

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

**Copyright © ΕΜΠ - Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών - Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών - 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.**

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

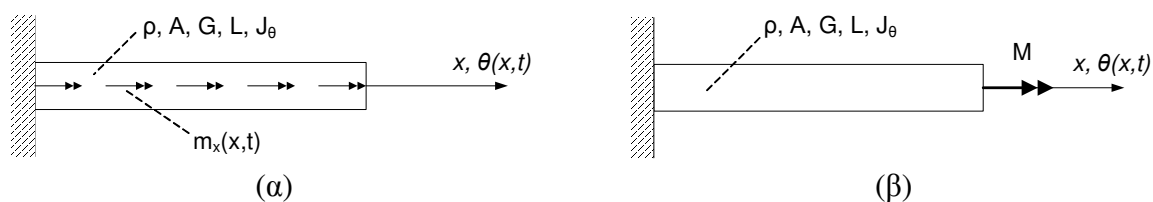
Εκπαιδευτική Ενότητα 18^η Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Συνεχούς Μέσου – Δοκός σε στρέψη & Δοκός σε κάμψη

Γενικά

Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα και στο πλαίσιο της μοντελοποίησης δυναμικών συστημάτων συνεχούς μέσου, θα εξετασθούν δύο ακόμα χαρακτηριστικές περιπτώσεις μονοδιάστατων φορέων: μία μονόπακτη δοκός σε στρέψη καθώς και μία μονόπακτη δοκός σε κάμψη. Η πρώτη περίπτωση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη εύκαμπτων ατράκτων μετάδοσης κίνησης, ενώ η δεύτερη περίπτωση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη μεταλλικών κατασκευών. Και στις δύο περιπτώσεις, θεωρείται ότι οι εμφανιζόμενες παραμορφώσεις της δοκού είναι μικρές, άρα ελαστικές, και γι' αυτό χρησιμοποιείται η αντίστοιχη θεωρία πρώτης τάξεως (οι παραμορφώσεις, συναρτήσεων των μετατοπίσεων, περιγράφονται από αναπτύγματα Taylor, τα οποία περιέχουν μόνον γραμμικούς όρους).

Δοκός σε στρέψη

Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται μία μονόπακτη ελαστική δοκός (πρόβολος) μήκους L . Πιο αναλυτικά, στο Σχήμα 1α απεικονίζεται η περίπτωση στρέψης της δοκού λόγω μίας ομοιόμορφα κατανεμημένης ροπής στρέψης $m_x(x,t)$, η οποία επιβάλλεται καθ' όλο το μήκος της δοκού. Στο Σχήμα 1β, απεικονίζεται η περίπτωση στρέψης της δοκού, όταν σ' αυτήν επιβάλλεται συγκεντρωμένη ροπή M στο ελεύθερο άκρο της. Σχετικά με τη διατομή της δοκού, θεωρούμε ότι αυτή είναι σταθερή καθ' όλο το μήκος της δοκού, κυκλικού (άρα συμμετρικού) σχήματος και γνωστής ακτίνας, συνεπώς θεωρούνται γνωστά και σταθερά το εμβαδόν A και η πολική ροπή αδρανείας J_θ της διατομής. Επίσης, θεωρούνται γνωστές οι ιδιότητες του υλικού κατασκευής της δοκού, δηλαδή η πυκνότητα ρ και το μέτρο διάτμησης G . Τέλος, θεωρείται ότι η κατανομή του υλικού δεν μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού.



Σχήμα 1: Δοκός σε στρέψη λόγω επιβολής (α) ομοιόμορφα κατανεμημένης ροπής σε όλο το μήκος της δοκού και (β) συγκεντρωμένης ροπής στο ελεύθερο άκρο της δοκού

Η εξίσωση *δυναμικής* ισορροπίας της δοκού του Σχήματος 1α είναι (αναλυτικός υπολογισμός βάσει Μηχανικής Παραμορφωσίμου Σώματος δίδεται στο Παράρτημα Α):

$$I_\theta \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + G J_\theta \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = m_x(x,t) \quad (1)$$

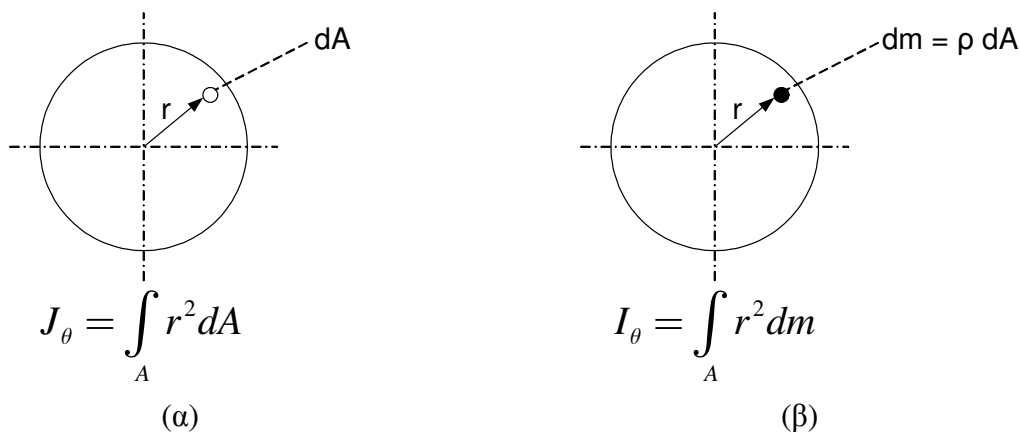
Στην Εξ.(1), ως $\theta = \theta(x)$ δηλώνεται η γωνία στροφής της δοκού κατά το μήκος της. Ισοδύναμα, η Εξ.(1) γράφεται και ως εξής:

$$I_\theta \ddot{\theta} + G J_\theta \theta'' = m_x(x, t) \quad (2)$$

Στην Εξ.(2) χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω συμβολισμοί:

J_θ : πολική ροπή αδρανείας
 I_θ : μαζική ροπή αδρανείας

Υπενθυμίζεται ότι, από τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Σώματος, η πολική ροπή αδρανείας και η μαζική ροπή αδρανείας μίας κυκλικής διατομής ορίζονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Κυκλική διατομή: (α) πολική ροπή αδρανείας και (β) μαζική ροπή αδρανείας

Ειδικότερα, για τη ροπή αδρανείας ισχύει:

$$J_\theta = \int_A r^2 dA \quad (3)$$

Επίσης, για τη μαζική ροπή αδρανείας ισχύει:

$$I_\theta = \int_A r^2 dm = \int_A r^2 \rho dA \xrightarrow{\rho=const} I_\theta = \rho \underbrace{\int_A r^2 dA}_{J_\theta} \Rightarrow I_\theta = \rho J_\theta \quad (4)$$

Υπενθυμίζεται ότι σε **επίπεδα** σχήματα, η πυκνότητα ρ ορίζεται ανά μονάδα εμβαδού. Συνεπώς, η πολική ροπή αδρανείας J_θ έχει διαστάσεις $[L^4]$, ενώ η μαζική ροπή αδρανείας I_θ έχει διαστάσεις $[ML^2]$. Τυπικές μονάδες μέτρησης είναι:

- για την πολική ροπή αδρανείας J_θ : $[m^4]$
- για τη μαζική ροπή αδρανείας I_θ : $[kg m^2]$

Σχετικά με τα ενεργειακά μεγέθη, τα οποία αφορούν στη δοκό του Σχήματος 1, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια της δοκού, λόγω της περιστροφικής της κίνησης, ισούται με:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} I_{\theta} \dot{\theta}^2 dx \quad (5)$$

- Η δυναμική ενέργεια της δοκού, η οποία συσσωρεύεται σε αυτήν λόγω της παραμόρφωσής της, ισούται με:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} G J_{\theta} (\theta')^2 dx \quad (6)$$

- Επειδή δεν υπάρχουν στοιχεία διάχυσης ενέργειας, η ισχύς διάχυσης είναι μηδενική:

$$P_c = 0 \quad (7)$$

- Η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με:

$$P_t = \int_{x=0}^{x=L} m_x(x,t) \dot{\theta} dx \quad (8)$$

Παρατηρώντας τις Εξ.(5,6,8) διαπιστώνουμε ότι υπάρχει πλήρης αναλογία με τις αντίστοιχες ενεργειακές ποσότητες μίας δοκού σε εφελκυσμό. Η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι, στην προκειμένη περίπτωση, εμφανίζεται η γωνία στροφής θ , αντί της μετατόπισης q , η οποία εμφανίζεται στην περίπτωση της εφελκυσμένης δοκού.

