ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

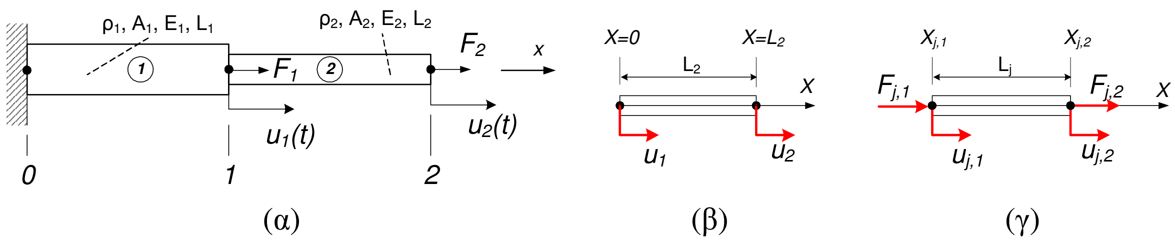
Εκπαιδευτική Ενότητα17η
Μοντελοποίηση δοκού μεταβλητής διαμέτρου σε εφελκυσμό με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Γενικά

Στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, παρουσιάσθηκε η βασική ιδέα σχετικά με τον τρόπο μοντελοποίησης συστημάτων συνεχούς μέσου. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάστηκε η διαδικασία κατάστρωσης της εξίσωσης κίνησης, με τη βοήθεια της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, ορισμένων εκ των πλέον απλών περιπτώσεων ενός συνεχούς μέσου. Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα θα σχολιασθεί η γενίκευση της εν λόγω διαδικασίας και θα επιλυθούν δύο τυπικά παραδείγματα: μία εφελκυόμενη δοκός μεταβλητής διατομής δύο Βαθμών Ελευθερίας και μία εφελκυόμενη δοκός τεσσάρων Βαθμών Ελευθερίας.

Διατύπωση Πεπερασμένου Στοιχείου Δοκού σε εφελκυσμό μέσω της Ενεργειακής Αρχής Lagrange

Έστω μονόπακτη δοκός (βλ. Σχήμα 1α) και έστω ένα τμήμα αυτής (βλ. Σχήμα 1β), *κατά το μήκος του οποίου τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες υλικού παραμένουν σταθερές.* Η δοκός του Σχήματος 1α διαθέτει δύο τέτοια τμήματα: ένα τμήμα μεταξύ των θέσεων ‘0’ και ‘1’, και ένα τμήμα μεταξύ των θέσεων ‘1’ και ‘2’. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, καθένα από αυτά τα τμήματα, έχει το δικό του μήκος, διαθέτει τη δική του διατομή και είναι κατασκευασμένο από διαφορετικό υλικό.



Σχήμα 1: Μονόπακτη δοκός μεταβλητής διατομής σε εφελκυσμό: (α) σχηματική απεικόνιση δοκού, (β) μοντελοποίηση τμήματος της δοκού και (γ) γενίκευση μοντελοποίησης

Για λόγους ευκολίας στην περιγραφή των τμημάτων, αποδίδουμε σε καθένα από αυτά έναν αύξοντα αριθμό, έστω j. Με άλλα λόγια, αποδίδουμε σε κάθε τμήμα μία αριθμητική ταυτότητα. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1α, διακρίνουμε τα τμήματα με τους αύξοντες αριθμούς $j=1$ και $j=2$. Γεωμετρικά, κάθε τμήμα της δοκού περιγράφεται από τα δύο άκρα του. Για λόγους ευκολίας στην περιγραφή των άκρων, αυθαίρετα ορίζουμε το ένα άκρο ως ‘αρχή’ και το άλλο άκρο ως ‘πέρας’ του τμήματος. Επίσης, πάλι για λόγους ευκολίας περιγραφής, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $j,1$ και $j,2$ προκειμένου να δηλωθεί η αρχή (‘1’) και το πέρας (‘2’) του τμήματος j. Για παράδειγμα (βλ. Σχήμα 1γ), η συντεταγμένη $X_{j,1}$ αφορά στην αρχή του τμήματος j, ενώ η μετατόπιση $u_{j,2}$ αφορά στο πέρας του τμήματος j. Με βάση τον ανωτέρω συμβολισμό, το τμήμα j έχει μήκος L_j, διαθέτει διατομή με εμβαδόν A_j και έστω ότι είναι κατασκευασμένο από ***γραμμικό*** υλικό πυκνότητας ρ_j και μέτρου ελαστικότητας E_j. Επίσης, για το εν λόγω τμήμα, οι μετατοπίσεις των άκρων του είναι $u_{j,1}$ και $u_{j,2}$, αντίστοιχα, ενώ οι εξωτερικά ασκούμενες δυνάμεις στα άκρα του τμήματος είναι $F_{j,1}$ και $F_{j,2}$, αντίστοιχα. Για το τυχαίο, λοιπόν, τμήμα j θα καταστρωθεί η εξίσωση κίνησης, ή, ισοδύναμα, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας. Επειδή, δε, το εν λόγω τμήμα έχει πεπερασμένο μήκος, καλείται και πεπερασμένο στοιχείο δοκού σε εφελκυσμό.

Ολοκληρωτική διατύπωση ενεργειακών όρων στην εξίσωση Lagrange

Με βάση όσα παρουσιάσθηκαν στην Εκπαιδευτική Ενότητα 16, έπεται ότι:

- Η κινητική ενέργεια T_j του τμήματος j ισούται με:

$$T_j = \int_{X=0}^{X=L_j} dT = \int_{X=0}^{X=L_j} \left(\frac{1}{2} \rho_j A_j \dot{u}^2 dX \right) \Rightarrow T_j = \frac{1}{2} \rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(\dot{u}^2 dX \right) \tag{1}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_j του τμήματος j ισούται με:

$$U_j = \int_{X=0}^{X=L_j} dU = \int_{X=0}^{X=L_j} \frac{1}{2} E_j \left(u' \right)^2 A_j dX \Rightarrow U = \frac{1}{2} A_j E_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(u' \right)^2 dX \tag{2}$$

- Στο τμήμα j δεν διαχέεται ενέργεια $P_{C,j}$, διότι θεωρήθηκε ότι το υλικό του τμήματος είναι γραμμικά ελαστικό, άρα δεν εμφανίζει απόσβεση, οπότε ισχύει:

$$P_{C,j} = 0 \tag{3}$$

- Η εξωτερική ισχύς $P_{t,j}$, η οποία προσφέρεται στο τμήμα j, ισούται με:

$$P_{t,j} = F_{j,1} \dot{u}_{j,1} + F_{j,2} \dot{u}_{j,2} \tag{4}$$

Παρεμβολή κινηματικού μεγέθους

Για τον υπολογισμό των ενεργειακών όρων των Εξ.(1,2) απαιτείται η περιγραφή της μετατόπισης $u(X,t)$. Η πλέον απλή θεώρηση, η οποία, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη Εκπαιδευτική Ενότητα, αποτελεί και τη βάση μοντελοποίησης των συνεχών συστημάτων, είναι η γραμμική παρεμβολή:

$$u_j(X,t) = c_{j,1} X + c_{j,2}, \quad X \in \left[0, L_j\right], \quad c_{j,1}, c_{j,2} \in \mathbb{R} \tag{5}$$

όπου $c_{j,1}$ και $c_{j,2}$ είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Η Εξ.(5) ισχύει για όλο το τμήμα j (δηλαδή, για $X \in \left[0, L_j\right]$), επομένως, θα πρέπει να ισχύει και για τα άκρα του τμήματος αυτού. Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- Για την αρχή του $j-$ τμήματος

  Πρόκειται για τη θέση του τμήματος με συντεταγμένη $X=0$. Από την Εξ.(5) προκύπτει:

$$X=0:\ u_j\left(X,t\right)=c_{j,1}X+c_{j,2}\xrightarrow{u_{j,1}=u_j(0,t)}\Rightarrow u_{j,1}=c_{j,2} \tag{6}$$

- Για το πέρας του $j-$ τμήματος

  Πρόκειται για τη θέση του τμήματος με συντεταγμένη $X=L_j$. Από την Εξ.(5) προκύπτει:

$$X=L_j:\ u_j\left(X,t\right)=c_{j,1}X+c_{j,2}\xrightarrow{u_{j,2}=u_j(L_j,t)}u_{j,2}=c_{j,1}L_j+c_{j,2} \tag{7}$$

Οι Εξ.(6,7) σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (τους συντελεστές $c_{j,1}$ και $c_{j,2}$), ενώ οι μετατοπίσεις $u_{j,1}$ και $u_{j,2}$ αποτελούν τις *ανεξάρτητες* κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) του $j-$ τμήματος:

$$\left.\begin{cases}u_{j,1}=c_{j,2}\\ u_{j,2}=c_{j,1}L_j+c_{j,2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1\\L_j&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{j,1}\\c_{j,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{j,1}\\u_{j,2}\end{bmatrix} \tag{8}$$

Από την επίλυση του ανωτέρω συστήματος, προκύπτει:

$$c_{j,1}=\frac{\begin{vmatrix}u_{j,1}&1\\u_{j,2}&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1\\L_j&1\end{vmatrix}}=\frac{\left(u_{j,1}-u_{j,2}\right)}{\left(0-L_j\right)}=-\frac{\left(u_{j,1}-u_{j,2}\right)}{L_j}\Rightarrow c_{j,1}=\frac{\left(u_{j,2}-u_{j,1}\right)}{L_j} \tag{9}$$

$$c_{j,2}=\frac{\begin{vmatrix}0&u_{j,1}\\L_j&u_{j,2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1\\L_j&1\end{vmatrix}}=\frac{\left(0-u_{j,1}L_j\right)}{\left(0-L_j\right)}=\frac{\left(-u_{j,1}L_j\right)}{\left(-L_j\right)}\Rightarrow c_{j,2}=u_{j,1} \tag{10}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(9,10) στην Εξ.(5), προκύπτει:

$$u_j\left(X,t\right)=\frac{\left(u_{j,2}-u_{j,1}\right)}{L_j}X+u_{j,1},\quad X\in\left[0,L_j\right] \tag{11}$$

Η Εξ.(11), με αναδιάταξη των όρων, γράφεται και ως εξής:

$$u_j\left(X,t\right)=\left(\frac{X}{L_j}u_{j,2}\left(t\right)\right)-\left(\frac{X}{L_j}u_{j,1}\left(t\right)\right)+u_{j,1}\left(t\right)=\underbrace{\left(1-\frac{X}{L_j}\right)}_{N_{1,j}(X)}u_{j,1}\left(t\right)+\underbrace{\left(\frac{X}{L_j}\right)}_{N_{2,j}(X)}u_{j,2}\left(t\right),\ X\in\left[0,L_j\right] \tag{12}$$

Στην Εξ.(12), είναι δυνατόν να ορισθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις παρεμβολής (ή, ισοδύναμα, συναρτήσεις μορφής):

$$N_{1,j}(X)=\left(1-\frac{X}{L_j}\right), \quad X\in\left[0,L_j\right] \tag{13}$$

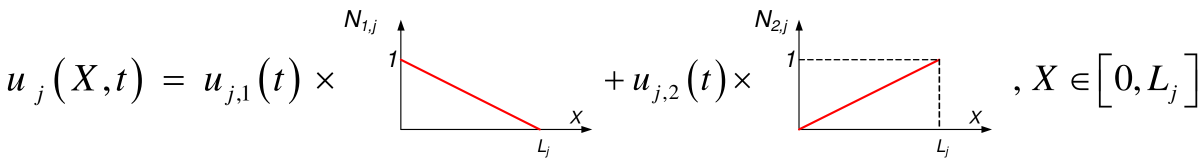
$$N_{2,j}(X)=\left(\frac{X}{L_j}\right), \quad X\in\left[0,L_j\right] \tag{14}$$

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων παρεμβολής παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.

