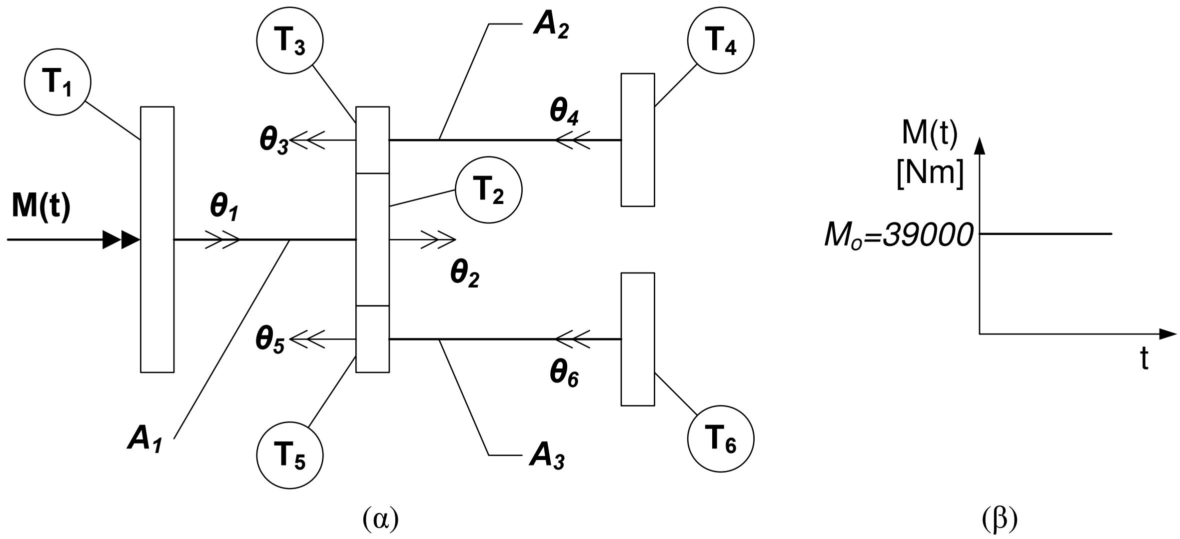
ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα19η
Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων – Εφαρμογή

Εφαρμογή (*Θέμα εξετάσεων 09/2006 – 50 Μονάδες*)
Δίδεται το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1α.



Σχήμα 1: (α) Δυναμικό σύστημα οδοντωτών τροχών και (β) Ασκούμενη εξωτερική ροπή

Αναλυτικότερα, η εξωτερική στρεπτική ροπή $M(t)$ πλάτους $M_o = 39000 Nm$ (βλ. Σχήμα 1β) ασκείται στον οδοντωτό τροχό T_1. Η κίνηση του τροχού T_1 μεταδίδεται στον οδοντωτό τροχό T_2 μέσω του ***εύκαμπτου*** άξονα A_1, για τον οποίο (άξονα) δίδεται ότι έχει μέτρο διάτμησης $G = 0.75\times10^{11} N/m^2$, πολική ροπή αδρανείας $J_\theta = 2.0\times10^{-5} m^4$ και μήκος $L = 0.50m$. Η κίνηση του τροχού T_2 μεταδίδεται στους οδοντωτούς τροχούς T_3 και T_5. Η κίνηση του τροχού T_3 μεταδίδεται στον οδοντωτό τροχό T_4 μέσω του ***άκαμπτου*** άξονα A_2, ενώ η κίνηση του τροχού T_5 μεταδίδεται στον οδοντωτό τροχό T_6 μέσω του ***άκαμπτου*** άξονα A_3. ***Οι αδράνειες των αξόνων*** A_1***,*** A_2 ***και*** A_3 ***αμελούνται***. Επίσης, δίδονται τα εξής στοιχεία:

Τροχός	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Ακτίνα $[m]$	0.400	0.200	0.100	0.200	0.100	0.200
Αδράνεια $[kgm^2]$	30.00	1.00	0.25	0.75	0.25	0.75

Ζητούνται:
Α) Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος
Β) Οι ιδιοσυχνότητες και τα ιδιοανύσματα του συστήματος
Γ) Η χρονική απόκριση του συστήματος για ***μηδενικές αρχικές συνθήκες***

Λύση

Για το ερώτημα (Α):

Για την διατύπωση των εξισώσεων κίνησης του συστήματος θα χρησιμοποιηθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange. Συνολικά για το εξεταζόμενο σύστημα, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των επί μέρους στοιχείων του συστήματος. Επειδή δίδεται ότι οι αδράνειες των αξόνων αμελούνται, τελικά στην κινητική ενέργεια του συστήματος συνεισφέρουν μόνον οι οδοντωτοί τροχοί, άρα ισχύει:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\theta}_5^2 + \frac{1}{2} I_6 \dot{\theta}_6^2 \tag{1}$$

όπου I είναι η μαζική ροπή αδρανείας τροχού και θ είναι η γωνία περιστροφής τροχού.