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στις Εξ.(5,6,8) απαιτείται μία παραδοχή σχετικά με τη μορφή της συνάρτησης $\theta = \theta(x)$, δηλαδή της συνάρτησης, η οποία περιγράφει τη μεταβολή της γωνίας στροφής θ κατά μήκος της δοκού. Λόγω μικρών παραμορφώσεων, θεωρείται ότι η εν λόγω μεταβολή είναι γραμμική:

$$\theta = \left(\frac{x}{L}\right) \theta_{FE} \quad (9)$$

όπου ως θ_{FE} συμβολίζεται η γωνία στροφής του ελεύθερου άκρου. Η πρώτη χρονική παράγωγος της Εξ.(9) ισούται με:

$$\dot{\theta} = \left(\frac{x}{L}\right) \dot{\theta}_{FE} \quad (10)$$

Η πρώτη χωρική παράγωγος της Εξ.(9) ισούται με:

$$\theta' = \left(\frac{1}{L}\right) \theta_{FE} \quad (11)$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα με τις Εξ.(10,11) στις Εξ.(5,6,8), προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις για τους επί μέρους ενεργειακούς όρους. Ειδικότερα, για τη δοκό του Σχήματος 1, θεωρώντας σταθερή διατομή καθ' όλο το μήκος της δοκού, ισχύει:

- Για την κινητική ενέργεια της δοκού:

$$\begin{aligned}
 T &= \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} I_{\theta} \dot{\theta}^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \int_{x=0}^{x=L} \dot{\theta}^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \int_{x=0}^{x=L} \left(\left(\frac{x}{L}\right) \dot{\theta}_{FE}\right)^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}}{L}\right)^2 \int_{x=0}^{x=L} x^2 dx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}}{L}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=L} = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}}{L}\right)^2 \left(\frac{L^3}{3}\right) \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}^2 L}{3}\right) \\
 &\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}^2 L}{3}\right) \quad (12)
 \end{aligned}$$

- Για τη δυναμική ενέργεια της δοκού:

$$\begin{aligned}
 U &= \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} G J_{\theta} (\theta')^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} G J_{\theta} \left(\left(\frac{1}{L}\right) \theta_{FE}\right)^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) G J_{\theta} \left(\frac{\theta_{FE}}{L}\right)^2 \int_{x=0}^{x=L} dx = \left(\frac{1}{2}\right) G J_{\theta} \left(\frac{\theta_{FE}}{L}\right)^2 L \Rightarrow \\
 &\Rightarrow U = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{G J_{\theta}}{L}\right) \theta_{FE}^2 \quad (13)
 \end{aligned}$$

- Για την ισχύ των εξωτερικών δυνάμεων και για σταθερή κατανομή ροπής m_x :

$$\begin{aligned}
 P_t &= \int_{x=0}^{x=L} m_x(x,t) \dot{\theta} dx = m_x(x,t) \int_{x=0}^{x=L} \dot{\theta} dx = m_x(x,t) \int_{x=0}^{x=L} \left(\left(\frac{x}{L}\right) \dot{\theta}_{FE}\right) dx = m_x(x,t) \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}}{L}\right) \int_{x=0}^{x=L} x dx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P_t = m_x(x,t) \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}}{L}\right) \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=L} = m_x(x,t) \left(\frac{\dot{\theta}_{FE}}{L}\right) \left(\frac{L^2}{2}\right) \Rightarrow P_t = \left(\frac{1}{2}\right) m_x(x,t) \dot{\theta}_{FE} L \quad (14)
 \end{aligned}$$

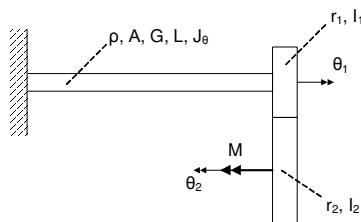
Εάν στην εξεταζόμενη δοκό, αντί της ομοιόμορφα κατανεμημένης ροπής m_x (βλ. Σχήμα 1α), εφαρμοσθεί μία συγκεντρωμένη ροπή M στο ελεύθερο άκρο της (βλ. Σχήμα 1β), τότε ισχύουν και πάλι οι Εξ.(7,12,13), ενώ για τη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ισχύει:

$$P_t = M \dot{\theta}_{FE} \quad (15)$$

Εφαρμογή #1

Έστω το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 3. Το σύστημα αποτελείται από έναν εύκαμπτο άξονα μήκους L και σταθερής διατομής A , καθώς και από ένα ζεύγος συνεργαζομένων οδοντωτών τροχών, εκ των οποίων ο ένας (έστω τροχός #1) είναι σταθερά συνδεδεμένος στο ελεύθερο άκρο της δοκού. Για τον άξονα, θεωρούνται γνωστά τα χαρακτηριστικά του G (μέτρο διάτμησης), J_{θ} (πολική ροπή αδρανείας) και I_{θ} (μαζική ροπή αδρανείας). Για τον τροχό #1, θεωρείται γνωστή η ακτίνα του r_1 καθώς και η συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας του I_1 . Κατ' αντιστοιχία, για τον τροχό #2, θεωρείται γνωστή η ακτίνα του r_2 καθώς και η συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας του I_2 , αντίστοιχα. Στον τροχό #2

ασκείται εξωτερική συγκεντρωμένη ροπή M , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Ζητείται η εξίσωση κίνησης του δυναμικού συστήματος.



Σχήμα 3: Δυναμικό σύστημα δοκού σε στρέψη

Λύση

Για την καταγραφή της εξίσωσης κίνησης, θα χρησιμοποιηθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange.

- Για την κινητική ενέργεια του συστήματος, ισχύει:

- Κινητική ενέργεια τροχού #1:

$$T_1 = \left(\frac{1}{2}\right) I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (16)$$

- Κινητική ενέργεια τροχού #2:

$$T_2 = \left(\frac{1}{2}\right) I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (17)$$

- Κινητική ενέργεια δοκού (βλ. Εξ.(12), υπό την παραδοχή της Εξ.(9)):

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} I_\theta \dot{\theta}^2 dx \Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2}\right) I_\theta \left(\frac{\dot{\theta}_1^2 L}{3}\right) \quad (18)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Εξ.(16,17,18), προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος ισούται με:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) I_1 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) I_2 \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{1}{2}\right) I_\theta \left(\frac{\dot{\theta}_1^2 L}{3}\right) \quad (19)$$

- Για τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, ισχύει:

- Δυναμική ενέργεια τροχού #1: ο τροχός θεωρείται απαραμόρφωτος, άρα σε αυτόν δεν αποθηκεύεται δυναμική ενέργεια:

$$U_1 = 0 \quad (20)$$

- Δυναμική ενέργεια τροχού #2: όμοια με τον τροχό #1, άρα ισχύει:

$$U_2 = 0 \quad (21)$$

- Δυναμική ενέργεια δοκού (βλ. Εξ.(13)):

$$U_L = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{G J_\theta}{L}\right) \theta_1^2 \quad (22)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Εξ.(20,21,22), προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{G J_{\theta}}{L}\right) \theta_1^2 \quad (23)$$

- Επειδή δεν υπάρχουν στοιχεία διάχυσης ενέργειας, η ισχύς διάχυσης είναι μηδενική:

$$P_c = 0 \quad (24)$$

- Η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με (βλ. Εξ.(15)):

$$P_t = M \dot{\theta}_2 \quad (25)$$

Σχετικά με τους Βαθμούς Ελευθερίας του συστήματος, οι κινηματικές μεταβλητές, οι οποίες εμπλέκονται στους ενεργειακούς όρους του συστήματος (βλ. Εξ.(22,23,24,25)) είναι δύο: η γωνία στροφής θ_1 και η γωνία στροφής θ_2 . Υπενθυμίζεται ότι, όπως περιγράφει η Εξ.(9), η γωνία στροφής θ της δοκού εκφράζεται συναρτήσει της γωνίας στροφής θ_1 του ελεύθερου άκρου της. Επίσης, επειδή οι τροχοί #1, #2 συνεργάζονται, από τη μεταξύ τους σχέση μετάδοσης προκύπτει:

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \quad (26)$$

Από την Εξ.(26) έπεται ότι οι κινηματικές μεταβλητές θ_1 και θ_2 είναι μεταξύ τους συζευγμένες. Συνεπώς, μόνο μία από αυτές είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή. Ισοδύναμα, το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα είναι ενός Βαθμού Ελευθερίας. Επιλέγοντας ως Βαθμό Ελευθερίας του συστήματος τη γωνία στροφής θ_2 , από την Εξ.(26) προκύπτει:

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (27)$$

Η πρώτη χρονική παράγωγος της Εξ.(27) ισούται με:

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (28)$$

Εισάγοντας την Εξ.(28) στις Εξ.(19) προκύπτει:

- Για την κινητική ενέργεια του συστήματος, ισχύει:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{1}{2}\right) I_1 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) I_2 \left(\dot{\theta}_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{L}{3}\right) \dot{\theta}_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right) I_1 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) I_2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) I_{\theta} \left(\frac{L}{3}\right) \dot{\theta}_1^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right) \left(I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + I_\theta \left(\frac{L}{3}\right) \right) \dot{\theta}_1^2 \quad (29)$$