(α) (β)

Σχήμα 2: Συναρτήσεις παρεμβολής τμήματος δοκού σε εφελκυσμό: (α) συνάρτηση $N_{1,j}(X)$ και (β) συνάρτηση $N_{2,j}(X)$

Η Εξ.(12) περιγράφει τον μαθηματικό τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η μετατόπιση $u_j(X,t)$ σε οποιαδήποτε θέση X του $j-$τμήματος. Η ποιοτική ερμηνεία της Εξ.(12) είναι πολύ απλή: η τιμή των μετατοπίσεων $u_{j,1}(X,t)$ και $u_{j,2}(X,t)$ στα άκρα του $j-$τμήματος συνεισφέρουν στην τιμή της μετατόπισης $u_j(X,t)$ οποιασδήποτε θέσης $X\in\left[0,L_j\right]$ σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφουν οι συναρτήσεις παρεμβολής $N_{1,j}(X)$ και $N_{2,j}(X)$. Σχηματικά, η Εξ.(12) είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Σχηματικά αναπαράσταση της Εξ.(12)

Επίσης, από την Εξ.(12) προκύπτουν οι ακόλουθοι, χρήσιμοι στην εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, όροι:

- Η πρώτη ***χρονική*** παράγωγος της μετατόπισης ισούται με:

$$\dot{u}(X,t)=\frac{d}{dt}\left[\left(1-\frac{X}{L_j}\right)u_{j,1}(t)+\left(\frac{X}{L_j}\right)u_{j,2}(t)\right]=\left(1-\frac{X}{L_j}\right)\dot{u}_{j,1}(t)+\left(\frac{X}{L_j}\right)\dot{u}_{j,2}(t),\ X\in\left[0,L_j\right] \tag{15}$$

- Η πρώτη ***χωρική*** παράγωγος της μετατόπισης ισούται με:

$$u'(X,t)=\frac{d}{dX}\left[\left(1-\frac{X}{L_j}\right)u_{j,1}(t)+\left(\frac{X}{L_j}\right)u_{j,2}(t)\right]=\left(-\frac{1}{L_j}\right)u_{j,1}(t)+\left(\frac{1}{L_j}\right)u_{j,2}(t),\ X\in\left[0,L_j\right] \tag{16}$$

Υπολογισμός ενεργειακών όρων στην εξίσωση Lagrange

Εισάγοντας τις Εξ.(15,16) στις Εξ.(1,2), προκύπτει:

- Η κινητική ενέργεια T_j του $j-$τμήματος ισούται με:

$$T_j = \frac{1}{2}\rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(\left(1-\frac{X}{L_j}\right)\dot{u}_{j,1}(t) + \left(\frac{X}{L_j}\right)\dot{u}_{j,2}(t) \right)^2 dX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_j = \frac{1}{2}\rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(\left(1-\frac{X}{L_j}\right)^2 \dot{u}_{j,1}^2(t) + 2\left(1-\frac{X}{L_j}\right)\left(\frac{X}{L_j}\right)\dot{u}_{j,1}(t)\dot{u}_{j,2}(t) + \left(\frac{X}{L_j}\right)^2 \dot{u}_{j,2}^2(t) \right) dX \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_j &= \frac{1}{2}\rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(\left(1-\frac{X}{L_j}\right)^2 \dot{u}_{j,1}^2(t) \right) dX \\ &+ \frac{1}{2}\rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(2\left(1-\frac{X}{L_j}\right)\left(\frac{X}{L_j}\right)\dot{u}_{j,1}(t)\dot{u}_{j,2}(t) \right) dX \\ &+ \frac{1}{2}\rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j} \left(\left(\frac{X}{L_j}\right)^2 \dot{u}_{j,2}^2(t) \right) dX \end{aligned} \tag{17}$$

Από τη Γραμμική Άλγεβρα, αναγνωρίζουμε ότι η Εξ.(17) αποτελεί μία τετραγωνική έκφραση, η οποία, σε μητρωϊκή γραφή, λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$T_j = \left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_{j,1} & \dot{u}_{j,2} \end{bmatrix}}_{\underline{u}_j^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{(\rho_j A_j)\int_{X=0}^{X=L_j}\left(1-\left(\frac{X}{L_j}\right)\right)^2 dX}_{m_{j,11}} & \underbrace{(\rho_j A_j)\int_{X=0}^{X=L_j}\left(1-\left(\frac{X}{L_j}\right)\right)\left(\frac{X}{L_j}\right) dX}_{m_{j,12}} \\ \underbrace{(\rho_j A_j)\int_{X=0}^{X=L_j}\left(1-\left(\frac{X}{L_j}\right)\right)\left(\frac{X}{L_j}\right) dX}_{m_{j,21}} & \underbrace{(\rho_j A_j)\int_{X=0}^{X=L_j}\left(\frac{X}{L_j}\right)^2 dX}_{m_{j,22}} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_{j,1} \\ \dot{u}_{j,2} \end{bmatrix}}_{\underline{u}_j} \tag{18}$$

Στην Εξ.(17), οι συνιστώσες του μητρώου $\underline{M}_j$ έχουν διαστάσεις μάζας και είναι ίσοι με (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα 'Α'):

$$m_{j,11} = (\rho_j A_j)\int_{X=0}^{X=L_j}\left(1-\left(\frac{X}{L_j}\right)\right)^2 dX = (\rho_j A_j)\left(\frac{L_j}{3}\right) \Rightarrow m_{j,11} = \left(\frac{\rho_j A_j L_j}{3}\right) \tag{19}$$

$$m_{j,12} = m_{j,21} = \rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j}\left(1-\left(\frac{X}{L_j}\right)\right)\left(\frac{X}{L_j}\right) dX = \rho_j A_j\left(\frac{L_j}{6}\right) \Rightarrow m_{j,12} = m_{j,21} = \left(\frac{\rho_j A_j L_j}{6}\right) \tag{20}$$

$$m_{j,22} = \rho_j A_j \int_{X=0}^{X=L_j}\left(\frac{X}{L_j}\right)^2 dX = \rho_j A_j\left(\frac{L_j}{3}\right) \Rightarrow m_{j,22} = \left(\frac{\rho_j A_j L_j}{3}\right) \tag{21}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(18,19,20,21) δίδει την ακόλουθη γραφή για την κινητική ενέργεια:

$$T_j = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}\dot{u}_{j,1} & \dot{u}_{j,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_{j,11} & m_{j,12}\\ m_{j,21} & m_{j,22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_{j,1}\\ \dot{u}_{j,2}\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}\dot{u}_{j,1} & \dot{u}_{j,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\rho_j A_j L_j}{3} & \dfrac{\rho_j A_j L_j}{6}\\ \dfrac{\rho_j A_j L_j}{6} & \dfrac{\rho_j A_j L_j}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_{j,1}\\ \dot{u}_{j,2}\end{bmatrix} \quad (22)$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(22), παρατηρώντας και ότι $m_{j,12} = m_{j,21}$, γράφεται ως εξής:

$$T_j = \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,11}\,\dot{u}_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{j,12}\,\dot{u}_{j,1}(t)\dot{u}_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,22}\,\dot{u}_{j,2}^2(t) \quad (23)$$

- Η δυναμική ενέργεια U_j του $j-$τμήματος ισούται με:

$$U_j = \frac{1}{2}A_jE_j\int_{X=0}^{X=L_j}\left(u'\right)^2 dX = \frac{1}{2}A_jE_j\int_{X=0}^{X=L_j}\left(\left(-\frac{1}{L_j}\right)u_{j,1}(t) + \left(\frac{1}{L_j}\right)u_{j,2}(t)\right)^2 dX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_j = \frac{1}{2}A_jE_j\int_{X=0}^{X=L_j}\left(\left(-\frac{1}{L_j}\right)^2 u_{j,1}^2(t) + 2\left(-\frac{1}{L_j}\right)\left(\frac{1}{L_j}\right)u_{j,1}(t)u_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{L_j}\right)^2 u_{j,2}^2(t)\right)dX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_j = \frac{1}{2}A_jE_j\int_{X=0}^{X=L_j}\left(\left(-\frac{1}{L_j}\right)^2 u_{j,1}^2(t)\right)dX + \frac{1}{2}A_jE_j\int_{X=0}^{X=L_j}\left(2\left(-\frac{1}{L_j}\right)\left(\frac{1}{L_j}\right)u_{j,1}(t)u_{j,2}(t)\right)dX + \frac{1}{2}A_jE_j\int_{X=0}^{X=L_j}\left(\left(\frac{1}{L_j}\right)^2 u_{j,2}^2(t)\right)dX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_j = \frac{1}{2}\left(\frac{A_jE_j}{L_j^2}\right)u_{j,1}^2(t)\int_{X=0}^{X=L_j}dX - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{A_jE_j}{L_j^2}\right)u_{j,1}(t)u_{j,2}(t)\int_{X=0}^{X=L_j}dX + \frac{1}{2}\left(\frac{A_jE_j}{L_j^2}\right)u_{j,2}^2(t)\int_{X=0}^{X=L_j}dX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_j = \frac{1}{2}\left(\frac{A_jE_j}{L_j}\right)u_{j,1}^2(t) - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{A_jE_j}{L_j}\right)u_{j,1}(t)u_{j,2}(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{A_jE_j}{L_j}\right)u_{j,2}^2(t) \quad (24)$$