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος ισούται με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των επί μέρους στοιχείων του συστήματος. Ωστόσο, στο συγκεκριμένο σύστημα μόνον ο άξονας A_1 είναι εύκαμπτος, άρα μόνον σε αυτό το στοιχείο αποθηκεύεται δυναμική ενέργεια:

$$U = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{x=0}^{x=L} G J_\theta \left(\theta'\right)^2 dx \tag{2}$$

όπου J_θ είναι η πολική ροπή αδρανείας (βλ. Παράρτημα Α) του άξονα A_1, G το μέτρο διάτμησής του, L είναι το μήκος του και θ είναι η συνάρτηση, η οποία περιγράφει τη μεταβολή της γωνίας περιστροφής του άξονα A_1 κατά το μήκος του. Δεχόμαστε ότι η συγκεκριμένη μεταβολή ακολουθεί γραμμικό νόμο (γραμμική μεταβολή), οπότε θα ισχύει (βλ. Παράρτημα Β):

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\theta_1 + \left(\frac{x}{L}\right)\theta_2 \tag{3}$$

Η πρώτη χωρική παράγωγος της Εξ.(3) είναι:

$$\theta' = \frac{d}{dx}\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right)\theta_1 + \left(\frac{x}{L}\right)\theta_2\right) = \left(-\frac{1}{L}\right)\theta_1 + \left(\frac{1}{L}\right)\theta_2 \Rightarrow \theta' = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{L}\right) \tag{4}$$

- Η ενέργεια P_C του συστήματος, η οποία διαχέεται, είναι μηδενική, διότι στο σύστημα δεν υπάρχουν στοιχεία διάχυσης ενέργειας (δεν υπάρχουν αποσβεστήρες), άρα ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{5}$$

- Η, προσφερόμενη στο σύστημα, ισχύς P_t οφείλεται στην επιβολή της εξωτερικής ροπής $M(t)$ και ισχύει:

$$P_t = M(t)\dot{\theta}_1 = M_o \dot{\theta}_1 \Rightarrow P_t = M_o \dot{\theta}_1 \tag{6}$$

Για την εύρεση των Βαθμών Ελευθερίας (ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές) του συστήματος, καταγράφουμε όλες τις κινηματικές μεταβλητές, οι οποίες εμφανίζονται στους ανωτέρω ενεργειακούς όρους, καθώς και όλες τις μεταξύ τους συσχετίσεις. Παρατηρούμε ότι στους ανωτέρω ενεργειακούς όρους εμπλέκονται οι εξής κινηματικές μεταβλητές:

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5,\ \theta_6 \tag{7}$$

Από τη μετάδοση κίνησης μεταξύ των οδοντωτών τροχών, ισχύει:

- Σχέση μετάδοσης μεταξύ των τροχών T_2 και T_3:

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\theta_2}{\theta_3} = \frac{r_3}{r_2} \Rightarrow \theta_3 = \theta_2\left(\frac{r_2}{r_3}\right) \Rightarrow \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2\left(\frac{r_2}{r_3}\right) \tag{8}$$

- Η μετάδοση κίνησης μεταξύ των τροχών T_3 και T_4 επιτυγχάνεται μέσω του **άκαμπτου** άξονα A_2, άρα ισχύει:

$$\theta_3 = \theta_4 \Rightarrow \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4 \tag{9}$$

- Σχέση μετάδοσης μεταξύ των τροχών T_2 και T_5:

$$i_{25} = \frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{\theta_2}{\theta_5} = \frac{r_5}{r_2} \Rightarrow \theta_5 = \theta_2\left(\frac{r_2}{r_5}\right) \Rightarrow \dot{\theta}_5 = \dot{\theta}_2\left(\frac{r_2}{r_5}\right) \tag{10}$$

- Η μετάδοση κίνησης μεταξύ των τροχών T_5 και T_6 επιτυγχάνεται μέσω του **άκαμπτου** άξονα A_3, άρα ισχύει:

$$\theta_5 = \theta_6 \Rightarrow \dot{\theta}_5 = \dot{\theta}_6 \tag{11}$$

Από τις Εξ.(7,8,9,10,11) προκύπτει ότι εμφανίζονται έξι (6) κινηματικές μεταβλητές, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω τεσσάρων (4) εξισώσεων, άρα οι Βαθμοί Ελευθερίας (Β.Ε.) του συστήματος είναι:

$$\left(B.E.\right) = 6 - 4 = 2 \tag{12}$$

Ως Βαθμούς Ελευθερίας, επιλέγουμε:

- την γωνία περιστροφής θ_1, διότι αυτή η μεταβλητή δεν εμφανίζεται σε καμία από τις Εξ.(8,9,10,11) (εξισώσεις μέσω των οποίων συνδέονται μεταξύ τους οι κινηματικές μεταβλητές του συστήματος)
- την γωνία περιστροφής θ_2, διότι η επιλογή αυτή βολεύει στην εκτέλεση πράξεων (αντί της γωνίας θ_2, είναι δυνατόν να επιλεχθεί οποιαδήποτε άλλη από τις γωνίες $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$).