Ορίζουμε ως ισοδύναμη μαζική ροπή αδρανείας \bar{I}_1 την ακόλουθη ποσότητα:

$$\bar{I}_1 = \left(I_1 + I_2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + I_\theta \left(\frac{L}{3}\right) \right) \quad (30)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(29,30) δίδει:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) \bar{I}_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (31)$$

- Για τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, ισχύει:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{G J_\theta}{L}\right) \theta_1^2 \quad (32)$$

Ορίζουμε ως ισοδύναμη σταθερά στροφικού ελατηρίου k_θ την ακόλουθη ποσότητα:

$$k_\theta = \left(\frac{G J_\theta}{L}\right) \quad (33)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(32,33) δίδει:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \theta_1^2 \quad (34)$$

- Για την ισχύ των εξωτερικών δυνάμεων, εισάγοντας την Εξ.(28) στην Εξ.(25), προκύπτει:

$$P_t = M \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \dot{\theta}_1 \quad (35)$$

Ορίζουμε ως ισοδύναμη ροπή \bar{M} την ακόλουθη ποσότητα:

$$\bar{M} = M \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (36)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(35,36), δίδει:

$$P_t = \bar{M} \dot{\theta}_1 \quad (37)$$

Εφαρμόζοντας, κατά τα γνωστά, την Ενεργειακή Αρχή Lagrange για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = \theta_1$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος ισούται με:

$$L = T - U \quad (38)$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(31,34,38), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}\right) \bar{I}_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \theta_1^2 \quad (39)$$

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=\theta_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{\theta}_1} \xrightarrow{\text{Εξ.(39)}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \left[\left(\frac{1}{2}\right) \bar{I}_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \theta_1^2 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \bar{I}_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (40)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(40) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{d}{dt} (\bar{I}_1 \dot{\theta}_1) = \bar{I}_1 \ddot{\theta}_1 \quad (41)$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=\theta_1} -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -\frac{\partial (T-U)}{\partial \theta_1} \xrightarrow{\text{Εξ.(39)}} -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\left(\frac{1}{2}\right) \bar{I}_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \theta_1^2 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = k_\theta \theta_1 \end{aligned} \quad (42)$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=\theta_1} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} (0) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \quad (43)$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=\theta_1} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} (\bar{M} \dot{\theta}_1) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_1} = \bar{M} \quad (44)$$

Η μαθηματική έκφραση για την Ενεργειακή Αρχή Lagrange είναι:

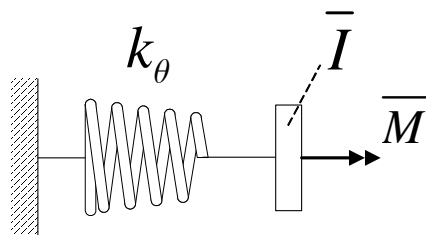
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \quad (45)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(45) με τις Εξ.(41,42,43,44), προκύπτει:

$$\bar{I}_1 \ddot{\theta}_1 + k_\theta \theta_1 = \bar{M} \quad (46)$$

Η Εξ.(46) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος. Παρατηρούμε ότι η Εξ.(46) περιγράφει ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα, αποτελούμενο από ένα στροφικό ελατήριο σταθεράς k_θ και από έναν στροφόμενο δίσκο μαζικής ροπής

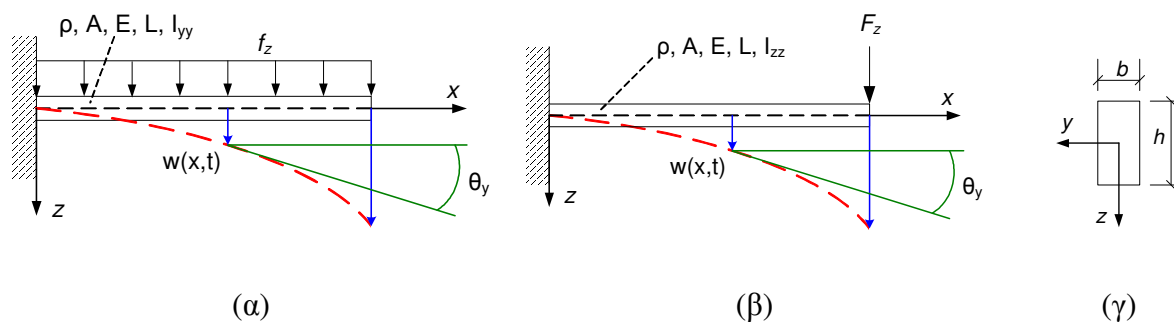
αδρανείας \bar{I}_1 , το οποίο (σύστημα) καταπονείται από μία συγκεντρωμένη ροπή \bar{M} , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Δυναμικό σύστημα ισοδύναμο του συστήματος του Σχήματος 3

Δοκός σε κάμψη

Στο Σχήμα 5 απεικονίζεται μία μονόπακτη ελαστική δοκός (πρόβολος) μήκους L σε κάμψη. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται ο ουδέτερος άξονας της δοκού στην παραμορφωμένη κατάσταση (για καθαρά εποπτικούς λόγους, απεικονίζεται μία υπερβολικά παραμορφωμένη κατάσταση), ενώ με πράσινο χρώμα σημειώνεται η γωνία κάμψης θ_y , η οποία σχηματίζεται μεταξύ του παραμορφωμένου και του απαραμόρφωτου σχήματος του ουδετέρου άξονα της δοκού, σε μία τυχαία θέση x και κατά τη χρονική στιγμή t (ως $w(x,t)$ σημειώνεται το αντίστοιχο βέλος κάμψης στη x και κατά τη χρονική στιγμή t). Επίσης, στο Σχήμα 5α απεικονίζεται η περίπτωση κάμψης της δοκού λόγω της επιβολής μίας ομοιόμορφης κατανομής κατακόρυφου φορτίου f_z καθ' όλο το μήκος της δοκού, ενώ στο Σχήμα 5β απεικονίζεται η περίπτωση κάμψης της δοκού, όταν σ' αυτήν επιβάλλεται συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο F_z στο ελεύθερο άκρο της. Σχετικά με τη διατομή της δοκού, θεωρούμε ότι αυτή είναι ορθογωνικού σχήματος (άρα, διπλής συμμετρίας), γνωστών διαστάσεων, και σταθερή καθ' όλο το μήκος της δοκού. Συνεπώς, θεωρούνται γνωστά και σταθερά το εμβαδόν A και η ροπή αδρανείας I_{yy} της διατομής. Επίσης, θεωρείται ότι σε όλο το μήκος της δοκού, οι ιδιότητες του υλικού κατασκευής, δηλαδή η πυκνότητα ρ και το μέτρο ελαστικότητας E , είναι γνωστά και σταθερά μεγέθη.



Σχήμα 5: Δοκός σε κάμψη: (α) κάμψη λόγω ομοιόμορφα κατανεμημένης δύναμης σε όλο το μήκος της δοκού, (β) κάμψη λόγω συγκεντρωμένης δύναμης στο ελεύθερο άκρο της δοκού και (γ) ορθογωνική διατομή δοκού

Υπενθυμίζεται ότι, από τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Σώματος, για τη ροπή αδρανείας της ορθογωνικής διατομής του Σχήματος 5γ ισχύουν τα εξής:

- Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα $y - y$:

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA = \left(\frac{1}{12}\right)bh^3 \quad (47)$$

- Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα $z - z$:

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA = \left(\frac{1}{12}\right)b^3h \quad (48)$$

Από την Τεχνική Θεωρία Κάμψης, είναι γνωστό ότι για μικρές παραμορφώσεις (δηλαδή, για μικρές γωνίες κάμψης θ_y) η εξίσωση ισοροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος dx της δοκού του Σχήματος 5α είναι (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα Β):

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + EI_{yy} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) = f_z \quad (49)$$

Σχετικά με τα ενεργειακά μεγέθη, τα οποία αφορούν στη δοκό του Σχήματος 5α, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια της δοκού, λόγω της καμπτικής της μετακίνησης, ισούται με:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2 dx \quad (50)$$

- Η δυναμική ενέργεια της δοκού, η οποία συσσωρεύεται σε αυτήν λόγω της παραμόρφωσής της, ισούται με:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} EI_{yy} (w'')^2 dx \quad (51)$$

- Επειδή δεν υπάρχουν στοιχεία διάχυσης ενέργειας, η ισχύς διάχυσης είναι μηδενική:

$$P_c = 0 \quad (52)$$

- Η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με:

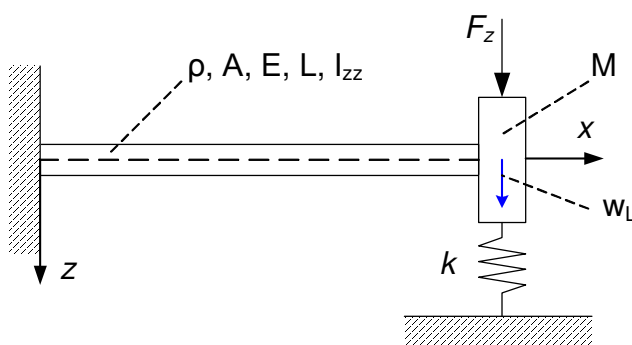
$$P_t = \int_{x=0}^{x=L} f_z \dot{w} dx \quad (53)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στις Εξ.(50,51,53) απαιτείται μία παραδοχή σχετικά με τη συνάρτηση $w = w(x)$, δηλαδή τη συνάρτηση, η οποία περιγράφει τη μεταβολή του βέλους κάμψης w κατά μήκος της δοκού. Παρατηρώντας, δε, την Εξ.(51), διαπιστώνουμε ότι σε αυτήν εμφανίζεται η **δεύτερη** χωρική παράγωγος του βέλους κάμψης, συνεπώς η συνάρτηση $w = w(x)$ δεν είναι δυνατόν να είναι γραμμική (πρώτης τάξεως). Ισοδύναμα, η κινηματική παραδοχή σχετικά με την παραμόρφωση της δοκού δεν πρέπει να είναι γραμμική. Προς αυτήν την κατεύθυνση, υπάρχει η δυνατότητα διατύπωσης διαφόρων

εκφράσεων παρεμβολής του βέλους κάμψης, όπως με τη χρήση πολυωνύμων Hermite. Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα, μέσω παραδείγματος, θα παρουσιασθεί μία εναλλακτική (τριγωνομετρικής μορφής) διατύπωση.

Εφαρμογή #2

Έστω το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 6. Το σύστημα αποτελείται από μία εύκαμπτη δοκό, από μία συγκεντρωμένη μάζα και από ένα ελατήριο. Η δοκός έχει μήκος L , διαθέτει ορθογωνική διατομή εμβαδού A , και είναι κατασκευασμένη από υλικό γνωστών ιδιοτήτων (πυκνότητα ρ και μέτρο ελαστικότητας E). Θεωρείται ότι κατά μήκος της δοκού η διατομή και οι ιδιότητες του υλικού είναι σταθερά μεγέθη. Η συγκεντρωμένη μάζα M είναι σταθερά συνδεδεμένη στο ελεύθερο άκρο της δοκού και εδράζεται επί γραμμικού ελατηρίου σταθεράς k . Ζητείται η εξίσωση κίνησης του δυναμικού συστήματος.



Σχήμα 6: Δυναμικό σύστημα δοκού σε κάμψη υπό τη δράση συγκεντρωμένου φορτίου

Λύση

Και σε αυτήν την εφαρμογή, για την καταγραφή της εξίσωσης κίνησης, θα χρησιμοποιηθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange.

- Για την κινητική ενέργεια του συστήματος, ισχύει:
 - ο Κινητική ενέργεια δοκού (βλ. Εξ.(50)):

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2 dx \quad (54)$$

- ο Κινητική ενέργεια συγκεντρωμένης μάζας:

$$T_1 = \left(\frac{1}{2}\right) M \dot{w}_L^2 \quad (55)$$

- ο Κινητική ενέργεια ελατηρίου:

$$T_2 = 0 \quad (56)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Εξ.(54,55,56), προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος ισούται με:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2 dx + \left(\frac{1}{2}\right) M \dot{w}_L^2 \quad (57)$$

- Για τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, ισχύει:
 - ο Δυναμική ενέργεια δοκού (βλ. Εξ.(51)):

$$U_L = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} E I_{yy} (w'')^2 dx \quad (58)$$

- ο Δυναμική ενέργεια συγκεντρωμένης μάζας:

$$U_1 = 0 \quad (59)$$

- ο Δυναμική ενέργεια ελατηρίου:

$$U_2 = \left(\frac{1}{2}\right) k w_L^2 \quad (60)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Εξ.(58,59,60), προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} E I_{yy} (w'')^2 dx + \left(\frac{1}{2}\right) k w_L^2 \quad (61)$$

- Επειδή δεν υπάρχουν στοιχεία διάχυσης ενέργειας, η ισχύς διάχυσης είναι μηδενική:

$$P_c = 0 \quad (62)$$

- Η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με (βλ. Εξ.(15)):

$$P_t = F \dot{w}_L \quad (63)$$

Για την περιγραφή του βέλους κάμψης $w = w(x)$, θα χρησιμοποιηθεί η εξής παρεμβολή:

$$w(x,t) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) w_L \quad (64)$$

Η επιλογή αυτή δεν είναι τυχαία και εξηγείται στο Παράρτημα 'Γ'. Η πρώτη **χρονική** παράγωγος της Εξ.(64) ισούται με:

$$\dot{w} = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) \dot{w}_L \quad (65)$$

Η πρώτη **χωρική** παράγωγος της Εξ.(64) ισούται με:

$$w' = \left(\frac{\pi}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) w_L \quad (66)$$

Η δεύτερη **χωρική** παράγωγος της Εξ.(64) ισούται με:

$$w'' = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) w_L \quad (67)$$

Τονίζεται ιδιαίτερος ότι η συνάρτηση περιγραφής του βέλους κάμψης $w = w(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις κινηματικές συνθήκες στο σημείο στήριξης της δοκού. Αυτό σημαίνει ότι στη θέση $x = 0$ (βλ. Σχήμα 6) θα πρέπει:

- η κομβική μετατόπιση να είναι μηδενική

$$x = 0: \quad w(0, t) = 0 \quad (68)$$

- η γωνία κάμψης να είναι μηδενική

$$x = 0: \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (69)$$

Με βάση την Εξ.(64), έπεται ότι το κατακόρυφο βέλος κάμψης της δοκού γράφεται ως συνάρτηση του βέλους κάμψης w_L του ελεύθερου άκρου της δοκού. Συνεπώς, το δυναμικό σύστημα διαθέτει μία ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (το βέλος κάμψης w_L του ελεύθερου άκρου της δοκού), συνεπώς το εν λόγω σύστημα είναι ενός Βαθμού Ελευθερίας.

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(57) με την Εξ.(65), προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος ισούται με (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα 'Δ'):

$$T = \left(\frac{1}{2}\right)(0.22676\rho AL + M) \dot{w}_L^2 \quad (70)$$

Στην Εξ.(70), ορίζουμε ως ισοδύναμη μάζα την ποσότητα:

$$\bar{M} = 0.22676\rho AL + M \quad (71)$$

Εισάγοντας την Εξ.(71) στην Εξ.(70), προκύπτει:

$$T = \left(\frac{1}{2}\right)\bar{M} \dot{w}_L^2 \quad (72)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(61) με την Εξ.(67), προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με (αναλυτικός υπολογισμός παρατίθεται στο Παράρτημα 'Ε'):

$$U = \left(\frac{1}{2}\right)EI_{yy}w_L^2\left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)kw_L^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(EI_{yy}\left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) + k\right)w_L^2 \quad (73)$$

Στην Εξ.(73), ορίζουμε ως ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου την ποσότητα:

$$\bar{k} = EI_{yy}\left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) + k \quad (74)$$

Εισάγοντας την Εξ.(74) στην Εξ.(73), προκύπτει:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \bar{k} w_L^2 \quad (75)$$

Εφαρμόζοντας, κατά τα γνωστά, την Ενεργειακή Αρχή Lagrange για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = w_L$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος ισούται με:

$$L = T - U \quad (76)$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(72,75,76), προκύπτει:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}\right) \bar{M} \dot{w}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \bar{k} w_L^2 \quad (77)$$

- Για τον αδρανειακό όρο, ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=w_L} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} &= \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{w}_L} \xrightarrow{\text{Εξ.}(77)} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{w}_L} \left[\left(\frac{1}{2}\right) \bar{M} \dot{w}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \bar{k} w_L^2 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} = \bar{M} \dot{w}_L \end{aligned} \quad (78)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(78) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_L} \right) = \frac{d}{dt} (\bar{M} \dot{w}_L) = \bar{M} \ddot{w}_L \quad (79)$$

- Για τον όρο ελαστικότητας, ισχύει:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=w_L} -\frac{\partial L}{\partial w_L} &= -\frac{\partial (T-U)}{\partial w_L} \xrightarrow{\text{Εξ.}(77)} -\frac{\partial L}{\partial w_L} = -\frac{\partial}{\partial w_L} \left[\left(\frac{1}{2}\right) \bar{M} \dot{w}_L^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \bar{k} w_L^2 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial w_L} = -(-\bar{k} w_L) \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial w_L} = \bar{k} w_L \end{aligned} \quad (80)$$

- Για τον όρο διάχυσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=w_L} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{w}_L} (0) \Rightarrow \frac{\partial P_C}{\partial \dot{w}_L} = 0 \quad (81)$$

- Για τον όρο διέγερσης, ισχύει:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow{q=w_L} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{w}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{w}_L} (F \dot{w}_L) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{w}_L} = F \quad (82)$$

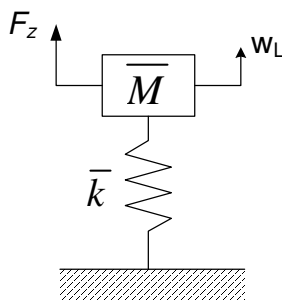
Η μαθηματική έκφραση για την Ενεργειακή Αρχή Lagrange είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \quad (83)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(83) με τις Εξ.(79,80,81,82), προκύπτει:

$$\bar{M} \ddot{w}_L + \bar{k} w_L = F \quad (84)$$

Η Εξ.(84) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος (βλ. Σχήμα 6) και παρατηρούμε ότι η Εξ.(84) περιγράφει ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα, αποτελούμενο από ένα γραμμικό ελατήριο σταθεράς \bar{k} και από μία συγκεντρωμένη μάζα \bar{M} , το οποίο (σύστημα) καταπονείται από μία συγκεντρωμένη δύναμη F , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Δυναμικό σύστημα ισοδύναμο του συστήματος του Σχήματος 6

Η Εξ.(84), όπως άλλωστε και η Εξ.(46), έχει μία πολύ ενδιαφέρουσα ποιοτική ερμηνεία: όλα τα συνεχή δυναμικά συστήματα είναι δυνατόν να αναχθούν σε διακριτά συστήματα λίγων Βαθμών Ελευθερίας, κάτι που διευκολύνει σημαντικά την ανάλυση σύνθετων κατασκευών.