Από τη Γραμμική Άλγεβρα, αναγνωρίζουμε ότι και η Εξ.(24) αποτελεί μία τετραγωνική έκφραση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η μητρωϊκή μορφή της εξίσωσης είναι:

$$U_j = \left(\frac{1}{2}\right)\underbrace{\begin{bmatrix}u_{j,1} & u_{j,2}\end{bmatrix}}_{\underline{u}_j^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\underbrace{\left(\dfrac{A_jE_j}{L_j}\right)}_{k_{j,11}} & \underbrace{-\left(\dfrac{A_jE_j}{L_j}\right)}_{k_{j,12}}\\ \underbrace{-\left(\dfrac{A_jE_j}{L_j}\right)}_{k_{j,21}} & \underbrace{\left(\dfrac{A_jE_j}{L_j}\right)}_{k_{j,22}}\end{bmatrix}}_{\underline{K}_j}\underbrace{\begin{bmatrix}u_{j,1}\\ u_{j,2}\end{bmatrix}}_{\underline{u}_j} \quad (25)$$

Στην Εξ.(25), οι συνιστώσες του μητρώου $\underline{K}$ εκφράζουν δυσκαμψία και είναι ίσοι με:

$$k_{j,11} = k_{j,22} = \left(\frac{A_jE_j}{L_j}\right) \quad \text{και} \quad k_{j,12} = k_{j,21} = -\left(\frac{A_jE_j}{L_j}\right) \quad (26)$$

Ισοδύναμα, η Εξ.(26), παρατηρώντας και ότι $k_{j,12} = k_{j,21}$, γράφεται ως εξής:

$$U_j = \left(\frac{1}{2}\right)k_{j,11}\, u_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)k_{j,12}u_{j,1}(t)u_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)k_{j,22}\, u_{j,2}^2(t) \tag{27}$$

Εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange

Οι ***ανεξάρτητες*** κινηματικές μεταβλητές του εξεταζομένου $j-$ τμήματος είναι οι (οριζόντιες) μετατοπίσεις $u_{j,1}$ και $u_{j,2}$, οι οποίες αποτελούν και τους Βαθμούς Ελευθερίας του εν λόγω τμήματος. Συνεπώς, θα πρέπει να εφαρμοσθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange για καθένα από αυτούς τους Βαθμούς Ελευθερίας.

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, κατά τα γνωστά, για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = u_{j,1}$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L_j του $j-$ τμήματος, ισούται με:

$$L_j = T_j - U_j \tag{28}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(23,27,28), προκύπτει:

$$\begin{aligned} L_j = T_j - U_j = &\left(\left(\frac{1}{2}\right)m_{j,11}\, \dot{u}_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{j,12}\, \dot{u}_{j,1}(t)\dot{u}_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,22}\, \dot{u}_{j,2}^2(t)\right) \\ &-\left(\left(\frac{1}{2}\right)k_{j,11}\, u_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)k_{j,12}u_{j,1}(t)u_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)k_{j,22}\, u_{j,2}^2(t)\right) \end{aligned} \tag{29}$$

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_{j,1}} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{u}_{j,1}} = \frac{\partial\left(T_j - U_j\right)}{\partial \dot{u}_{j,1}} \xrightarrow{\text{Εξ.(29)}} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{u}_{j,1}} = m_{j,11}\, \dot{u}_{j,1}(t) + m_{j,12}\, \dot{u}_{j,2}(t) \tag{30}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(30) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{j,1}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_{j,11}\, \dot{u}_{j,1}(t) + m_{j,12}\, \dot{u}_{j,2}(t)\right) = m_{j,11}\, \ddot{u}_{j,1}(t) + m_{j,12}\, \ddot{u}_{j,2}(t) \tag{31}$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$-\frac{\partial L_j}{\partial q} \xrightarrow{q=u_{j,1}} -\frac{\partial L_j}{\partial u_{j,1}} = \frac{\partial\left(T_j - U_j\right)}{\partial u_{j,1}} \xrightarrow{\text{Εξ.(29)}} -\frac{\partial L_j}{\partial u_{j,1}} = \left(k_{j,11}\, u_{j,1}(t) + k_{j,12}\, u_{j,2}(t)\right) \tag{32}$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_{j,1}} \frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{u}_{j,1}} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{j,1}}(0) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_{j,1}} = 0 \tag{33}$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_{j,1}} \frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{u}_{j,1}} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{j,1}}\left(F_{j,1}\dot{u}_{j,1} + F_{j,2}\dot{u}_{j,2}\right) \Rightarrow \frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{u}_{j,1}} = F_{j,1} \tag{34}$$

Η μαθηματική έκφραση για την Ενεργειακή Αρχή Lagrange είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_j}{\partial q} + \frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{q}} \tag{35}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(35) με τις Εξ.(31,32,33,34), προκύπτει:

$$m_{j,11}\,\ddot{u}_{j,1}(t) + m_{j,12}\,\ddot{u}_{j,2}(t) + \left(k_{j,11}\,u_{j,1}(t) + k_{j,12}\,u_{j,2}(t)\right) = F_{j,1} \tag{36}$$

Επαναλαμβάνοντας την προηγηθείσα διαδικασία για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = u_{j,2}$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_{j,2}} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{u}_{j,2}} = \frac{\partial\left(T_j - U_j\right)}{\partial \dot{u}_{j,2}} \xrightarrow{\text{Εξ.(29)}} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{u}_{j,2}} = \left(m_{j,12}\,\dot{u}_{j,1}(t) + m_{j,22}\,\dot{u}_{j,2}(t)\right) \tag{37}$$

  Παραγωγίζοντας την Εξ.(37) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{j,2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_{j,12}\,\dot{u}_{j,1}(t) + m_{j,22}\,\dot{u}_{j,2}(t)\right) = m_{j,12}\,\ddot{u}_{j,1}(t) + m_{j,22}\,\ddot{u}_{j,2}(t) \tag{38}$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$-\frac{\partial L_j}{\partial q} \xrightarrow{q=u_{j,2}} -\frac{\partial L_j}{\partial u_{j,2}} = \frac{\partial\left(T_j - U_j\right)}{\partial u_{j,2}} \xrightarrow{\text{Εξ.(29)}} -\frac{\partial L_j}{\partial u_{j,2}} = \left(k_{j,12}u_{j,1}(t) + k_{j,22}\,u_{j,2}(t)\right) \tag{39}$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_{j,2}} \frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{u}_{j,2}} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{j,2}}(0) \Rightarrow \frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{u}_{j,2}} = 0 \tag{40}$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_{j,2}} \frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{u}_{j,2}} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{j,2}}\left(F_{j,1}\dot{u}_{j,1} + F_{j,2}\dot{u}_{j,2}\right) \Rightarrow \frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{u}_{j,2}} = F_{j,2} \tag{41}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(35) με τις Εξ.(38,39,40,41), προκύπτει:

$$m_{j,12}\,\ddot{u}_{j,1}(t) + m_{j,22}\,\ddot{u}_{j,2}(t) + k_{j,12}u_{j,1}(t) + k_{j,22}\,u_{j,2}(t) = F_{j,2} \tag{42}$$

Οι Εξ.(36,42), σε μητρωϊκή γραφή, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_{j,1}(t) \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix}}_{\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\ \alpha\delta\rho\alpha\nu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{j,1}(t) \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix}}_{\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma\ \varepsilon\lambda\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \end{bmatrix}}_{\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\iota\varsigma} \tag{43}$$

Στη συγκεκριμένη εξίσωση, αναγνωρίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

- Σταθερός συντελεστής (μητρώο μάζας) στον όρο αδρανείας:

$$\underline{M}_j = \begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\rho_j A_j L_j}{3} & \dfrac{\rho_j A_j L_j}{6} \\ \dfrac{\rho_j A_j L_j}{6} & \dfrac{\rho_j A_j L_j}{3} \end{bmatrix} \tag{44}$$

- Σταθερός συντελεστής (μητρώο δυσκαμψίας) στον όρο ελαστικότητας:

$$\underline{K}_j = \begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) & -\left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) \\ -\left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) & \left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) \end{bmatrix} \tag{45}$$

- Εξωτερική διέγερση:

$$\underset{\sim}{F}_j = \begin{bmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \end{bmatrix} \tag{46}$$

- Απόκριση:

$$\underset{\sim}{u}_j = \begin{bmatrix} u_{j,1}(t) \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} \tag{47}$$

Η Εξ.(43) αφορά σε ένα οποιοδήποτε τυχαίο τμήμα (βλ. Σχήμα 1γ) μίας εφελκυόμενης δοκού και εμπλέκει δύο ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές. Μία ειδική περίπτωση είναι εκείνη κατά την οποία το ένα από τα δύο άκρα του εν λόγω τμήματος αποτελεί σημείο στήριξης της δοκού. Από μαθηματικής απόψεως, η συνθήκη στήριξης εκφράζεται ως μηδενισμός του αντιστοίχου Βαθμού Ελευθερίας (όπως λέγεται, ‘*δεσμεύεται ο αντίστοιχος Βαθμός Ελευθερίας*’). Αυτή η περίπτωση εξετάζεται στην επόμενη παράγραφο.