Βάσει των ανωτέρω επιλογών και αντικαθιστώντας στις Εξ.(1,2), προκύπτει:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\dot{\theta}_1^2 + I_2\dot{\theta}_2^2 + I_3\dot{\theta}_3^2 + I_4\dot{\theta}_4^2 + I_5\dot{\theta}_5^2 + I_6\dot{\theta}_6^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\left(I_1\dot{\theta}_1^2+I_2\dot{\theta}_2^2+I_3\left(\dot{\theta}_2\left(\frac{r_2}{r_3}\right)\right)^2+I_4\left(\dot{\theta}_2\left(\frac{r_2}{r_3}\right)\right)^2+I_5\left(\dot{\theta}_5\left(\frac{r_2}{r_5}\right)\right)^2+I_6\left(\dot{\theta}_5\left(\frac{r_2}{r_5}\right)\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\left(I_1\dot{\theta}_1^2+I_2\dot{\theta}_2^2+I_3\dot{\theta}_2^2\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2+I_4\dot{\theta}_2^2\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2+I_5\dot{\theta}_2^2\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2+I_6\dot{\theta}_2^2\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\left(I_2+I_3\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2+I_4\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2+I_5\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2+I_6\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2\right)\dot{\theta}_2^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\underbrace{\left(I_2+\left(I_3+I_4\right)\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2+\left(I_5+I_6\right)\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2\right)}_{\overline{I_2}}\dot{\theta}_2^2 \qquad (13)$$

Ορίζουμε την ισοδύναμη ροπή αδρανείας $\overline{I_2}$ ίση με:

$$\overline{I_2}=I_2+\left(I_3+I_4\right)\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2+\left(I_5+I_6\right)\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2 \qquad (14)$$

Από τον συνδυασμό των Εξ.(13,14), η κινητική ενέργεια T του συστήματος ισούται με:

$$T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\overline{I_2}\dot{\theta}_2^2 \qquad (15)$$

Σχετικά με τη δυναμική ενέργεια U του συστήματος, θεωρώντας σταθερό μέτρο διάτμησης G και σταθερή πολική ροπή αδρανείας J_p κατά μήκος του άξονα, ο συνδυασμός των Εξ.(2,4) δίδει:

$$U=\left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L}GJ_\theta\left(\theta'\right)^2dx=\left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L}GJ_\theta\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{L}\right)^2dx=\left(\frac{1}{2}\right)GJ_\theta\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{L}\right)^2\int_{x=0}^{x=L}dx=\left(\frac{1}{2}\right)GJ_\theta\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{L}\right)^2L\Rightarrow$$

$$U=\left(\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{GJ_\theta}{L}\right)}_{k_\theta}\left(\theta_2-\theta_1\right)^2 \qquad (16)$$

Ορίζουμε την ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου k_θ ίση με:

$$k_\theta=\left(\frac{GJ_\theta}{L}\right) \qquad (17)$$

Εισάγοντας την Εξ.(16) στην Εξ.(17), προκύπτει:

$$U=\left(\frac{1}{2}\right)k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)^2 \qquad (18)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, από τις Εξ.(5,6,15,18), ισχύει:

- Κινητική ενέργεια T συστήματος: $T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \overline{I_2} \dot{\theta}_2^2$
- Δυναμική ενέργεια U συστήματος: $U = \left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$
- Διάχυση ισχύος συστήματος: $P_C = 0$
- Προσφερόμενη ισχύς στο σύστημα: $P_t = M_o \dot{\theta}_1$

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \tag{19}$$

όπου ως q συμβολίζεται η ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας). Άρα:

- Για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q = \theta_1$, ισχύει:

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{\theta}_1]{q=\theta_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1}\left\{\left(\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\overline{I_2}\dot{\theta}_2^2\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \left(\theta_2 - \theta_1\right)^2\right)\right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \dot{\theta}_1 \tag{20}$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(20) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(I_1 \dot{\theta}_1\right) = I_1 \ddot{\theta}_1 \tag{21}$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q} \xrightarrow{q=\theta_1} -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial (T-U)}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left\{\left(\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\overline{I_2}\dot{\theta}_2^2\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right) k_\theta \left(\theta_2 - \theta_1\right)^2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\left(-k_\theta \left(\theta_2 - \theta_1\right)(-1)\right) \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k_\theta \left(\theta_2 - \theta_1\right) \tag{22}$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[P_c=0]{q=\theta_1 \Rightarrow \dot{q}=\dot{\theta}_1} \frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \tag{23}$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{\theta}_1]{q=\theta_1} \frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1}\left(M_o \dot{\theta}_1\right) \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_1} = M_o \tag{24}$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange για τον Βαθμό Ελευθερίας $q = \theta_1$, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} \xrightarrow[\dot{q}=\dot{\theta}_1]{q=\theta_1} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_1} \tag{25}$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(24), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_1}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_1}\Rightarrow I_1\ddot{\theta}_1-k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)+0=M_o\Rightarrow I_1\ddot{\theta}_1-k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)=M_o \quad (26)$$

- Κατ' αντιστοιχία, για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή $q=\theta_2$, ισχύει:

Για τον αδρανειακό όρο:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=\dot{\theta}_2]{q=\theta_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2}\left\{\left(\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\overline{I_2}\dot{\theta}_2^2\right)-\left(\left(\frac{1}{2}\right)k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)^2\right)\right\}\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=\overline{I_2}\dot{\theta}_2 \quad (27)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(27) ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\overline{I_2}\dot{\theta}_2\right)=\overline{I_2}\ddot{\theta}_2 \quad (28)$$