Σημαντική Παρατήρηση

Από την προηγούμενη εφαρμογή προκύπτει ένα πολύ ενδιαφέρον, από τεχνολογικής απόψεως, συμπέρασμα. Ειδικότερα, θεωρώντας ότι $M = k = 0$, δηλαδή θεωρώντας μόνον τη μονόπακτη δοκό, η πρώτη ιδιοσυχνότητα προκύπτει ίση με:

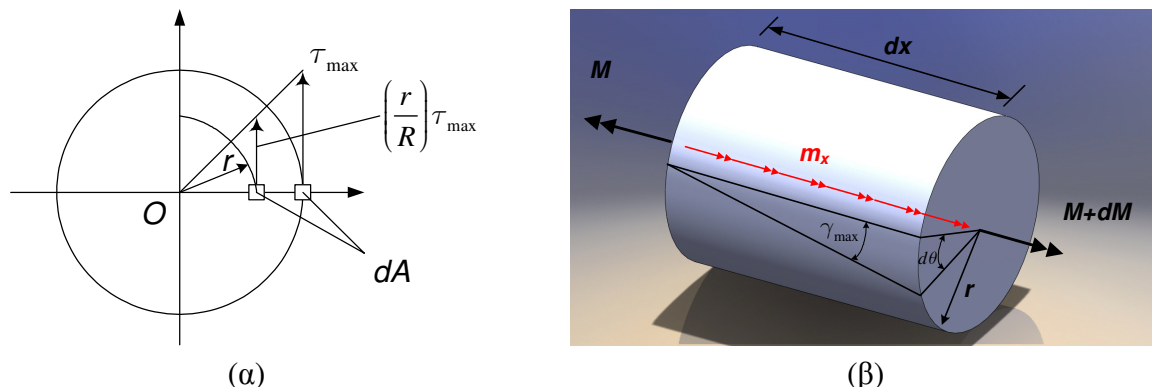
$$w_L^2 = \frac{\bar{k}}{\bar{M}} = \frac{EI_{yy} \left(\frac{\pi^4}{32L^3} \right) + \mathcal{K}}{0.22676 \rho AL + \mathcal{M}} = \frac{EI_{yy} \left(\frac{\pi^4}{32L^3} \right)}{0.22676 \rho AL} = \left(\frac{\pi^4}{32 \times 0.22676} \right) \left(\frac{EI_{yy}}{\rho AL^4} \right) \Rightarrow w_L \propto \left(\frac{1}{L^2} \right) \quad (85)$$

Η Εξ.(85) πληροφορεί ότι, σε μία μονόπακτη δοκό, η πρώτη ιδιοσυχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου του μήκους της δοκού. Αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ σημαντικό στην αεροναυπηγική. Ειδικότερα, σε ένα αεροσκάφος επιζητείται η αύξηση της άνωσης, κάτι που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μεγάλες επιφάνειες άνωσης (πτέρυγες). Ωστόσο, μία μεγάλη επιφάνεια άνωσης έχει και μεγάλο μήκος. Συνεπώς, βάσει της Εξ.(85), μία πολύ μακριά πτέρυγα αεροσκάφος, η οποία μοντελοποιείται ως μονόπακτη δοκός, χαρακτηρίζεται από πολύ χαμηλές ιδιοσυχνότητες, άρα είναι ισχυρά επιρρεπής σε ταλαντώσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Στρέψη δοκού: Σημειώσεις από Μηχανική Παραμορφώσιμου Σώματος

Στην Τεχνική Θεωρία Στρέψης, ισχύουν οι ακόλουθες δύο βασικές παραδοχές για τη στρέψη *κυλινδρικών* σωμάτων:

1. Μία επίπεδη τομή κάθετη στον άξονα του κυλινδρικού σώματος παραμένει επίπεδη και μετά την επιβολή της στρεπτικής ροπής.
2. Η διατμητική παραμόρφωση γ σε μια διατομή μεταβάλλεται γραμμικά από τον άξονα του σώματος προς την περιφέρεια. Στον άξονα του σώματος ισχύει $\gamma = 0$, ενώ στην περιφέρεια του σώματος ισχύει $\gamma = \gamma_{\max}$.



Σχήμα Α.1: Στρέψη ελαστικής δοκού: (α) διατομή και (β) στοιχειώδες τμήμα μήκους dx

Με βάση τις ανωτέρω παραδοχές, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ισορροπία ροπών στη διατομή (βλ. Σχήμα Α.1α)

$$M = \underbrace{\int_A \underbrace{\left(\frac{r}{R}\right) \tau_{\max}}_{\text{τάση}} \underbrace{dA}_{\text{εμβαδόν}} \underbrace{r}_{\text{μοχλοβραχίονας}}}_{\text{ροπή}} \Rightarrow M = \left(\frac{\tau_{\max}}{R}\right) \int_A r^2 dA \Rightarrow M = \left(\frac{\tau_{\max}}{R}\right) J_{\theta} \Rightarrow \tau_{\max} = \left(\frac{MR}{J_{\theta}}\right) \quad (\text{A.1})$$

- Στροφή διατομής (βλ. Σχήμα Α.1β)

$$R d\theta = \gamma_{\max} dx \quad (\text{A.2})$$

Επίσης, από τον ορισμό της διατμητικής τάσης, ισχύει:

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max} \Rightarrow \gamma_{\max} = \tau_{\max} \left(\frac{1}{G}\right) \quad (\text{A.3})$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(Α.2) με τις Εξ.(Α.1, Α.3), προκύπτει:

$$\begin{aligned} R d\theta = \gamma_{\max} dx &\xrightarrow{\text{Εξ. (A.3)}} R d\theta = \tau_{\max} \left(\frac{1}{G}\right) dx \xrightarrow{\text{Εξ. (A.1)}} \cancel{R} d\theta = \left(\frac{M \cancel{R}}{J_{\theta}}\right) \left(\frac{1}{G}\right) d\theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow d\theta = \left(\frac{M}{GJ_{\theta}}\right) dx \Rightarrow M = GJ_{\theta} \left(\frac{d\theta}{dx}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Λαμβάνοντας την ισορροπία ροπών σε στοιχειώδες τμήμα μήκους dx , προκύπτει:

$$M + dM + m_x(x,t)dx - M = 0 \Rightarrow dM + m_x dx = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = -m_x(x,t) \quad (\text{A.5})$$

Η πρώτη χωρική παράγωγος της Εξ.(A.4) ισούται με:

$$\frac{dM}{dx} = GJ_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \quad (\text{A.6})$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(A.5, A.6) δίδει:

$$GJ_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) = -m_x(x,t) \Rightarrow GJ_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) + m_x(x,t) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Η Εξ.(A.7) εκφράζει τη **στατική** ισορροπία σε ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dx της ελαστικής δοκού. Για τη διατύπωση της **δυναμικής** ισορροπίας του εν λόγω τμήματος, θα χρησιμοποιηθεί η Αρχή του D'Alembert, σύμφωνα με την οποία αρκεί να προσδοθεί στο στοιχειώδες τμήμα αδρανειακό αίτιο, φοράς αντίθετης από τη φορά περιστροφής του στοιχειώδους τμήματος. Ισοδύναμα, αρκεί να προσδοθεί ροπή ίση με:

$$-I_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

Προσθέτοντας τον ανωτέρω όρο στην Εξ.(A.7), τελικά προκύπτει:

$$-I_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + GJ_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) + m_x(x,t) = 0 \quad (\text{A.9})$$