Σχήμα 4: Μοντελοποίηση στηριζόμενου τμήματος δοκού: (α) η στήριξη στην αρχή του τμήματος και (β) η στήριξη στο πέρας του τμήματος

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι η αρχή του εφελκυομένου $j-$τμήματος αποτελεί σημείο στήριξης (βλ. Σχήμα 4α). Ισοδύναμα, έστω ότι ο Βαθμός Ελευθερίας (ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή) $u_{j,1}$ είναι δεσμευμένος, δηλαδή αποκτά τη μηδενική, άρα συγκεκριμένη, τιμή:

$$u_{j,1}(t)=0 \tag{48}$$

Συνεπώς, στο γραμμικό σύστημα της Εξ.(43), δηλαδή στο γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων, εμπλέκεται πλέον μόνον μία άγνωστη ποσότητα (ο Βαθμός Ελευθερίας $u_{j,2}$,), δεδομένου ότι ο άλλος άγνωστος (ο Βαθμός Ελευθερίας $u_{j,1}$,) έχει αποκτήσει συγκεκριμένη αριθμητική τιμή. Επίσης, είναι προφανές ότι, λόγω της Εξ.(48), οι αντίστοιχες χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται:

$$\dot{u}_{j,1}(t)=\ddot{u}_{j,1}(t)=0 \tag{49}$$

Για τον υπολογισμό του Βαθμού Ελευθερίας $u_{j,2}$, αρκεί να χρησιμοποιηθεί μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος της Εξ.(43). Ο συνδυασμός των Εξ.(43,48,49) δίδει:

$$\begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(50), προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} m_{j,12}\ddot{u}_{j,2}(t)+k_{j,12}u_{j,2}(t)=F_{j,1} \\ m_{j,22}\ddot{u}_{j,2}(t)+k_{j,22}u_{j,2}(t)=F_{j,2} \end{Bmatrix} \tag{51}$$

Αφού, λοιπόν, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε από τις δύο ισότητες της Εξ.(51), επιλέγεται η δεύτερη ισότητα, η οποία γράφεται και ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{j,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{j,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{j,2} \end{bmatrix} \tag{52}$$

Εάν το σημείο στήριξης βρίσκεται στο πέρας του εφελκυομένου $j-$τμήματος (βλ. Σχήμα 4β) τότε, επαναλαμβάνοντας τις ίδιες σκέψεις, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} m_{j,11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{j,1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{j,11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j,1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j,1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Συνοψίζοντας, η Εξ.(43) είναι μια *γραμμική* Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε.), η οποία περιγράφει την δυναμική ισορροπία σε μία *εφελκυόμενη μακροσκοπική υποδιαίρεση* ($j-$τμήμα) μίας δοκού. Εάν η εν λόγω υποδιαίρεση περιλαμβάνει σημείο στήριξης, τότε η Εξ.(43) λαμβάνει τη μορφή της Εξ.(52) ή της Εξ.(53). Ακριβώς επειδή η Δ.Ε. είναι *γραμμική*, υπόκειται στην αρχή της υπερθέσεως. Αυτό σημαίνει ότι, εάν ένα δυναμικό σύστημα αποτελείται από τμήματα της μορφής του Σχήματος 1γ, τότε, για την κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης του συστήματος, είναι δυνατή η εφαρμογή της ακόλουθης διαδικασίας:

Διαδικασία #1

Βήμα 1: Διάκριση του συστήματος σε τμήματα (ισοδύναμα, σε πεπερασμένα στοιχεία ή υποφορείς) της μορφής του Σχήματος 1γ

Βήμα 2: Για κάθε τμήμα, καταγραφή της εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας (Εξ.(43) ή Εξ.(52) ή Εξ.(53))

Βήμα 3: Σύνθεση (υπέρθεση) των εξισώσεων του προηγουμένου βήματος

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από την εφαρμογή της ακόλουθης διαδικασίας:

Διαδικασία #2

Βήμα 1: Διάκριση του συστήματος σε τμήματα της μορφής του Σχήματος 1γ

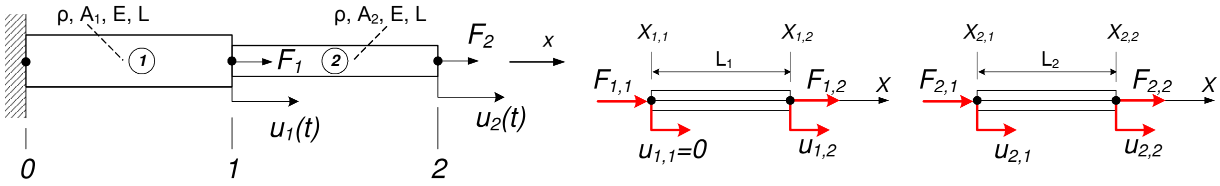
Βήμα 2: Υπολογισμός των ενεργειακών όρων της Εξίσωσης Lagrange.

Βήμα 3: Εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange.

Οι δύο ανωτέρω διαδικασίες είναι απολύτως ισοδύναμες και η μόνη διαφορά τους έγκειται στην ευκολία εφαρμογής τους. Ειδικότερα, πλεονεκτεί η πρώτη διαδικασία διότι χαρακτηρίζεται από επαναληψιμότητα και εύκολη διαχείριση πινάκων. Για την καλύτερη κατανόηση, στις επόμενες παραγράφους παρατίθενται δύο χαρακτηριστικές εφαρμογές.

Εφαρμογή #1: Εφελκυόμενη δοκός μεταβλητής διατομής δύο Βαθμών Ελευθερίας

Έστω η μονόπακτη δοκός (πρόβολος) του Σχήματος 4, η οποία υπόκειται στις εφελκυστικές δυνάμεις F_1 και F_2. Ζητείται η εξίσωση κίνησης της δοκού.



(α) (β) (γ)

Σχήμα 5: Μονόπακτη δοκός μεταβλητής διατομής σε εφελκυσμό: (α) σχηματική αναπαράσταση, (β) πεπερασμένο στοιχείο #1 και (γ) πεπερασμένο στοιχείο #2

Λύση

Για τον εξεταζόμενο φορέα (δοκός εν προκειμένω), ισχύουν τα εξής:

- Είναι συμμετρικός ως προς τον διαμήκη άξονά του.
- Εξ αιτίας της στηρίξεώς του, παραμορφώνεται (δεν κινείται ως απολύτως στερεό σώμα).
- Θεωρείται ότι οι εξωτερικές δυνάμεις είναι αξονικές (ασκούνται κατά τον διαμήκη άξονά του), συνεπώς η παραμόρφωσή του είναι, ομοίως, αξονική.
- Θεωρείται ότι η παραμόρφωση είναι μικρή, άρα προσεγγίσεις πρώτης τάξεως (γραμμικές) είναι αποδεκτές.

Συνυπολογίζοντας όλα αυτά τα στοιχεία, έπεται ότι ο φορέας υπόκειται σε (καθαρό) εφελκυσμό, άρα είναι εφαρμόσιμα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως στην '*Διατύπωση Πεπερασμένου Στοιχείου Δοκού σε εφελκυσμό μέσω της Ενεργειακής Αρχής Lagrange*'. Για την κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης, θα ακολουθηθεί πρώτα η Διαδικασία #1 και στη συνέχεια η Διαδικασία #2

Για τη Διαδικασία #1

Βήμα 1: *Διάκριση του συστήματος σε τμήματα (υποφορείς) της μορφής του Σχήματος 1γ*

Η δοθείσα δοκός είναι μεταβλητής διατομής. Το τμήμα της δοκού μεταξύ των θέσεων '0' και '1' (βλ. Σχήμα 5α), έχει μήκος L_1 και διαθέτει διατομή με εμβαδόν A_1. Το τμήμα της δοκού μεταξύ των θέσεων '1' και '2' (βλ. Σχήμα 5), έχει μήκος L_2 και διαθέτει διατομή με εμβαδόν A_2. Και τα δύο τμήματα της δοκού είναι κατασκευασμένα από γραμμικά ελαστικό υλικό πυκνότητας ρ και μέτρου ελαστικότητας E. Συνεπώς, η δοκός διακρίνεται σε δύο τμήματα (υποφορείς), όπως απεικονίζεται στα Σχήματα (5β,5γ).

Βήμα 2: *Για κάθε υποφορέα, καταγραφή της εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας*

Για το Τμήμα #1: Το τμήμα αυτό συμβολίζεται ως $j=1$ και απεικονίζεται στο Σχήμα 5α. Η αρχή του τμήματος αποτελεί σημείο στήριξης, άρα ισχύει (βλ. Εξ.(52)):

$$j=1: \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_1} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_{j,2} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}_1} \tag{54}$$

Για το Τμήμα #2: Το τμήμα αυτό συμβολίζεται ως $j=2$, απεικονίζεται στο Σχήμα 5β, ενώ δεν περιλαμβάνει σημείο στήριξης. Συνεπώς, ισχύει (βλ. Εξ.(43)):

$$j=2: \quad \underbrace{\begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_2} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{j,1}(t) \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_2} \begin{bmatrix} u_{j,1}(t) \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}_2} \tag{55}$$

Βήμα 3: *Σύνθεση (υπέρθεση) των εξισώσεων του προηγουμένου βήματος*

Από το Σχήμα 5, προκύπτει ότι οι ***ανεξάρτητες*** κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) του προβλήματος είναι δύο: οι μετατοπίσεις στις θέσεις '1' και '2' (μετατοπίσεις u_1 και u_2, αντίστοιχα). Συνεπώς, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας θα είναι της μορφής:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{\underline{M}:[2\times 2]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\underset{\sim}{u}}(t):[2\times 1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{\underline{K}:[2\times 2]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{u}(t):[2\times 1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}:[2\times 1]} \tag{56}$$

Στην Εξ.(56), πρέπει να υπολογισθούν τα μητρώα $\underline{M}$ και $\underline{K}$, καθώς και το διάνυσμα $\underset{\sim}{F}$. Προς τούτο, θα διατυπωθεί συλλογιστική, βάσει της οποίας τα στοιχεία των $\underline{M}$, $\underline{K}$ και $\underset{\sim}{F}$ θα συμπληρωθούν από τα στοιχεία των $\underline{M}_1$, $\underline{K}_1$, $\underset{\sim}{F}_1$, $\underline{M}_2$, $\underline{K}_2$, $\underset{\sim}{F}_2$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι ισχύει η αντιστοιχία, η οποία περιγράφεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Αντιστοιχία μεταξύ θέσεων στο $j-$ τμήμα και θέσεων στη δοκό

Τμήμα j	Θέση στο $j-$ τμήμα	Δείκτης στα σύμβολα u και F στις Εξ.(54,55)	Θέση στη δοκό
$j=1$	‘1’: Αρχή	1,1	‘0’
	‘2’: Πέρας	1,2	‘1’
$j=2$	‘1’: Αρχή	2,1	‘1’
	‘2’: Πέρας	2,2	‘2’

Βάσει του Πίνακα 1, η Εξ.(54) γράφεται ως εξής:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_1}\begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_1}\begin{bmatrix} 0 \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_{j,2} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}_1}\xrightarrow[\text{Πίνακας 1}]{j=1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{1,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_1}\begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_1(t) \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{1,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_1}\begin{bmatrix} 0 \\ u_1(t) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}_1} \tag{57}$$

Οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις στην Εξ.(57) προέκυψαν ως εξής:

- Η μετατόπιση $u_{j,2}(t)$ για το τμήμα $j=1$ γράφεται ως $u_{1,2}(t)$. Από τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι η μετατόπιση με δείκτη $1,2$ αντιστοιχεί στη μετατόπιση της δοκού στη θέση ‘1’, άρα αντιστοιχεί στη μετατόπιση $u_1(t)$.
- Η εξωτερική δύναμη $F_{j,2}$ για το τμήμα $j=1$ γράφεται ως $F_{1,2}$. Από τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι η εξωτερική δύναμη με δείκτη $1,2$ αντιστοιχεί στην εξωτερική δύναμη, η οποία ασκείται στη δοκό στη θέση ‘1’, άρα αντιστοιχεί στην εξωτερική δύναμη F_1.