Για τον όρο ελαστικότητας:

$$-\frac{\partial L}{\partial q}\xrightarrow{q=\theta_2}-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=-\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \theta_2}=-\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left\{\left(\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\overline{I_2}\dot{\theta}_2^2\right)-\left(\left(\frac{1}{2}\right)k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)^2\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=-\left(-k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(+1\right)\right)\Rightarrow-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=+k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right) \quad (29)$$

Για τον όρο διάχυσης:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[P_c=0]{q=\theta_2\Rightarrow\dot{q}=\dot{\theta}_2}\frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_2}=0 \quad (30)$$

Για τον όρο διέγερσης:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=\dot{\theta}_{21}]{q=\theta_2}\frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2}\left(M_o\theta_2\right)\Rightarrow\frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_2}=0 \quad (31)$$

Εφαρμόζοντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange για τον Βαθμό Ελευθερίας $q=\theta_2$, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\xrightarrow[\dot{q}=\dot{\theta}_2]{q=\theta_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_2} \quad (32)$$

Με αντικατάσταση στην Εξ.(32), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}_2}\Rightarrow\overline{I_2}\ddot{\theta}_2+k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)+0=0\Rightarrow\overline{I_2}\ddot{\theta}_2+k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)=0 \quad (33)$$

Συνοψίζοντας, η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange καταλήγει στις εξισώσεις:

$$I_1\ddot{\theta}_1-k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)=M_o \quad (34)$$

$$\overline{I_2}\ddot{\theta}_2+k_\theta\left(\theta_2-\theta_1\right)=0 \quad (35)$$

Οι Εξ.(34,35), σε μητρωϊκή γραφή, λαμβάνουν τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \overline{I_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_o \\ 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Η Εξ.(36) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του συστήματος.
Από την εκφώνηση, δίδεται:

$$I_1 = 30.00kgm^2 \tag{37}$$

Επίσης, από την εκφώνηση, δίδεται:

$$M_o = 39000Nm \tag{38}$$

Αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(14) δίδει:

$$\overline{I_2} = I_2 + \left(I_3 + I_4\right)\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + \left(I_5 + I_6\right)\left(\frac{r_2}{r_5}\right)^2 = 1.00 + \left(0.25 + 0.75\right)\left(\frac{0.200}{0.100}\right)^2 + \left(0.25 + 0.75\right)\left(\frac{0.200}{0.100}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{I_2} = 1.00 + 1.00\times\left(2.00\right)^2 + 1.00\times\left(2.00\right)^2 = 1.00 + 2.00\times 4.00 \Rightarrow \overline{I_2} = 9.00kgm^2 \tag{39}$$

Αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(17) δίδει:

$$k_\theta = \left(\frac{GJ_\theta}{L}\right) = \left(\frac{\left(0.75\times10^{11}\right)\times\left(2.0\times10^{-5}\right)}{0.50}\right) = \left(\frac{1.50\times10^6}{0.50}\right) \Rightarrow k_\theta = 3\times10^6\,Nm \tag{40}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(36,37,38,39,40) δίδει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 30.00 & 0 \\ 0 & 9.00 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} +3.00\times10^6 & -3.00\times10^6 \\ -3.00\times10^6 & +3.00\times10^6 \end{bmatrix}}_{\underline{K}}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 39000.00 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{f}} \tag{41}$$

Στην Εξ.(41) αναγνωρίζουμε τα μητρώα $\underline{M}$, $\underline{K}$ καθώς και το διάνυσμα $\underset{\sim}{f}$.

Για το ερώτημα (Β):

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών, επιλύουμε την εξίσωση:

$$\det\left(-\omega^2\underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \xrightarrow{\lambda=\omega^2} \det\left(-\lambda\underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{42}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(42) τα μητρώα $\underline{M}$ και $\underline{K}$ από την Εξ.(41), προκύπτει:

$$\det\left(-\lambda\begin{bmatrix} 30.00 & 0 \\ 0 & 9.00 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} +3.00\times10^6 & -3.00\times10^6 \\ -3.00\times10^6 & +3.00\times10^6 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda\times30.00 + 3.00\times10^6 & -3.00\times10^6 \\ -3.00\times10^6 & -\lambda\times9.00 + 3.00\times10^6 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} \dfrac{-\lambda\times 30.00+3.00\times 10^6}{3.00\times 10^6} & -1 \\ -1 & \dfrac{-\lambda\times 9.00+3.00\times 10^6}{3.00\times 10^6} \end{bmatrix}\times 3.00\times 10^6\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda}{10^6}\times\dfrac{30.00}{3.00}+1 & -1 \\ -1 & -\dfrac{\lambda}{10^6}\times\dfrac{9.00}{3.00}+1 \end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda}{10^6}\times 10.00+1 & -1 \\ -1 & -\dfrac{\lambda}{10^6}\times 3.00+1 \end{bmatrix}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda}{10^6}\times\dfrac{30.00}{3.00}+1 & -1 \\ -1 & -\dfrac{\lambda}{10^6}\times\dfrac{9.00}{3.00}+1 \end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} -\underbrace{\left(\dfrac{\lambda}{10^6}\right)}_{\mu}\times 10.00+1 & -1 \\ -1 & -\underbrace{\left(\dfrac{\lambda}{10^6}\right)}_{\mu}\times 3.00+1 \end{bmatrix}\right)=0 \tag{43}$$