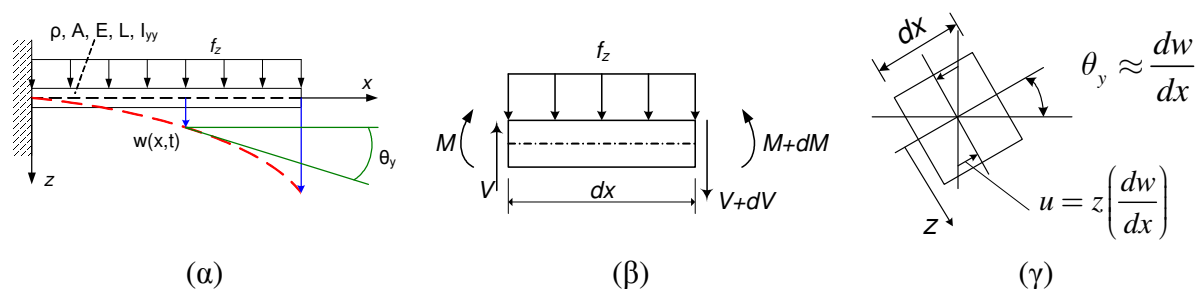
Η Εξ.(A.9) αποτελεί την εξίσωση δυναμικής ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος μήκους dx μίας ελαστικής δοκού σε στρέψη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Κάμψη δοκού: Σημειώσεις από Μηχανική Παραμορφώσιμου Σώματος

Στην Τεχνική Θεωρία Κάμψης, ισχύουν οι ακόλουθες δύο βασικές παραδοχές:

1. Μία επίπεδη τομή κάθετη στον άξονα του καμπτομένου σώματος παραμένει επίπεδη και μετά την επιβολή της καμπτικής ροπής.
2. Τα υλικά σημεία του καμπτομένου σώματος, τα οποία βρίσκονται επί του ουδετέρου άξονα του σώματος, δεν εμφανίζουν οριζόντια μετατόπιση (θεωρία μικρών παραμορφώσεων).

Με βάση τις ανωτέρω παραδοχές, είναι δυνατόν να διατυπωθεί η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος μήκους dx , το οποίο υποβάλλεται σε κάμψη λόγω επιβολής μίας ομοιόμορφης κατανομής δυνάμεων (βλ. Σχήμα Β.1).



Σχήμα Β.1: Κάμψη ελαστικής δοκού υπό ομοιόμορφη κατανομή καμπτικού φορτίου: (α) μοντέλο, (β) εντατικά μεγέθη επί στοιχειώδους τμήματος μήκους dx και (γ) (υπερβολικά) παραμορφωμένο σχήμα του στοιχειώδους τμήματος

Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα Β.1α απεικονίζεται μία τυπική περίπτωση ελαστικής δοκού σε κάμψη λόγω επιβολής ομοιόμορφης κατανομής καμπτικού φορτίου. Στο Σχήμα Β.1β απεικονίζεται ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dx της ελαστικής καμπτομένης δοκού, επί του οποίου έχουν σημειωθεί τα εμπλεκόμενα εντατικά μεγέθη. Στο, δε, Σχήμα Β.1γ απεικονίζεται το παραμορφωμένο σχήμα του στοιχειώδους τμήματος μήκους dx . Για εποπτικούς λόγους και προκειμένου να εμφανισθούν καθαρά τα απεικονιζόμενα μεγέθη, το παραμορφωμένο σχήμα του εν λόγω στοιχειώδους τμήματος έχει μεγεθυνθεί υπερβολικά.

Θεωρώντας προσέγγιση πρώτης τάξεως, η αξονική παραμόρφωση ε_x του τμήματος του Σχήματος Β.1β, εξ ορισμού, ισούται με:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (\text{B.1})$$

όπου η μεταβλητή u εκφράζει οριζόντια μετατόπιση. Σύμφωνα με το νόμο του Hooke, η αντίστοιχη αξονική τάση σ_x είναι ίση με:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E \quad (\text{B.2})$$

Σε ένα καμπτόμενο τμήμα, η αξονική τάση σ_x δεν είναι άλλη από την ορθή τάση, η οποία αναπτύσσεται λόγω κάμψης, και, σύμφωνα με την Τεχνική Θεωρία Κάμψης, ισούται με:

$$\sigma_x = \left(\frac{M}{I_{yy}} \right) z \quad (\text{B.3})$$

Στην Εξ.(B.3), ως M συμβολίζεται η επιβαλλόμενη καμπτική ροπή, I_{yy} είναι η ροπή αδρανείας της διατομής του καμπτομένου σώματος και z είναι η απόσταση της ακρότατης ίνας του σώματος από τον ουδέτερο άξονα του σώματος. Διευκρινίζεται ότι η ορθή τάση σ_x από κάμψης είναι θετική στο εφελκόμενο τμήμα του καμπτομένου σώματος και αρνητική στο θλιβόμενο τμήμα του καμπτομένου σώματος, αντίστοιχα. Ο συνδυασμός των Εξ.(B.1, B.2, B.3) δίδει:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = \left(\frac{M}{I_{yy}} \right) z \Rightarrow E \left(\frac{du}{dx} \right) = \left(\frac{M}{I_{yy}} \right) z \Rightarrow M z = E I_{yy} \left(\frac{du}{dx} \right) \quad (\text{B.4})$$

Βάσει των παραδοχών της Τεχνικής Θεωρίας Κάμψης (επιπεδότητα διατομών και θεωρία μικρών παραμορφώσεων), για τη γωνία θ_y του Σχήματος B.1γ ισχύει:

$$\theta_y \approx \sin \theta_y \approx \tan \theta_y \quad (\text{B.5})$$

Βάσει της Εξ.(B.5), η οριζόντια μετατόπιση u των υλικών σημείων μίας διατομής του καμπτομένου σώματος, ισούται με (βλ. και Σχήμα B.1γ):

$$u = z \left(\frac{dw}{dx} \right) \quad (\text{B.6})$$

όπου w είναι η κατακόρυφη μετατόπιση ενός υλικού σημείου και z η κατακόρυφη απόστασή του από τον ουδέτερο άξονα του καμπτομένου σώματος. Η πρώτη χωρική παράγωγος της Εξ.(B.6) ισούται αριθμητικά με την εφαπτομένη της γωνίας (γωνία κάμψης), η οποία σχηματίζεται μεταξύ του παραμορφωμένου και του απαραμόρφωτου σχήματος του ουδετέρου άξονα (βλ. Σχήμα B.1α, B.1γ).

$$\frac{du}{dx} = z \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (\text{B.7})$$

Εισάγοντας την Εξ.(B.7) στην Εξ.(B.4), προκύπτει:

$$M z = E I_{yy} z \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) \Rightarrow M = E I_{yy} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (\text{B.8})$$

Από την ισορροπία ροπών ως προς το δεξί άκρο του στοιχειώδους τμήματος μήκους dx (βλ. Σχήμα B.1β) και θεωρώντας ως θετική την αριστερόστροφη φορά, προκύπτει:

$$\begin{aligned} (+) \sum M = 0 &\Rightarrow M + dM - M - Vdx + f_z dx \left(\frac{dx}{2} \right) = 0 \Rightarrow dM - Vdx + f_z dx \left(\frac{dx}{2} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{dM}{dx} \right) - V + f_z \left(\frac{dx}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V - f_z \left(\frac{dx}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Καθώς η τιμή του διαφορικού dx τείνει στο μηδέν, τελικά από την Εξ.(B.9) προκύπτει:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (\text{B.10})$$

Από την ισορροπία δυνάμεων στο στοιχειώδες τμήμα μήκους dx , προκύπτει:

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V - (V + dV) + f_z dx = 0 \Rightarrow -dV + f_z dx = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = f_z \quad (\text{B.11})$$

Η πρώτη χωρική παράγωγος της Εξ.(B.8) ισούται με:

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = EI_{yy} \left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right) \quad (\text{B.12})$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(B.12) με την Εξ.(B.10), προκύπτει:

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = EI_{yy} \left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right) \Rightarrow V = EI_{yy} \left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right) \quad (\text{B.13})$$

Η πρώτη χωρική παράγωγος της Εξ.(B.13) ισούται με:

$$\frac{dV}{dx} = EI_{yy} \left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right) \Rightarrow f_z = EI_{yy} \left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right) \quad (\text{B.14})$$

Η Εξ.(B.14) εκφράζει την εξίσωση της στατικής ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος μήκους dx ενός καμπτομένου σώματος. Σύμφωνα με την Αρχή του D'Alembert, η διατύπωση της εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας του εν λόγω τμήματος προκύπτει από την εξίσωση στατικής ισορροπίας, εάν σε αυτήν προστεθεί αδρανειακός όρος ίσος και αντίθετος από την κίνηση του σώματος. Στην προκειμένη περίπτωση, ο εν λόγω αδρανειακός όρος ισούται με:

$$-\rho A \left(\frac{d^2 w}{dt^2}\right) \quad (\text{B.15})$$

όπου ως ρ συμβολίζεται η πυκνότητα του υλικού κατασκευής της ελαστικής δοκού και ως A συμβολίζεται το εμβαδόν της διατομής της δοκού. Προσθέτοντας τον όρο (B.15) στο αριστερό μέλος της Εξ.(B.14), τελικά προκύπτει:

$$-\rho A \left(\frac{d^2 w}{dt^2}\right) + EI_{yy} \left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right) = f_z \quad (\text{B.16})$$