Επίσης, πάλι βάσει του Πίνακα 1, η Εξ.(55) γράφεται ως εξής:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_2}\begin{bmatrix} \ddot{u}_{j,1}(t) \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_2}\begin{bmatrix} u_{j,1}(t) \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}_2}\xrightarrow[\text{Πίνακας 1}]{j=2}\underbrace{\begin{bmatrix} m_{2,11} & m_{2,12} \\ m_{2,12} & m_{2,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_2}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} k_{2,11} & k_{2,12} \\ k_{2,12} & k_{2,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_2}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}_2} \tag{58}$$

Όπως και προηγουμένως, οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις στην Εξ.(58) προέκυψαν ως εξής:

- Η μετατόπιση $u_{j,1}(t)$ για το τμήμα $j=2$ γράφεται ως $u_{2,1}(t)$. Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, η μετατόπιση με δείκτη 2,1 αντιστοιχεί στη μετατόπιση της δοκού στη θέση ‘1’, άρα αντιστοιχεί στη μετατόπιση $u_1(t)$.
- Η εξωτερική δύναμη $F_{j,1}$ για το τμήμα $j=2$ γράφεται ως $F_{2,1}$. Από τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι η εξωτερική δύναμη με δείκτη 2,1 αντιστοιχεί στην εξωτερική δύναμη, η οποία ασκείται στη δοκό στη θέση ‘1’, άρα αντιστοιχεί στην εξωτερική δύναμη F_1.

- Η μετατόπιση $u_{j,2}(t)$ για το τμήμα $j=2$ γράφεται ως $u_{2,2}(t)$. Από τον Πίνακα 1, προκύπτει ότι η μετατόπιση με δείκτη $2,2$ αντιστοιχεί στη μετατόπιση της δοκού στη θέση '1', άρα αντιστοιχεί στη μετατόπιση $u_1(t)$.
- Η εξωτερική δύναμη $F_{j,1}$ για το τμήμα $j=2$ γράφεται ως $F_{2,1}$. Από τον Πίνακα 1, η εξωτερική δύναμη με δείκτη 2,1 αντιστοιχεί στην εξωτερική δύναμη, η οποία ασκείται στη δοκό στη θέση '1', άρα αντιστοιχεί στην εξωτερική δύναμη F_1.

Για τη συμπλήρωση της Εξ.(56) από τα στοιχεία της Εξ.(57), συγκρίνουμε μεταξύ τους τις δύο εξισώσεις. Στη συνέχεια, εισάγουμε τα στοιχεία του μητρώου $\underline{M}_1$ στο μητρώο $\underline{M}$, έτσι ώστε να αναπαράγεται σωστά το γινόμενο $\underline{M}_1\ddot{u}_1(t)$. Κατόπιν, εισάγουμε τα στοιχεία του μητρώου $\underline{K}_1$ στο μητρώο $\underline{K}$, με αντίστοιχο τρόπο, δηλαδή έτσι ώστε να αναπαράγεται σωστά το γινόμενο $\underline{K}_1 u_1(t)$. Το αποτέλεσμα της ανωτέρω διαδικασίας φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{1,22} & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{\underline{M}:[2\times2]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\underline{u}}(t):[2\times1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{1,22} & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{\underline{K}:[2\times2]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{\underline{u}(t):[2\times1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\underline{F}:[2\times1]} \tag{59}$$

Επαναλαμβάνουμε την ανωτέρω διαδικασία, προκειμένου να συμπληρωθεί η Εξ.(59) με τα στοιχεία της Εξ.(58). Η μόνη διαφορά, σε αυτήν την περίπτωση, είναι ότι εάν εισάγεται ένα νέο στοιχείο, είτε στο μητρώο $\underline{M}$ είτε στο μητρώο $\underline{K}$, σε θέση όπου ήδη υπάρχει στοιχείο, τότε αθροίζουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ τους (υπέρθεση). Το αποτέλεσμα της συμπλήρωσης της Εξ.(59) με τα στοιχεία της Εξ.(58) φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{1,22}+m_{2,11} & m_{2,11} \\ m_{2,12} & m_{2,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}:[2\times2]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\underline{u}}(t):[2\times1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{1,22}+k_{2,11} & k_{2,12} \\ k_{2,12} & k_{2,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}:[2\times2]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{\underline{u}(t):[2\times1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\underline{F}:[2\times1]} \tag{60}$$

Η Εξ.(60) αποτελεί την ζητούμενη εξίσωση κίνησης.

Στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα καταλήγουμε εάν ακολουθήσουμε τη Διαδικασία #2 (βλ. σελ. 17.13). Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύουν τα ακόλουθα:

Βήμα 1: *Διάκριση του συστήματος σε τμήματα της μορφής του Σχήματος 1γ*

Το βήμα αυτό είναι ακριβώς το ίδιο με εκείνο της Διαδικασίας #1.

Βήμα 2: *Υπολογισμός των ενεργειακών όρων της Εξίσωσης Lagrange.*

- Η κινητική ενέργεια T της δοκού ισούται με (βλ. Εξ.(23)):

$$T = \int_{x=0}^{x=L_1+L_2} dT = \int_{X=0}^{X=L_1} dT + \int_{X=0}^{X=L_2} dT = T_1 + T_2 \tag{61}$$

- Η δυναμική ενέργεια U της δοκού ισούται με:

$$U = \int_{x=0}^{x=L_1+L_2} dU = \int_{X=0}^{X=L_1} dU + \int_{X=0}^{X=L_2} dU = U_1 + U_2 \tag{62}$$

- Στη δοκό δεν διαχέεται ισχύς διότι θεωρήθηκε ότι το υλικό του τμήματος είναι γραμμικά ελαστικό, άρα δεν εμφανίζει απόσβεση, οπότε ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{63}$$

- Η εξωτερική ισχύς P_t, η οποία προσφέρεται στη δοκό, ισούται με:

$$P_t = F_0\,\dot{u}_0 + F_1\,\dot{u}_1 + F_2\,\dot{u}_2 \xrightarrow{u_0(t)=0} P_t = F_1\,\dot{u}_1 + F_2\,\dot{u}_2 \tag{64}$$

Από τις Εξ.(23,27), από τον Πίνακα 1 και από την ύπαρξη στήριξης στη θέση ‘0’ της δοκού (άρα $u_0(t)=0$), προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Η κινητική ενέργεια T_1 του τμήματος $j=1$ ισούται με:

$$T_j = \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,11}\,\dot{u}_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{j,12}\,\dot{u}_{j,1}(t)\dot{u}_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,22}\,\dot{u}_{j,2}^2(t) \xrightarrow{j=1}$$

$$\Rightarrow T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)m_{1,11}\,\dot{u}_{1,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{1,12}\,\dot{u}_{1,1}(t)\dot{u}_{1,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{1,22}\,\dot{u}_{1,2}^2(t) \xrightarrow{\text{Πίνακας 1}}$$

$$\Rightarrow T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)m_{1,11}\,\dot{u}_0^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{1,12}\,\dot{u}_0(t)\dot{u}_1(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{1,22}\,\dot{u}_1^2(t) \xrightarrow{u_0(t)=0}$$

$$\Rightarrow T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)m_{1,22}\,\dot{u}_1^2(t) \tag{65}$$

- Η κινητική ενέργεια T_2 του τμήματος $j=2$ ισούται με:

$$T_j = \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,11}\,\dot{u}_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{j,12}\,\dot{u}_{j,1}(t)\dot{u}_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{j,22}\,\dot{u}_{j,2}^2(t) \xrightarrow{j=2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \left(\frac{1}{2}\right)m_{2,11}\,\dot{u}_{2,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{2,12}\,\dot{u}_{2,1}(t)\dot{u}_{2,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{2,22}\,\dot{u}_{2,2}^2(t) \xrightarrow{\text{Πίνακας 1}}$$

$$\Rightarrow T_2 = \left(\frac{1}{2}\right)m_{2,11}\,\dot{u}_1^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)m_{2,12}\,\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{2,22}\,\dot{u}_2^2(t) \tag{66}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_1 του τμήματος $j=1$ ισούται με:

$$U_j = \left(\frac{1}{2}\right)k_{j,11}\,u_{j,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)k_{j,12}u_{j,1}(t)u_{j,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)k_{j,22}\,u_{j,2}^2(t) \xrightarrow{j=1}$$

$$\Rightarrow U_1 = \left(\frac{1}{2}\right)k_{1,11}\,u_{1,1}^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)k_{1,12}u_{1,1}(t)u_{1,2}(t) + \left(\frac{1}{2}\right)k_{1,22}\,u_{1,2}^2(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = \left(\frac{1}{2}\right)k_{1,11}\,u_0^2(t) + 2\left(\frac{1}{2}\right)k_{1,12}u_0(t)u_1(t) + \left(\frac{1}{2}\right)k_{1,22}\,u_1^2(t) \xrightarrow{u_0(t)=0}$$

$$\Rightarrow U_1 = \left(\frac{1}{2}\right) k_{1,22}\, u_1^2\left(t\right) \tag{67}$$

- Η δυναμική ενέργεια U_2 του τμήματος $j = 2$ ισούται με:

$$U_j = \left(\frac{1}{2}\right) k_{j,11}\, u_{j,1}^2\left(t\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) k_{j,12} u_{j,1}\left(t\right) u_{j,2}\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k_{j,22}\, u_{j,2}^2\left(t\right) \xrightarrow{j=2}$$

$$\Rightarrow U_2 = \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,11}\, u_{2,1}^2\left(t\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) k_{2,12} u_{2,1}\left(t\right) u_{2,2}\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,22}\, u_{2,2}^2\left(t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_2 = \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,11}\, u_1^2\left(t\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) k_{2,12} u_1\left(t\right) u_2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,22}\, u_2^2\left(t\right) \tag{68}$$

Επομένως, συνολικά για τη δοκό ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η κινητική ενέργεια T της δοκού ισούται με:

$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{1}{2}\right) m_{1,22}\, \dot{u}_1^2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) m_{2,11}\, \dot{u}_1^2\left(t\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) m_{2,12}\, \dot{u}_1\left(t\right) \dot{u}_2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) m_{2,22}\, \dot{u}_2^2\left(t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)\left(m_{1,22} + m_{2,11}\right) \dot{u}_1^2\left(t\right) + m_{2,12}\, \dot{u}_1\left(t\right) \dot{u}_2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) m_{2,22}\, \dot{u}_2^2\left(t\right) \tag{69}$$

- Η δυναμική ενέργεια U της δοκού ισούται με:

$$U = U_1 + U_2 = \left(\frac{1}{2}\right) k_{1,22}\, u_1^2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,11}\, u_1^2\left(t\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) k_{2,12} u_1\left(t\right) u_2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,22}\, u_2^2\left(t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \left(\frac{1}{2}\right)\left(k_{1,22} + k_{2,11}\right) u_1^2\left(t\right) + k_{2,12} u_1\left(t\right) u_2\left(t\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k_{2,22}\, u_2^2\left(t\right) \tag{70}$$

- Η διάχυση ισχύος στη δοκό ισούται με:

$$P_C = 0 \tag{71}$$

- Η εξωτερική ισχύς, η οποία προσφέρεται στη δοκό, ισούται με:

$$P_t = F_0\, \dot{u}_0 + F_1\, \dot{u}_1 + F_2\, \dot{u}_2 \xrightarrow{u_0(t)=0} P_t = F_1\, \dot{u}_1 + F_2\, \dot{u}_2 \tag{72}$$

Βήμα 3: *Εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange.*

Οι ***ανεξάρτητες*** κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) της δοκού είναι οι (οριζόντιες) μετατοπίσεις u_1 και u_2. Κατά τα γνωστά, θα εφαρμοσθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange για καθένα από αυτούς τους Βαθμούς Ελευθερίας.