Ορίζουμε τη βοηθητική μεταβλητή:

$$\mu=\left(\frac{\lambda}{10^6}\right) \tag{44}$$

Εισάγοντας την Εξ.(44) στην Εξ.(43), προκύπτει:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -10\mu+1 & -1 \\ -1 & -3\mu+1 \end{bmatrix}\right)=0\Rightarrow(-10\mu+1)(-3\mu+1)-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(-3\mu(-10\mu+1)+1(-10\mu+1)\right)-1=0\Rightarrow\left(30\mu^2-3\mu-10\mu+1\right)-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30\mu^2-13\mu=0\Rightarrow\mu(30\mu-13)=0\Rightarrow\begin{Bmatrix}\mu_1=0\\ 30\mu_2-13=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\mu_1=0\\ \mu_2=\left(\dfrac{13}{30}\right)\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\mu_1=0\\ \mu_2=0.433\end{Bmatrix}\xrightarrow{\mu=\left(\frac{\lambda}{10^6}\right)}\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{\lambda_1}{10^6}\right)=0\\ \left(\dfrac{\lambda_2}{10^6}\right)=0.433\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0.433\times 10^6\end{Bmatrix} \tag{45}$$

Ωστόσο, ισχύει (βλ. Εξ.(42)):

$$\xrightarrow[\lambda=\omega^2]{\text{Εξ.}(45)}\begin{Bmatrix}\omega_1^2=0\\ \omega_2^2=0.433\times 10^6\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\omega_1=0\\ \omega_2=\sqrt{0.433\times 10^6}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\omega_1=0\,rad/s\\ \omega_2=658.28\,rad/s\end{Bmatrix} \tag{46}$$

Στην Εξ.(46) διατηρήθηκαν οι θετικές ρίζες των ποσοτήτων ω_1^2 και ω_2^2 διότι τα μητρώα $\underline{M}$ και $\underline{K}$ είναι θετικά ορισμένα και τέτοια μητρώα έχουν μη-αρνητικές ιδιοτιμές (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08/σελ.8.6). Επομένως, οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι:

$$\omega_1=0\,rad/s\quad\text{και}\quad\omega_2=658.28\,rad/s \tag{47}$$

Τα ιδιοανύσματα του συστήματος υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$\left(-\omega_i^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0}, \quad i = 1,2 \tag{48}$$

Συνεπώς:

- για το πρώτο ιδιοάνυσμα ισχύει:

$$\left(-\omega_1^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{0} \xrightarrow{\omega_1=0} \underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k_\theta\Phi_{11} - k_\theta\Phi_{12} = 0 \\ -k_\theta\Phi_{11} + k_\theta\Phi_{12} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} k_\theta\Phi_{11} - k_\theta\Phi_{12} = 0 \\ k_\theta\Phi_{11} - k_\theta\Phi_{12} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow k_\theta\Phi_{11} - k_\theta\Phi_{12} = 0 \Rightarrow k_\theta\Phi_{11} = k_\theta\Phi_{12} \Rightarrow \Phi_{11} = \Phi_{12} \tag{49}$$

Συνεπώς, το πρώτο ιδιοάνυσμα είναι:

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{11} \end{bmatrix} = \Phi_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{11}=1} \underset{\sim}{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

Ως Βαθμοί Ελευθερίας είχαν επιλεχθεί οι κινηματικές μεταβλητές θ_1 και θ_2 (βλ. σελ.18.5). Συνεπώς, οι συνιστώσες του ιδιοανύσματος $\underset{\sim}{\Phi}_1$ είναι οι μεταβλητές θ_1 και θ_2, οι οποίες, σύμφωνα με την Εξ.(50), εμφανίζουν αναλογία $1:1$ (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08, σελ.8.7). Η φυσική ερμηνεία αυτού, είναι ότι οι τροχοί T_1 και T_2 περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, ως εάν ο άξονας A_1 είναι άκαμπτος.

- για το δεύτερο ιδιοάνυσμα ισχύει:

$$\left(-\omega_2^2 \underline{M} + \underline{K}\right)\underset{\sim}{\Phi}_2 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \left(-\omega^2\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \overline{I_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega_2^2 I_1 + k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & -\omega_2^2 \overline{I_2} + k_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(51), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} -0.433\times10^6\times30.00+3.00\times10^6 & -3.00\times10^6 \\ -3.00\times10^6 & -0.433\times10^6\times9.00+3.00\times10^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^6\times\begin{bmatrix} -0.433\times30.00+3.00 & -3.00 \\ -3.00 & -0.433\times9.00+3.00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -9.99 & -3.00 \\ -3.00 & -0.897 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -9.99\Phi_{21} - 3.00\Phi_{22} = 0 \\ -3.00\Phi_{21} - 0.897\Phi_{22} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -3.33\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \\ -3.34\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -3.33\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \\ -3.34\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow -3.33\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \Rightarrow 3.33\Phi_{21} = -\Phi_{22} \Rightarrow \Phi_{21} = -0.30\Phi_{22} \tag{52}$$