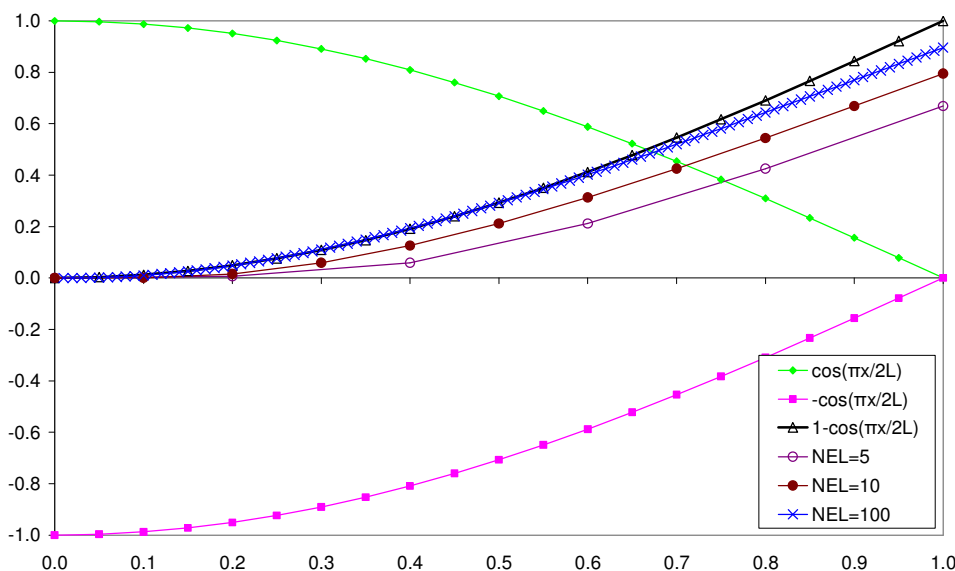
Η Εξ.(B.16) αποτελεί την εξίσωση δυναμικής ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος μήκους dx μίας ελαστικής δοκού σε κάμψη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Αιτιολόγηση επιλογής τριγωνομετρικής συνάρτησης παρεμβολής του κατακορύφου βέλους κάμψης

Σύμφωνα με την Εξ.(64), για την περιγραφή του βέλους κάμψης $w = w(x)$ μία ελαστικής δοκού σε κάμψη, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η εξής παρεμβολή:

$$w(x,t) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) w_L \quad (\Gamma.1)$$

όπου w_L είναι το βέλος κάμψης του ελευθέρου άκρου και L είναι το μήκος της δοκού. Αποδεικνύεται, με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, ότι η Εξ.(Γ.1) περιγράφει την πρώτη ιδιομορφή μίας μονόπακτης ελαστικής δοκού. Επειδή η συγκεκριμένη μαθηματική απόδειξη εκφεύγει του πλαισίου προπτυχιακών σημειώσεων, στο παρόν Παράρτημα, αντί της μαθηματικής αποδείξεως, θα παρατεθούν αριθμητικά αποτελέσματα (βλ. Σχήμα Γ.1), τα οποία συνηγορούν στη χρήση της Εξ.(Γ.1) ως συνάρτησης παρεμβολής του βέλους κάμψης.



Σχήμα Γ.1: Πρώτη ιδιομορφή μονόπακτης ελαστικής δοκού και τριγωνομετρική παρεμβολή του κατακορύφου βέλους κάμψης

Πιο αναλυτικά, στο Σχήμα Γ.1:

- με συνεχή μωβ γραμμή απεικονίζεται η πρώτη ιδιομορφή μίας μονόπακτης ελαστικής δοκού, όταν η δοκός διακριτοποιείται με $NEL = 5$ πεπερασμένα δοκιδόμορφα στοιχεία (δηλαδή, πεπερασμένα στοιχεία δοκού).
- με καφέ γραμμή, απεικονίζεται η πρώτη ιδιομορφή της εν λόγω δοκού, όταν αυτή διακριτοποιείται με $NEL = 10$ πεπερασμένα δοκιδόμορφα στοιχεία. Διευκρινίζεται ότι ως NEL συμβολίζεται το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων της διακριτοποίησης (*Number of Elements*).
- με καφέ γραμμή, απεικονίζεται η πρώτη ιδιομορφή της εν λόγω δοκού, όταν αυτή διακριτοποιείται με $NEL = 100$ πεπερασμένα δοκιδόμορφα στοιχεία.

- με μπλε γραμμή, απεικονίζεται η πρώτη ιδιομορφή της εν λόγω δοκού, όταν αυτή διακριτοποιείται με $NEL = 100$ πεπερασμένα δοκιδόμορφα στοιχεία.
- με πράσινη γραμμή απεικονίζεται η συνάρτηση $\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), x \in [0, L]$
- με ροζ γραμμή απεικονίζεται η συνάρτηση $-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), x \in [0, L]$
- με μαύρη γραμμή απεικονίζεται η συνάρτηση $1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), x \in [0, L]$

Διευκρινίζεται ότι οι ιδιομορφές έχουν υπολογισθεί με τη βοήθεια του εμπορικού λογισμικού ANSYS. Παρατηρώντας το Σχήμα Γ.1, διαπιστώνουμε ότι η πρώτη ιδιομορφή μίας μονόπακτης ελαστικής δοκού, καθώς αυξάνεται το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων, με τα οποία διακριτοποιείται η δοκός, τείνει προς την καμπύλη $1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$. Συνεπώς, για άπειρο πλήθος διαμερίσεων, η εν λόγω πρώτη ιδιομορφή θα ταυτισθεί με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), x \in [0, L]$.

Με την επιλογή της συνάρτησης παρεμβολής $1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ εξασφαλίζεται και η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στη θέση στήριξης μίας μονόπακτης ελαστικής δοκού. Πιο συγκεκριμένα, στο πακτωμένο άκρο της δοκού θα πρέπει και το βέλος κάμψης να είναι μηδενικό (δηλαδή θα πρέπει $w(x=0, t) = 0$), αλλά και η γωνία κάμψης να είναι, επίσης, μηδενική (δηλαδή θα πρέπει $w'(x=0, t) = 0$). Εκτελώντας πράξεις με τη συνάρτηση παρεμβολής, προκύπτει:

- Για το βέλος κάμψης:

$$w(x, t) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) w_L \xrightarrow{x=0} w(0, t) = (1 - \cos(0)) w_L \Rightarrow w(0, t) = 0 \quad (\Gamma.2)$$

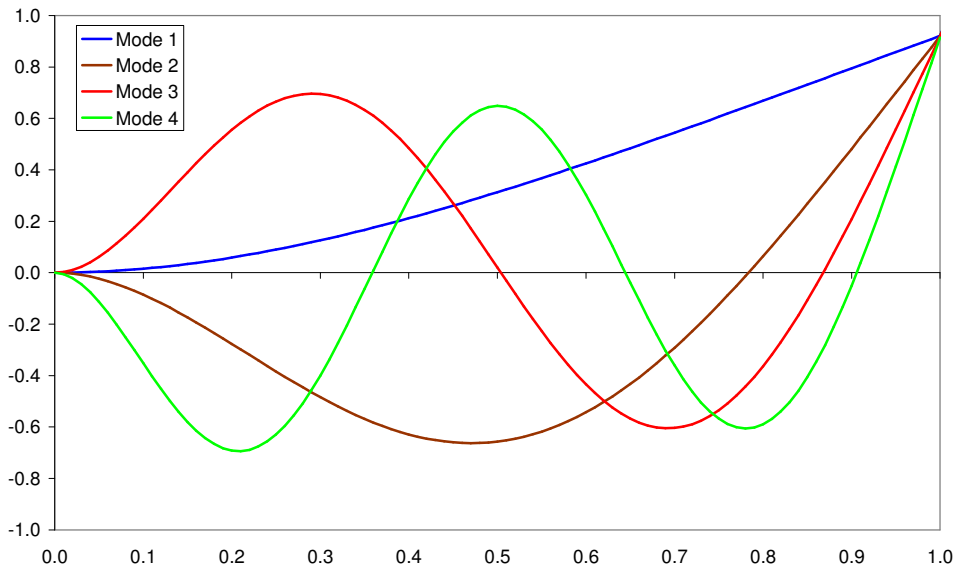
- Για τη γωνία κάμψης:

$$w'(x, t) = \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) w_L \right] = \left(\frac{\pi}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) w_L \xrightarrow{x=0} w'(0, t) = \left(\frac{\pi}{2L}\right) \sin(0) w_L \Rightarrow w'(0, t) = 0 \quad (\Gamma.3)$$

Από τις Εξ.(Γ.2, Γ.3), προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$, για την περιγραφή της κατανομής του κατακορύφου βέλους κάμψης κατά μήκος μίας μονόπακτης ελαστικής δοκού, πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες στη θέση στήριξης της δοκού.