Για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = u_{j,1}$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L της δοκού, ισούται με:

$$L = T - U \tag{73}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(69,70,73), προκύπτει:

$$\begin{aligned} L = T - U = &\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(m_{1,22}+m_{2,11}\right)\dot{u}_1^2(t) + m_{2,12}\,\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \left(\frac{1}{2}\right)m_{2,22}\,\dot{u}_2^2(t)\right] \\ &-\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(k_{1,22}+k_{2,11}\right)u_1^2(t) + k_{2,12}u_1(t)u_2(t) + \left(\frac{1}{2}\right)k_{2,22}\,u_2^2(t)\right] \end{aligned} \quad (74)$$

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{u}_1} \xrightarrow{\text{Εξ.(74)}} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = \left(m_{1,22}+m_{2,11}\right)\dot{u}_1(t) + m_{2,12}\,\dot{u}_2(t) \quad (75)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(75) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(m_{1,22}+m_{2,11}\right)\dot{u}_1(t) + m_{2,12}\,\dot{u}_2(t)\right) = \left(m_{1,22}+m_{2,11}\right)\ddot{u}_1(t) + m_{2,12}\,\ddot{u}_2(t) \quad (76)$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=u_1} -\frac{\partial L}{\partial u_1} = \frac{\partial (T-U)}{\partial u_1} \xrightarrow{\text{Εξ.(74)}} -\frac{\partial L}{\partial u_1} = \left(k_{1,22}+k_{2,11}\right)u_1(t) + k_{2,12}u_2(t) \quad (77)$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_1} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_1}(0) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_1} = 0 \quad (78)$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_1} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_1}\left(F_1\dot{u}_1 + F_2\dot{u}_2\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_1} = F_1 \quad (79)$$

Η μαθηματική έκφραση για την Ενεργειακή Αρχή Lagrange είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_j}{\partial q} + \frac{\partial P_{C,j}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_{t,j}}{\partial \dot{q}} \quad (80)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(80) με τις Εξ.(76,77,78,79), προκύπτει:

$$\left(m_{1,22}+m_{2,11}\right)\ddot{u}_1(t) + m_{2,12}\,\ddot{u}_2(t) + \left(k_{1,22}+k_{2,11}\right)u_1(t) + k_{2,12}u_2(t) = F_1 \quad (81)$$

Για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = u_{j,2}$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=u_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{u}_2} \xrightarrow{\text{Εξ.(74)}} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = m_{2,12}\,\dot{u}_1(t) + m_{2,22}\,\dot{u}_2(t) \quad (82)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(82) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(m_{2,12}\,\dot{u}_1(t)+m_{2,22}\,\dot{u}_2(t)\right)=m_{2,12}\,\ddot{u}_1(t)+m_{2,22}\,\ddot{u}_2(t) \quad (83)$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$-\frac{\partial L}{\partial q}\xrightarrow{q=u_2}-\frac{\partial L}{\partial u_2}=\frac{\partial(T-U)}{\partial u_2}\xrightarrow{\text{Εξ.}(74)}-\frac{\partial L}{\partial u_2}=k_{2,12}u_1(t)+k_{2,22}\,u_2(t) \quad (84)$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}\xrightarrow{q=u_2}\frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{u}_2}(0)\Rightarrow\frac{\partial P_C}{\partial \dot{u}_2}=0 \quad (85)$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\xrightarrow{q=u_2}\frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{u}_2}\left(F_1\dot{u}_1+F_2\dot{u}_2\right)\Rightarrow\frac{\partial P_t}{\partial \dot{u}_2}=F_2 \quad (86)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(80) με τις Εξ.(83,84,85,86), προκύπτει:

$$m_{2,12}\,\ddot{u}_1(t)+m_{2,22}\,\ddot{u}_2(t)+k_{2,12}u_1(t)+k_{2,22}\,u_2(t)=F_2 \quad (87)$$

Οι Εξ.(81,87), σε μητρωϊκή γραφή, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

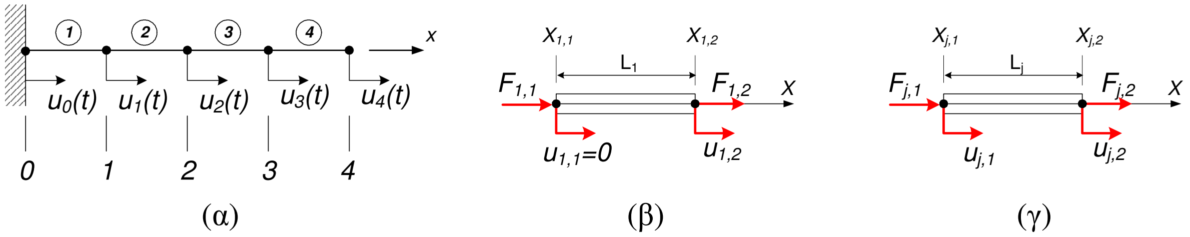
$$\underbrace{\begin{bmatrix}(m_{1,22}+m_{2,11}) & m_{2,12}\\ m_{2,12} & m_{2,22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}_1(t)\\ \ddot{u}_2(t)\end{bmatrix}}_{\text{δυνάμεις αδρανείας}}+\underbrace{\begin{bmatrix}(k_{1,22}+k_{2,11}) & k_{2,12}\\ k_{2,12} & k_{2,22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}}_{\text{δυνάμεις ελαστικότητας}}=\underbrace{\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\end{bmatrix}}_{\text{εξωτερικές δυνάμεις}} \quad (88)$$

Η Εξ.(88) αποτελεί την εξίσωση κίνησης της δοκού και είναι ίδια με την Εξ.(60).

Συγκρίνοντας τις Διαδικασίες #1 και #2 μεταξύ τους, διαπιστώνουμε ότι στη Διαδικασία #2, αν και είναι πολύ εύκολος ο υπολογισμός της κινητικής ενέργειας, της δυναμικής ενέργειας, της διάχυσης ισχύος και της εξωτερικά προσφερόμενης ισχύος, απαιτείται η εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange για κάθε Βαθμό Ελευθερίας, υπολογισμός ο οποίος καθίσταται δυσχερής όσο αυξάνεται το πλήθος των Βαθμών Ελευθερίας του εξεταζομένου συστήματος. Αντιθέτως, το μεγάλο πλεονέκτημα της Διαδικασίας #1 έγκειται στο γεγονός ότι η κατασκευή της τελικής εξίσωσης κίνησης επιτυγχάνεται μέσω της κατάλληλης υπέρθεσης πινάκων, τα στοιχεία των οποίων προκύπτουν άμεσα από τις Εξ.(44,45). Πρόκειται, λοιπόν, για μία απλή και εύκολα επαναλαμβανόμενη διαδικασία, βασικό σημείο στην εκτέλεση της οποίας αποτελεί ο τρόπος συμπλήρωσης των μητρώων $\underline{M}$ και $\underline{K}$ από τα επί μέρους μητρώα $\underline{M}_j$ και $\underline{K}_j$. Αυτή η διαδικαστική λεπτομέρεια παρουσιάζεται λεπτομερέστερα στην επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή #2: **Εφελκυόμενη δοκός τεσσάρων Βαθμών Ελευθερίας**

Έστω η μονόπακτη δοκός (πρόβολος) του Σχήματος 6. Ζητείται η εξίσωση κίνησης της δοκού, στην περίπτωση κατά την οποία η δοκός υφίσταται αξονική φόρτιση.



Σχήμα 6: Μονόπακτη δοκός: (α) σχηματική αναπαράσταση, (β) πεπερασμένο στοιχείο $j=1$ και (γ) πεπερασμένο στοιχείο $j=2,3,4$

Λύση

Η δοκός του Σχήματος 6α διακρίνεται σε τέσσερα τμήματα (τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία). Για κάθε τμήμα θεωρείται ότι το κινηματικό μέγεθος της μετατόπισης ακολουθεί γραμμική κατανομή της μορφής:

$$u_j(t) = c_{j,1}X + c_{j,0} \tag{89}$$

όπου $c_{j,1}$ και $c_{j,0}$ αποτελούν σταθερούς συντελεστές, ο προσδιορισμός των οποίων επιτυγχάνεται από την ικανοποίηση της Εξ.(89) στα άκρα του εκάστοτε τμήματος (εάν η παρεμβολή είναι υψηλοτέρας τάξεως, π.χ. παραβολική, τότε εκτός των άκρων χρησιμοποιούνται και εσωτερικά σημεία του τμήματος). Εν γένει, το σημείο στο οποίο ικανοποιείται η συνάρτηση παρεμβολής του κινηματικού μεγέθους καλείται ‘κόμβος’. Συνεπώς, οι τέσσερεις υποδιαιρέσεις της εξεταζομένης δοκού εμπλέκουν, συνολικά, πέντε κόμβους. Για την περιγραφή τους, αποδίδουμε σε κάθε κόμβο έναν αύξοντα αριθμό (η αρίθμηση πρέπει να είναι συνεχής). Από τη φύση του προβλήματος (αξονική φόρτιση), κάθε κόμβος δύναται να μετατοπισθεί μόνον αξονικά. Η δυνατότητα μετατόπισης καλείται και Βαθμός Ελευθερίας. Συνεπώς, κάθε κόμβος χαρακτηρίζεται από έναν Βαθμό Ελευθερίας, για την περιγραφή των οποίων αποδίδουμε (σε κάθε Βαθμό Ελευθερίας) έναν αύξοντα αριθμό. Ο μαθηματικός τρόπος απόδοσης αύξοντα αριθμού σε Βαθμό Ελευθερίας είναι πολύ απλός:

- Έστω ότι ασχολούμαστε με τον κόμβο i, άρα έχουμε ήδη ασχοληθεί με $(i-1)$ κόμβους.
- Σε κάθε κόμβο, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι αποδίδονται n Βαθμοί Ελευθερίας.
- Για τους προηγηθέντες $(i-1)$ κόμβους έχουν χρησιμοποιηθεί οι αριθμοί από το 1 έως και το $(i-1)\times n$.
- Για τον κόμβο i, οι αντίστοιχοι Βαθμοί Ελευθερίας θα έχουν αύξοντες αριθμούς ίσους με $(i-1)\times n+1$, $(i-1)\times n+2$, …, $(i-1)\times n+n$.
- Στην εξεταζόμενη περίπτωση, λόγω της φύσεως του προβλήματος, σε κάθε κόμβο εμπλέκονται $n=1$ Βαθμοί Ελευθερίας. Συνεπώς, για τον κόμβο i, ο αντίστοιχος Βαθμός

Ελευθερίας θα έχει αύξοντα αριθμό ίσο με $(i-1)\times 1+1=i$. Στην εξεταζόμενη περίπτωση η αρίθμηση των κόμβων ταυτίζεται με την αρίθμηση των Βαθμών Ελευθερίας (αυτό συμβαίνει μόνον όταν εμπλέκεται ένας Βαθμός Ελευθερίας ανά κόμβο).

Με βάση την προαναφερθείσα τεχνική, συμπληρώνεται ο Πίνακας 2, στον οποίο αποτυπώνεται η αρίθμηση των κόμβων και των αντιστοίχων Βαθμών Ελευθερίας.

Πίνακας 2: Αρίθμηση Βαθμών Ελευθερίας

Στοιχείο	$j=1$		$j=2$		$j=3$		$j=4$	
Κόμβος	1	2	2	3	3	4	4	5
Μετατόπιση	u_0	u_1	u_1	u_2	u_2	u_3	u_3	u_4
Βαθμός Ελευθερίας	#1	#2	#2	#3	#3	#4	#4	#5

Η Εξ.(43), η οποία επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου, εκφράζει τη δυναμική ισορροπία του $j-$ στοιχείου:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}_j} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{j,1}(t) \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_j} \begin{bmatrix} u_{j,1}(t) \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \end{bmatrix} \tag{90}$$

Όπως προκύπτει από την Εξ.(90), τα μητρώα $\underline{M}_j$ και $\underline{K}_j$ κάθε $j-$ στοιχείου απευθύνονται στους συγκεκριμένους Βαθμούς Ελευθερίας $u_{j,1}$ και $u_{j,2}$, τους οποίους είναι δυνατόν να εντοπίσουμε, με τη βοήθεια του Πίνακα 2. Η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας ολόκληρης της δοκού είναι της ακόλουθης μορφής:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & ? & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & ? & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}}_{\underline{K}_j} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{91}$$

Με βάση τον ορισμό των επί μέρους μητρώων $\underline{M}_j$ και $\underline{K}_j$ καθώς και την αρίθμηση των Βαθμών Ελευθερίας του Πίνακα 2, επιτυγχάνεται η συμπλήρωση των μητρώων $\underline{M}$ και $\underline{K}$ ολόκληρης της δοκού από τα επί μέρους μητρώα $\underline{M}_j$ και $\underline{K}_j$. Ειδικότερα, το μητρώο μάζας και το μητρώο δυσκαμψίας για το $j-$ στοιχείο είναι (βλ. Εξ.(44,45)):

$$\underline{M}_j = \begin{bmatrix} m_{j,11} & m_{j,12} \\ m_{j,12} & m_{j,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\rho_j A_j L_j}{3} & \dfrac{\rho_j A_j L_j}{6} \\ \dfrac{\rho_j A_j L_j}{6} & \dfrac{\rho_j A_j L_j}{3} \end{bmatrix} \quad \underline{K}_j = \begin{bmatrix} k_{j,11} & k_{j,12} \\ k_{j,12} & k_{j,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) & -\left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) \\ -\left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) & \left(\dfrac{A_j E_j}{L_j}\right) \end{bmatrix} \tag{92}$$

Συνεπώς, τα επί μέρους μητρώα μάζας $\underline{M}_j$ ισούνται με:

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} m_{1,11} & m_{1,12} \\ m_{1,12} & m_{1,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1 A_1 L_1}{3} & \frac{\rho_1 A_1 L_1}{6} \\ \frac{\rho_1 A_1 L_1}{6} & \frac{\rho_1 A_1 L_1}{3} \end{bmatrix} \quad \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} m_{2,11} & m_{2,12} \\ m_{2,12} & m_{2,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_2 A_2 L_2}{3} & \frac{\rho_2 A_2 L_2}{6} \\ \frac{\rho_2 A_2 L_2}{6} & \frac{\rho_2 A_2 L_2}{3} \end{bmatrix} \tag{93}$$

$$\underline{M}_3 = \begin{bmatrix} m_{3,11} & m_{3,12} \\ m_{3,12} & m_{3,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_3 A_3 L_3}{3} & \frac{\rho_3 A_3 L_3}{6} \\ \frac{\rho_3 A_3 L_3}{6} & \frac{\rho_3 A_3 L_3}{3} \end{bmatrix} \quad \underline{M}_4 = \begin{bmatrix} m_{4,11} & m_{4,12} \\ m_{4,12} & m_{4,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_4 A_4 L_4}{3} & \frac{\rho_4 A_4 L_4}{6} \\ \frac{\rho_4 A_4 L_4}{6} & \frac{\rho_4 A_4 L_4}{3} \end{bmatrix} \tag{94}$$

Τα, δε, επί μέρους μητρώα δυσκαμψίας $\underline{K}_j$ ισούνται με:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{1,11} & k_{1,12} \\ k_{1,12} & k_{1,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{A_1 E_1}{L_1}\right) & -\left(\frac{A_1 E_1}{L_1}\right) \\ -\left(\frac{A_1 E_1}{L_1}\right) & \left(\frac{A_1 E_1}{L_1}\right) \end{bmatrix} \quad \underline{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{2,11} & k_{2,12} \\ k_{2,12} & k_{2,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{A_2 E_2}{L_2}\right) & -\left(\frac{A_2 E_2}{L_2}\right) \\ -\left(\frac{A_2 E_2}{L_2}\right) & \left(\frac{A_2 E_2}{L_2}\right) \end{bmatrix} \tag{95}$$

$$\underline{K}_3 = \begin{bmatrix} k_{3,11} & k_{3,12} \\ k_{3,12} & k_{3,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{A_3 E_3}{L_3}\right) & -\left(\frac{A_3 E_3}{L_3}\right) \\ -\left(\frac{A_3 E_3}{L_3}\right) & \left(\frac{A_3 E_3}{L_3}\right) \end{bmatrix} \quad \underline{K}_4 = \begin{bmatrix} k_{4,11} & k_{4,12} \\ k_{4,12} & k_{4,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{A_4 E_4}{L_4}\right) & -\left(\frac{A_4 E_4}{L_4}\right) \\ -\left(\frac{A_4 E_4}{L_4}\right) & \left(\frac{A_4 E_4}{L_4}\right) \end{bmatrix} \tag{96}$$

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2, το στοιχείο $j = 1$ εμπλέκει τους Βαθμούς Ελευθερίας #1 και #2 (μετατοπίσεις u_0, u_1). Συνεπώς, τα στοιχεία των μητρώων $\underline{M}_1, \underline{K}_1$ θα τοποθετηθούν στα μητρώα $\underline{M}$, $\underline{K}$ και στις θέσεις που αντιστοιχούν στους Βαθμούς Ελευθερίας #1 και #2:

$$\begin{bmatrix} m_{1,11} & m_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,12} & m_{1,22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,11} & k_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{1,12} & k_{1,22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{97}$$

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2, το στοιχείο $j = 2$ εμπλέκει τους Βαθμούς Ελευθερίας #2 και #3 (μετατοπίσεις u_1, u_2). Συνεπώς, τα στοιχεία των μητρώων $\underline{M}_1, \underline{K}_1$ θα τοποθετηθούν στα μητρώα $\underline{M}$, $\underline{K}$ και στις θέσεις που αντιστοιχούν στους Βαθμούς Ελευθερίας #2 και #3:

$$\begin{bmatrix} m_{1,11} & m_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,12} & m_{1,22} + m_{2,11} & m_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,12} & m_{2,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,11} & k_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{1,12} & k_{1,22} + k_{2,11} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,12} & k_{2,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{98}$$