Συνεπώς, το δεύτερο ιδιοάνυσμα είναι:

$$\underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.30\Phi_{22} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \Phi_{22} \begin{bmatrix} -0.30 \\ 1.00 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Phi_{22}=1} \underset{\sim}{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} -0.30 \\ 1.00 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Κατ' αντιστοιχία με το πρώτο ιδιοάνυσμα, οι συνιστώσες του ιδιοανύσματος $\underset{\sim}{\Phi}_1$ είναι οι μεταβλητές θ_1 και θ_2, οι οποίες, σύμφωνα με την Εξ.(53), εμφανίζουν αναλογία $(-0.30:1)$ (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08, σελ.8.7). Η φυσική ερμηνεία αυτού, είναι ότι οι τροχοί T_1 και T_2 δεν περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, με αποτέλεσμα ο άξονας A_1 να υφίσταται στρέψη.

Για το ερώτημα (Γ):

Η απόκριση του συστήματος προκύπτει από την επίλυση της Εξ.(36), η οποία επαναλαμβάνεται για την πληρότητα του κειμένου:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \overline{I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_o \\ 0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Για την επίλυση της Εξ.(54) θα χρησιμοποιηθεί ο Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός, ο οποίος για το εξεταζόμενο διβάθμιο δυναμικό σύστημα γράφεται ως εξής (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 08/Εξ.(60)):

$$\underset{\sim}{\theta}(t) = \sum_{i=1}^{i=2} \underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} q_1(t) + \begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} q_2(t) \tag{55}$$

Στην Εξ.(55) είναι γνωστές οι συνιστώσες των ιδιοανυσμάτων (βλ. Εξ.(50,53)). Συνεπώς, αρκεί να υπολογισθούν οι γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας $q_i(t)$. Σύμφωνα με την Εκπαιδευτική Ενότητα 08/σελ.8.15, κάθε ένας γενικευμένος Βαθμός Ελευθερίας $q_i(t)$ προκύπτει από την επίλυση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}}{m_{ii}} \tag{56}$$

όπου ω_i είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος, η οποία αντιστοιχεί στον $i-$Βαθμό Ελευθερίας, $\underset{\sim}{F}$ είναι το διάνυσμα της εξωτερικής διέγερσης και m_{ii} είναι η γενικευμένη μάζα, η οποία ισούται με:

$$m_{ii} = \underset{\sim}{\Phi}_i^T \underline{M} \underset{\sim}{\Phi}_i \tag{57}$$

Επομένως, για κάθε έναν από τους Βαθμούς Ελευθερίας θ_1 και θ_2 του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος, θα πρέπει να υλοποιηθούν τα ακόλουθα βήματα:

- να υπολογισθεί η γενικευμένη μάζα,
- στη συνέχεια να επιλυθεί η Εξ.(56) και
- το αποτέλεσμα της επίλυσης για κάθε (Β.Ε.) να εισαχθεί στην Εξ.(55).

Με βάση τα ανωτέρω, για τον Βαθμό Ελευθερίας θ_1 ισχύει:

- Υπολογισμός γενικευμένης μάζας m_{11}

$$m_{11} = \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_1 \xrightarrow[\text{Εξ.(50)}]{\text{Εξ.(41)}} m_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.00 & 0 \\ 0 & 9.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.00 \\ 9.00 \end{bmatrix} \Rightarrow m_{11} = 39.00 \quad (58)$$

- Επίλυση της Εξ.(56)

  Σε αυτό το βήμα, απαιτείται ο υπολογισμός της ποσότητας $\left(\frac{\underset{\sim}{\Phi}_i^T \underset{\sim}{F}}{m_{ii}} \right)$, όπου $\underset{\sim}{F}$ είναι το διάνυσμα της εξωτερικής διέγερσης. Από το Σχήμα 1β, προκύπτει ότι η εξωτερικά ασκούμενη ροπή $M(t)$ (εξωτερική διέγερση) είναι βηματικής μορφής (έχει μηδενική τιμή μέχρι την αρχή μέτρησης του χρόνου, οπότε και λαμβάνει ακαριαία την τιμή M_o, η οποία παραμένει σταθερή στο χρόνο). Συνεπώς, η ροπή $M(t)$ είναι δυνατόν να γραφεί και ως εξής:

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} M_o H^*(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

  όπου ως $H^*(t)$ συμβολίζεται η συνάρτηση Heaviside (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 09/σελ.9.3). Αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(59) δίδει:

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 39000 H^*(t) \\ 0 \end{bmatrix} = 39000 \begin{bmatrix} H^*(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

  Συνεπώς, η Εξ.(56) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \left(\frac{1}{m_{11}} \right) \underset{\sim}{\Phi}_1^T \underset{\sim}{F} \xrightarrow{\text{Εξ.(46)}:\omega_1=0} \ddot{q}_1(t) = \left(\frac{1}{39.00} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} 39000 \begin{bmatrix} H^*(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{39000}{39.00} \right) H^*(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1(t) = 1000 H^*(t) \xrightarrow{t>0} \ddot{q}_1(t) = 1000 \quad (61)$$