Τέλος, ένα πολύ ενδιαφέρον τεχνολογικό συμπέρασμα προκύπτει από την παρατήρηση των πρώτων ιδιομορφών μίας μονόπακτης ελαστικής δοκού. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2, για κάθε ιδιομορφή υπάρχουν θέσεις, στις οποίες η δοκός δεν διεγείρεται (μηδενικό πλάτος ταλάντωσης). Σε αυτές ακριβώς τις θέσεις είναι δυνατή η τοποθέτηση επιπροσθέτων μαζών, χωρίς να επιβαρύνεται η δοκός. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η τοποθέτηση κινητήρων στην πτέρυγα ενός αεροσκάφους. Όπως προκύπτει από την πρώτη ιδιομορφή, η

καλύτερη θέση τοποθέτησης ενός κινητήρα είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα (εφαπτομενικά) στην άτρακτο.



Σχήμα Γ.2: Πρώτες τέσσερις ιδιομορφές μονόπακτης ελαστικής δοκού (οι ιδιομορφές υπολογίστηκαν με το εμπορικό λογισμικό ANSYS)

Εάν, πάλι, είναι επιθυμητή η τοποθέτηση δύο κινητήρων στην ίδια πτέρυγα, τότε, όπως προκύπτει από το Σχήμα Γ.2, οι καλύτερες θέσεις είναι οι θέσεις μηδενισμού της τρίτης ιδιομορφής (δηλαδή, η ιδιομορφή που μηδενίζεται σε δύο θέσεις και αντιστοιχεί στη χαμηλότερη ιδιοσυχνότητα). Διευκρινίζεται ότι στα δύο προαναφερθέντα παραδείγματα, το αποκλειστικό κριτήριο επιλογής των καλύτερων θέσεων ήταν η δυναμική συμπεριφορά της πτέρυγας λόγω γεωμετρίας και υλικού κατασκευής της.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας του δυναμικού συστήματος του Σχήματος 6

Σύμφωνα με την Εξ.(50), η κινητική ενέργεια T_L μίας δοκού σε κάμψη υπό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο ισούται με:

$$T_L = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2 dx \quad (\Delta.1)$$

Σύμφωνα με την Εξ.(65), ισχύει:

$$\dot{w} = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) \dot{w}_L \quad (\Delta.2)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Δ.1, Δ.2) δίδει:

$$\begin{aligned} T_L &= \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{w}^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \left(\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) \dot{w}_L \right)^2 dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2}\right) \rho A \int_{x=0}^{x=L} \left(\left(1 - 2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) \dot{w}_L^2 \right) dx \Rightarrow \\ T_L &= \left(\frac{1}{2}\right) \rho A \dot{w}_L^2 \int_{x=0}^{x=L} \left(1 - 2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right) dx \Rightarrow \\ T_L &= \left(\frac{1}{2}\right) \rho A \dot{w}_L^2 \left\{ \int_{x=0}^{x=L} dx - 2 \int_{x=0}^{x=L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx + \int_{x=0}^{x=L} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx \right\} \quad (\Delta.3) \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ενέργειας T_L , απαιτείται ο υπολογισμός των τριών ολοκληρωμάτων στο δεξί μέλος της Εξ.(Δ.3). Συνεπώς, ισχύει:

- Για το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_{x=0}^{x=L} dx$

$$I_1 = \int_{x=0}^{x=L} dx = [x]_{x=0}^{x=L} = (L - 0) \Rightarrow I_1 = L \quad (\Delta.4)$$

- Για το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_{x=0}^{x=L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx$

Αλλαγή μεταβλητής:

$$\theta = \left(\frac{\pi x}{2L}\right) \Rightarrow d\theta = \left(\frac{\pi}{2L}\right) dx \Rightarrow dx = d\theta \left(\frac{2L}{\pi}\right) \quad (\Delta.5)$$

Αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x=0}^{x=L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \left(\frac{2L}{\pi}\right) \cos(\theta) d\theta = \left(\frac{2L}{\pi}\right) \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} \cos(\theta) d\theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_2 = \left(\frac{2L}{\pi}\right) [\sin(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} = \left(\frac{2L}{\pi}\right) (1 - 0) \Rightarrow I_2 = \left(\frac{2L}{\pi}\right) \quad (\Delta.6) \end{aligned}$$

- Για το ολοκλήρωμα $I_3 = \int_{x=0}^{x=L} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right)^2 dx$

Εφαρμόζοντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής με αυτήν του ολοκληρώματος I_2 , μετά από αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων, προκύπτει:

$$I_3 = \int_{x=0}^{x=L} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right)^2 dx = \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} (\cos^2 \theta) \left(\frac{2L}{\pi} \right) d\theta = \left(\frac{2L}{\pi} \right) \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} (\cos^2 \theta) d\theta \quad (\Delta.7)$$

Από πίνακες ολοκληρωμάτων, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} (\cos^2 \theta) d\theta &= \left[\left(\frac{1}{2} \right) (\theta + \cos \theta \sin \theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=(\pi/2)} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\left(\left(\frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(0 + \cos(0) \sin(0) \right) \right] = \left(\frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (\Delta.8)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Δ.7, Δ.8) δίδει:

$$I_3 = \left(\frac{2L}{\cancel{\pi}} \right) \left(\frac{\cancel{\pi}}{4} \right) \Rightarrow I_3 = \left(\frac{L}{2} \right) \quad (\Delta.9)$$

Εισάγοντας τις Εξ.(Δ.4, Δ.6, Δ.9) στην Εξ.(Δ.3), τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned} T_L &= \left(\frac{1}{2} \right) \rho A \dot{\omega}_L^2 \left\{ L - 2 \left(\frac{2L}{\pi} \right) + \left(\frac{L}{2} \right) \right\} = \left(\frac{1}{2} \right) \rho A \dot{\omega}_L^2 \left(\left(\frac{3L}{2} \right) - \left(\frac{4L}{\pi} \right) \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \rho A \dot{\omega}_L^2 \left(\left(\frac{3}{2} \right) - \left(\frac{4}{\pi} \right) \right) L \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2} \right) \rho A \dot{\omega}_L^2 \left(\frac{3\pi - 8}{2\pi} \right) L \Rightarrow T_L = \left(\frac{1}{2} \right) \rho A \dot{\omega}_L^2 (0.22676) L \end{aligned} \quad (\Delta.10)$$

Σύμφωνα με την Εξ.(57), η κινητική ενέργεια του εξεταζομένου συστήματος ισούται με:

$$T = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right) \int_{x=0}^{x=L} \rho A \dot{\omega}^2 dx}_{T_L} + \left(\frac{1}{2} \right) M \dot{\omega}_L^2 \quad (\Delta.11)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Δ.10, Δ.11), δίδει:

$$T = \left(\frac{1}{2} \right) \rho A \dot{\omega}_L^2 (0.22676) L + \left(\frac{1}{2} \right) M \dot{\omega}_L^2 \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2} \right) (0.22676 \rho A L + M) \dot{\omega}_L^2 \quad (\Delta.12)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε: Υπολογισμός της δυναμικής ενέργειας του δυναμικού συστήματος του Σχήματος 6

Σύμφωνα με την Εξ.(58), η δυναμική ενέργεια U_L μίας δοκού σε κάμψη υπό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο ισούται με:

$$U_L = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} E I_{yy} (w'')^2 dx \quad (\text{E.1})$$

Σύμφωνα με την Εξ.(67), ισχύει:

$$w'' = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) w_L \quad (\text{E.2})$$

Εισάγοντας την Εξ.(E.2) στην Εξ.(E.1), προκύπτει:

$$\begin{aligned} U_L &= \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} E I_{yy} (w'')^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} E I_{yy} \left(\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) w_L \right)^2 dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_L = \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \int_{x=0}^{x=L} \left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_L = \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_{x=0}^{x=L} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Για τον υπολογισμό της ενέργειας U_L , απαιτείται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της Εξ.(E.3). Ωστόσο, παρατηρούμε ότι το εν λόγω ολοκλήρωμα είναι ίδιο με το ολοκλήρωμα I_3 του Παραρτήματος 'Δ'. Συνεπώς, εισάγοντας την Εξ.(Δ.9) στην Εξ.(E.3), προκύπτει:

$$\begin{aligned} U_L &= \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{2^4 L^4}\right) \left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{2^5 L^3}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_L = \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Σύμφωνα με την Εξ.(61), η δυναμική ενέργεια του εξεταζομένου συστήματος ισούται με:

$$U = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} E I_{yy} (w'')^2 dx}_{U_L} + \left(\frac{1}{2}\right) k w_L^2 \quad (\text{E.5})$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(E.4, E.5), δίδει:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) E I_{yy} w_L^2 \left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) k w_L^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(E I_{yy} \left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) + k \right) w_L^2 \quad (\text{E.6})$$