωση, τις $u_1(t)$ και $u_2(t)$). Το διάγραμμα κάθε συνάρτησης παρεμβολής στο πεδίο $x\in[0, L_1+L_2]$ προκύπτει από την υπέρθεση των αντιστοίχων διαγραμμάτων στις υποδιαιρέσεις $x\in[0, L_1]$ και $x\in[L_1, L_1+L_2]$. Για παράδειγμα, το διάγραμμα της συνάρτησης $N_1(x)$ για $x\in[0, L_1+L_2]$ προέκυψε υπερθέτοντας το διάγραμμα της συνάρτησης $N_1(x)$ για $x\in[0, L_1]$ και το διάγραμμα της συνάρτησης $N_1(x)$ για $x\in[L_1, L_1+L_2]$. Με αντίστοιχο τρόπο, προέκυψε και το διάγραμμα της συνάρτησης $N_2(x)$. Η διαδικασία αυτή είναι δυνατόν να γενικευθεί, εμπλέκοντας μεγάλο αριθμό υποδιαιρέσεων. Ειδικότερα, η πιο συνηθισμένη τεχνική κατανομής συνεχών μεγεθών σε συνεχείς φορείς είναι η υποδιαίρεση του συνεχούς φορέα σε μεγάλο αριθμό τμημάτων και η παραδοχή της γραμμικής κατανομής σε καθένα από τα τμήματα αυτά. Αυτά τα τμήματα, ακριβώς επειδή έχουν πεπερασμένες διαστάσεις, καλούνται Πεπερασμένα Στοιχεία. Συνεπώς, κάθε Πεπερασμένο Στοιχείο αποτελεί ένα μικρό τμήμα ενός συνεχούς μέσου, για το οποίο (τμήμα) αποδεχόμαστε μία συγκεκριμένη υπόθεση κατανομής (π.χ. γραμμική), η οποία μαθηματικά περιγράφεται από κάποιες συναρτήσεις (συναρτήσεις παρεμβολής). Όταν στη συνέχεια, θεωρήσουμε ενωμένα μεταξύ τους τα Πεπερασμένα Στοιχεία, προς σχηματισμό του φορέα, τότε τα επί μέρους διαγράμματα των συναρτήσεων παρεμβολής κάθε Πεπερασμένου Στοιχείου υπερτίθενται κατάλληλα, σχηματίζοντας τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις (βλ. και ανωτέρω απεικόνιση).

Σχετικά με τις κινηματικές συναρτήσεις παρεμβολής, έχουμε τη μαθηματική ελευθερία να κατασκευάσουμε άπειρες τέτοιου είδους συναρτήσεις, αρκεί να επιλέγουμε κάθε φορά τη γεωμετρική μορφή της συνάρτησης, το είδος (π.χ. μετατόπιση, γωνία στροφής, κοκ) καθώς και το πλήθος των εμπλεκομένων Βαθμών Ελευθερίας. Στη Δυναμική, η γενικότερη επιθυμία για μεγάλο πλήθος Βαθμών Ελευθερίας έγκειται σε δύο λόγους: στη δυνατότητα υπολογισμού ικανοποιητικά μεγάλου πλήθους ιδιοσυχνοτήτων καθώς και στην επιθυμία πιστής αναπαράστασης της γεωμετρίας του (συνεχούς) δυναμικού συστήματος. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων αποτελεί την πλέον συστηματική μέθοδο κατασκευής συναρτήσεων παρεμβολής και το πλέον προσφιλές εργαλείο για την ανάλυση των κατασκευών, η οποία αποτελεί αντικείμενο του αντιστοίχου μαθήματος του $6^{ου}$ εξαμήνου.