  Η λύση της Εξ.(61) είναι:

$$\ddot{q}_1(t) = 1000 \Rightarrow \dot{q}_1(t) = 1000t + c_o \Rightarrow q_1(t) = 1000 \left(\frac{t^2}{2} \right) + c_o t + c_1 \quad (62)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες (δεδομένο εκφώνησης), η Εξ(62) γίνεται:

$$q_1(t) = 500t^2 \quad (63)$$

Κατ' αντιστοιχία, για τον Βαθμό Ελευθερίας θ_2 ισχύει:

- Υπολογισμός γενικευμένης μάζας m_{22}

$$m_{22} = \underset{\sim}{\Phi}_2^T \underline{M}\, \underset{\sim}{\Phi}_2 \xrightarrow[\text{Εξ.(53)}]{\text{Εξ.(41)}} m_{11} = \begin{bmatrix} -0.30 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.00 & 0 \\ 0 & 9.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.30 \\ 1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.30 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9.00 \\ 9.00 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{22} = 11.70 \tag{64}$$

- Επίλυση της Εξ.(56)

$$\ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \left(\frac{1}{m_{22}}\right)\underset{\sim}{\Phi}_2^T \underset{\sim}{F} \Rightarrow \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \left(\frac{1}{11.70}\right)\begin{bmatrix}-0.30 & 1.00\end{bmatrix}39000\begin{bmatrix}H^*(t)\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = -\left(\frac{39000}{11.70}\right)0.30H^*(t) \Rightarrow \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = -\left(\frac{11700}{11.70}\right)H^*(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = -1000H^*(t) \tag{65}$$

Η Εξ.(65) περιγράφει ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα. Για την επίλυσή της, θα χρησιμοποιηθεί ο Μετασχηματισμός Laplace. Λαμβάνοντας υπόψη μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπως ορίζει η εκφώνηση, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 12/παράδειγμα σελ. 12.12):

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-1000H^*(t)\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\ddot{q}_2(t)\right\} + \omega_2^2\mathcal{L}\left\{q_2(t)\right\} = -1000\mathcal{L}\left\{H^*(t)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2Q_2(s) + \omega_2^2 Q_2(s) = -1000\left(\frac{1}{s}\right) \Rightarrow \left(s^2 + \omega_2^2\right)Q_2(s) = -1000\left(\frac{1}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2(s) = -1000\left(\frac{1}{s\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right) \tag{66}$$

Σύμφωνα με την τεχνική των μερικών κλασμάτων, η Εξ,(66) γράφεται ως εξής (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 12/σελ.12.13):

$$Q_2(s) = -1000\left[\left(\frac{A_o}{s}\right) - \left(\frac{B_o s + B_1}{\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right)\right] = -1000\left(\frac{A_o\left(s^2 + \omega_2^2\right) - \left(B_o s + B_1\right)s}{s\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right) = -1000\left(\frac{A_o s^2 + A_o\omega_2^2 - B_o s^2 - B_1 s}{s\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(s) = -1000\left(\frac{\left(A_o - B_o\right)s^2 - B_1 s + A_o\omega_2^2}{s\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right) \tag{67}$$

Από τις Εξ.(66,67), προκύπτει:

$$Q(s) = -1000\left(\frac{1}{s\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right) = -1000\left(\frac{\left(A_o - B_o\right)s^2 - B_1 s + A_o\omega_2^2}{s\left(s^2 + \omega_2^2\right)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}\left(A_o - B_o\right) = 0\\ B_1 = 0\\ A_o\omega_2^2 = 1\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}B_o = A_o\\ B_1 = 0\\ A_o = \left(\dfrac{1}{\omega_2^2}\right)\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}B_o = \left(\dfrac{1}{\omega_2^2}\right)\\ B_1 = 0\\ A_o = \left(\dfrac{1}{\omega_2^2}\right)\end{Bmatrix} \tag{68}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(66,68) δίδει:

$$Q_2(s) = -1000\left[\left(\frac{A_o}{s}\right) - \left(\frac{B_o s + B_1}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right] = -1000\left[\left(\frac{\left(\frac{1}{\omega_2^2}\right)}{s}\right) - \left(\frac{\left(\frac{1}{\omega_2^2}\right)s}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2(s) = -\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left[\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{s}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right] \tag{69}$$

Εφαρμόζοντας τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(69), προκύπτει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Q_2(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left[\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{s}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right]\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{s}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{s}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right\} = -\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\right\} + \left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{\left(s^2+\omega_2^2\right)}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$q_2(t) = -\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)H^*(t) + \left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\cos(\omega_2 t) \Rightarrow q_2(t) = -\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left(H^*(t) - \cos(\omega_2 t)\right) \tag{70}$$