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2, το στοιχείο $j=3$ εμπλέκει τους Βαθμούς Ελευθερίας #3 και #4 (μετατοπίσεις u_2, u_3). Συνεπώς, τα στοιχεία των μητρώων $\underline{M}_1, \underline{K}_1$ θα τοποθετηθούν στα μητρώα $\underline{M}$, $\underline{K}$ και στις θέσεις που αντιστοιχούν στους Βαθμούς Ελευθερίας #3 και #4:

$$\begin{bmatrix} m_{1,11} & m_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,12} & m_{1,22}+m_{2,11} & m_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,12} & m_{2,22}+m_{3,11} & m_{3,12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,12} & m_{3,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,11} & k_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{1,12} & k_{1,22}+k_{2,11} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,12} & k_{2,22}+k_{3,11} & k_{3,12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,12} & k_{3,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Σύμφωνα με τον Πίνακα, το στοιχείο $j=4$ εμπλέκει τους Βαθμούς Ελευθερίας #4 και #5 (μετατοπίσεις u_3, u_4) και τα μητρώα $\underline{M}$, $\underline{K}$ συμπληρώνονται από τα $\underline{M}_4, \underline{K}_4$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} m_{1,11} & m_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,12} & m_{1,22}+m_{2,11} & m_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,12} & m_{2,22}+m_{3,11} & m_{3,12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,12} & m_{3,22}+m_{4,11} & m_{4,12} \\ 0 & 0 & 0 & m_{4,12} & m_{4,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,11} & k_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{1,12} & k_{1,22}+k_{2,11} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,12} & k_{2,22}+k_{3,11} & k_{3,12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,12} & k_{3,22}+k_{4,11} & k_{4,12} \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,12} & k_{4,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Λόγω της στήριξης (οριακή συνθήκη προβλήματος: $u_0(t)=0$), από την Εξ.(52), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{j,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_{j,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{j,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{j,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{j,2} \end{bmatrix} \xrightarrow{j=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_{1,2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{1,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{1,2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Πίνακας 2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Ενημερώνοντας την Εξ.(100) με την Εξ.(101), τελικά προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{1,22}+m_{2,11} & m_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,12} & m_{2,22}+m_{3,11} & m_{3,12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,12} & m_{3,22}+m_{4,11} & m_{4,12} \\ 0 & 0 & 0 & m_{4,12} & m_{4,22} \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1,22}+k_{2,11} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,12} & k_{2,22}+k_{3,11} & k_{3,12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,12} & k_{3,22}+k_{4,11} & k_{4,12} \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,12} & k_{4,22} \end{bmatrix}}_{\underline{K}_j} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Διαπιστώνουμε ότι στην Εξ.(102) είναι δυνατόν να διαγραφεί η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη των μητρώων $\underline{M}$, $\underline{K}$, δηλαδή ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & m_{1,22}+m_{2,11} & m_{2,12} & 0 & 0 \\ \cancel{0} & m_{2,12} & m_{2,22}+m_{3,11} & m_{3,12} & 0 \\ \cancel{0} & 0 & m_{3,12} & m_{3,22}+m_{4,11} & m_{4,12} \\ \cancel{0} & 0 & 0 & m_{4,12} & m_{4,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{\ddot{u}_0(t)} \\ \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & k_{1,22}+k_{2,11} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ \cancel{0} & k_{2,12} & k_{2,22}+k_{3,11} & k_{3,12} & 0 \\ \cancel{0} & 0 & k_{3,12} & k_{3,22}+k_{4,11} & k_{4,12} \\ \cancel{0} & 0 & 0 & k_{4,12} & k_{4,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{u_0(t)} \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{F_0} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Η διαγραφή της πρώτης στήλης οφείλεται στο γεγονός ότι πολλαπλασιασμός επί μηδενικό στοιχείο δίδει μηδενική τιμή, συνεπώς όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης του μητρώου $\underline{K}$, πολλαπλασιαζόμενοι επί $u_0(t)=0$, δίδουν μηδενικές τιμές, άρα δεν συμμετέχουν στο σύστημα της Εξ.(103). Επίσης, επειδή $u_0(t)=0$ έπεται ότι και η δεύτερη χρονική παράγωγος είναι μηδενική ($\ddot{u}_0(t)=0$). Συνεπώς, όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης του μητρώου $\underline{M}$, πολλαπλασιαζόμενοι επί $\ddot{u}_0(t)=0$, δίδουν, ομοίως, μηδενική τιμή, άρα ούτε και αυτοί συμμετέχουν στο σύστημα της Εξ.(103). Η διαγραφή της πρώτης γραμμής οφείλεται στο γεγονός ότι αφού μία κινηματική μεταβλητή αποκτά συγκεκριμένη τιμή (στην προκειμένη περίπτωση, η κινηματική μεταβλητή $u_0(t)$ αποκτά τη μηδενική τιμή, έπεται ότι το πλήθος των αγνώστων κινηματικών μεταβλητών του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος μειώνεται κατά έναν άγνωστο. Αυτό σημαίνει ότι επιτρέπεται η απομάκρυνση (διαγραφή) μίας (οποιασδήποτε) εξίσωσης από το αρχικό σύστημα εξισώσεων (δηλαδή από το σύστημα της Εξ.(103)). Επιλέγεται να διαγραφεί η πρώτη εξίσωση, δηλαδή η εξίσωση η οποία εμπεριέχει τη δύναμη F_0, η οποία ασκείται στη στήριξη (αντίδραση). Με αυτήν την επιλογή απαλλασσόμαστε από μία εξωτερική δύναμη, η οποία, αρχικά, είναι άγνωστη (Δεν γνωρίζουμε από την αρχή τις αντιδράσεις στα σημεία στήριξης. Αυτές τις δυνάμεις τις υπολογίζουμε σε δεύτερο χρόνο). Με βάση όλα τα ανωτέρω, τελικά προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} m_{1,22}+m_{2,11} & m_{2,12} & 0 & 0 \\ m_{2,12} & m_{2,22}+m_{3,11} & m_{3,12} & 0 \\ 0 & m_{3,12} & m_{3,22}+m_{4,11} & m_{4,12} \\ 0 & 0 & m_{4,12} & m_{4,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,22}+k_{2,11} & k_{2,12} & 0 & 0 \\ k_{2,12} & k_{2,22}+k_{3,11} & k_{3,12} & 0 \\ 0 & k_{3,12} & k_{3,22}+k_{4,11} & k_{4,12} \\ 0 & 0 & k_{4,12} & k_{4,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Η Εξ.(104) αποτελεί τη ζητούμενη εξίσωση κίνησης.

Παρατηρήσεις

Στις προηγηθείσες εφαρμογές, παρουσιάσθηκε η βασική ιδέα της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method), η οποία συνοψίζεται σε δύο παραδοχές:

- Παραδοχή περί τμηματικά συνεχούς κατανομής της κινηματικής κατάστασης του εξεταζομένου σώματος
- Παραδοχή περί μη-μηδενικής τιμής των συναρτήσεων παρεμβολής των στοιχείων, τα οποία συντρέχουν σε έναν κόμβο (ισοδύναμα, των στοιχείων που συνδέονται στον ίδιο Βαθμό Ελευθερίας).

Συνεπώς, η κατασκευή της εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας ενός συνεχούς μέσου είναι δυνατή εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange στο εν λόγω μέσο. Εναλλακτικά, το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται μέσω ενός συστηματικού τρόπου κατασκευής των μητρώων μάζας $\underline{M}$ και δυσκαμψίας $\underline{K}$ οποιουδήποτε δυναμικού συστήματος συνεχούς μέσου, αθροίζοντας κατάλληλα τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας των επί μέρους στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται το συνεχές μέσο.

Όσον αφορά στην επιλογή των διαμερίσεων, στις οποίες πρέπει να διακριτοποιηθεί ένα συνεχές μέσο, το βασικό κριτήριο είναι η γεωμετρία του συνεχούς μέσου. Ο Μηχανικός έχει στη διάθεσή του τη δυνατότητα να επιλέξει μεταξύ πολλών δυνατοτήτων σχετικά με τη διαμέριση, όπως να αυξήσει το πλήθος των διαμερίσεων (π.χ. κοντά σε σύνορα με υψηλές συγκεντρώσεις τάσεως) ή να αυξήσει την τάξη της παρεμβολής (π.χ. παραβολική αντί γραμμική) ή και τα δύο αυτά μαζί. Όλα αυτά εξετάζονται με περισσότερες λεπτομέρειες στα μαθήματα του 6^{ου} και 7^{ου} εξαμήνου 'Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών Ι & ΙΙ'.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στον όρο αδρανείας

Ολοκλήρωμα προς υπολογισμό: $m_{11} = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_2} \left(1-\left(\frac{X}{L_2}\right)\right)^2 dX$

Αλλαγή μεταβλητής: $a = 1-\left(\frac{X}{L_2}\right) \Rightarrow da = -\left(\frac{1}{L_2}\right)dX \Rightarrow dX = -L_2\, da$

Αλλαγή ορίων ολοκλήρωσης: $a = 1-\left(\frac{X}{L_2}\right) \xrightarrow{X=0} a=1$, $a = 1-\left(\frac{X}{L_2}\right) \xrightarrow{X=L_2} a=0$

Άρα, ισχύει:

$$m_{11} = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_2} \left(1-\left(\frac{X}{L_2}\right)\right)^2 dX = \rho A_2 \int_{a=1}^{a=0} a^2\left(-L_2\right)da = \rho A_2 L_2 \int_{a=0}^{a=1} a^2 da = \rho A_2 L_2 \left[\frac{a^3}{3}\right]_{a=0}^{a=1} = \left(\frac{\rho A_2 L_2}{3}\right)$$

Ολοκλήρωμα προς υπολογισμό:

$$m_{12} = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_1} \left(1-\left(\frac{X}{L_2}\right)\right)\left(\frac{X}{L_2}\right)dX = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_1} \left(\left(\frac{X}{L_2}\right)-\left(\frac{X}{L_2}\right)^2\right)dX$$

Αλλαγή μεταβλητής: $a = \left(\frac{X}{L_2}\right) \Rightarrow da = \left(\frac{1}{L_2}\right)dX \Rightarrow dX = L_2\, da$

Αλλαγή ορίων ολοκλήρωσης: $a = \left(\frac{X}{L_2}\right) \xrightarrow{X=0} a=0$, $a = \left(\frac{X}{L_2}\right) \xrightarrow{X=L_2} a=1$

Άρα, ισχύει:

$$m_{12} = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_1} \left(\left(\frac{X}{L_2}\right)-\left(\frac{X}{L_2}\right)^2\right)dX = \rho A_2 \int_{a=0}^{a=1} \left(a-a^2\right)L_2 da = \rho A_2 L_2 \int_{a=0}^{a=1} \left(a-a^2\right)da \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{12} = \rho A_2 L_2 \left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right]_{a=0}^{a=1} = \rho A_2 L_2 \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] \Rightarrow m_{12} = \left(\frac{\rho A_2 L_2}{6}\right)$$

Ολοκλήρωμα προς υπολογισμό: $m_{11} = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_2} \left(\frac{X}{L_2}\right)^2 dX$

Αλλαγή μεταβλητής: $a = \left(\frac{X}{L_2}\right) \Rightarrow da = \left(\frac{1}{L_2}\right)dX \Rightarrow dX = L_2\, da$

Αλλαγή ορίων ολοκλήρωσης: $a = \left(\frac{X}{L_2}\right) \xrightarrow{X=0} a=0$, $a = \left(\frac{X}{L_2}\right) \xrightarrow{X=L_2} a=1$

Άρα, ισχύει:

$$m_{11} = \rho A_2 \int_{x=0}^{x=L_2} \left(\frac{X}{L_2}\right)^2 dX = \rho A_2 \int_{a=1}^{a=0} a^2 L_2 da = \rho A_2 L_2 \int_{a=0}^{a=1} a^2 da = \rho A_2 L_2 \left[\frac{a^3}{3}\right]_{a=0}^{a=1} = \left(\frac{\rho A_2 L_2}{3}\right)$$