Αντικαθιστώντας τα ανωτέρω στην Εξ.(55), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Phi_{11}\\ \Phi_{12}\end{bmatrix} q_1(t) + \begin{bmatrix}\Phi_{21}\\ \Phi_{22}\end{bmatrix} q_2(t) \Rightarrow \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} 500t^2 + \begin{bmatrix}-0.30\\ 1\end{bmatrix}\left(-\left(\frac{1000}{\omega_2^2}\right)\left(H^*(t) - \cos(\omega_2 t)\right)\right) \Rightarrow$$

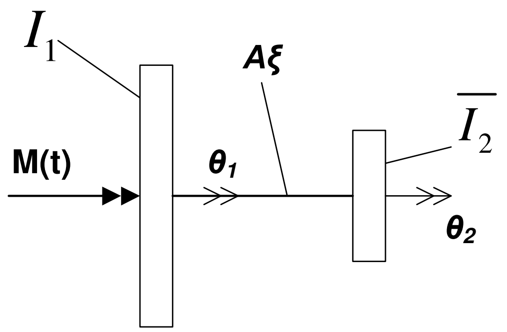
$$\xrightarrow{\omega_2 = 658.28 rad/s} \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} 500t^2 - \left(\frac{1000}{658.28^2}\right)\begin{bmatrix}-0.30\\ 1\end{bmatrix}\left(H^*(t) - \cos(658.28t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} 500t^2 - 2.308\times 10^{-3}\begin{bmatrix}-0.30\\ 1\end{bmatrix}\left(H^*(t) - \cos(658.28t)\right) \tag{71}$$

Η Εξ.(71) περιγράφει την απόκριση του συστήματος.

Παρατήρηση

Η Εξ.(71) περιγράφει την απόκριση ενός διβάθμιου δυναμικού συστήματος της μορφής που απεικονίζεται στο Σχήμα 2, το οποίο είναι ισοδύναμο αυτού του Σχήματος 1.



Σχήμα 2: Ισοδύναμο διβάθμιο σύστημα

Η πρώτη χρονική παράγωγος της Εξ.(71) είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1000t}_{\acute{o}\rho o\varsigma\ \#1} \underbrace{- 2.308\times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.30 \\ 1 \end{bmatrix} \sin\left(658.28t\right)}_{\acute{o}\rho o\varsigma\ \#2} \quad (72)$$

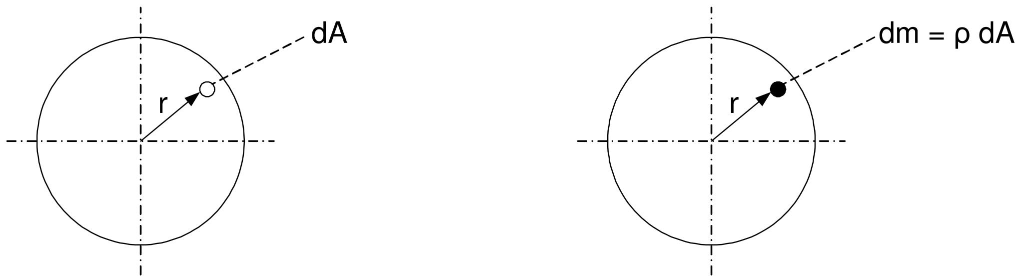
Στην Εξ.(72) αναγνωρίζουμε δύο όρους:

- Ο όρος #1 περιγράφει μία ***γραμμική αύξηση*** της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_1$ του στοιχείου με ροπή αδρανείας I_1 και της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_2$ του στοιχείου με ροπή αδρανείας $\overline{I_2}$ (βλ. Σχήμα 2). Η φυσική σημασία αυτού του όρου είναι ότι η ***βηματική*** επιβολή της εξωτερικής ροπής $M\left(t\right)$ (βλ. Σχήμα 1β) τείνει να αυξήσει, με ***γραμμικό και ίδιο*** τρόπο, την γωνιακή ταχύτητα των εν λόγω στοιχείων.
- Ο όρος #2 περιγράφει μία αρμονική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_1$ και $\dot{\theta}_2$ των προαναφερθέντων στοιχείων. Η φυσική σημασία αυτού του όρου είναι ότι η σχετική γωνιακή ταχύτητα των στοιχείων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω του εύκαμπτου άξονα $A\xi$, μεταβάλλεται χρονικά. Με άλλα λόγια, τα εν λόγω στοιχεία εμφανίζουν στροφική ταλάντωση.

Η ανωτέρω παρατήρηση είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στα πλοία, και συγκεκριμένα στη σχεδίαση του άξονα για τη μετάδοση κίνησης από τον κινητήρα στην προπέλα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Περί ροπής αδρανείας και μαζικής ροπής αδρανείας κυκλικής διατομής

Από τη θεωρία της Μηχανικής του Παραμορφωσίμου Σώματος, η πολική ροπή αδρανείας και η μαζική ροπή αδρανείας μίας κυκλικής διατομής ορίζονται όπως φαίνεται στο Σχήμα Α.1.



$$J_\theta = \int_A r^2 dA \qquad\qquad I_\theta = \int_A r^2 dm$$

(α) (β)

Σχήμα Α.1: Κυκλική διατομή: (α) πολική ροπή αδρανείας και (β) μαζική ροπή αδρανείας

Ειδικότερα, για τη μαζική ροπή αδρανείας ισχύει:

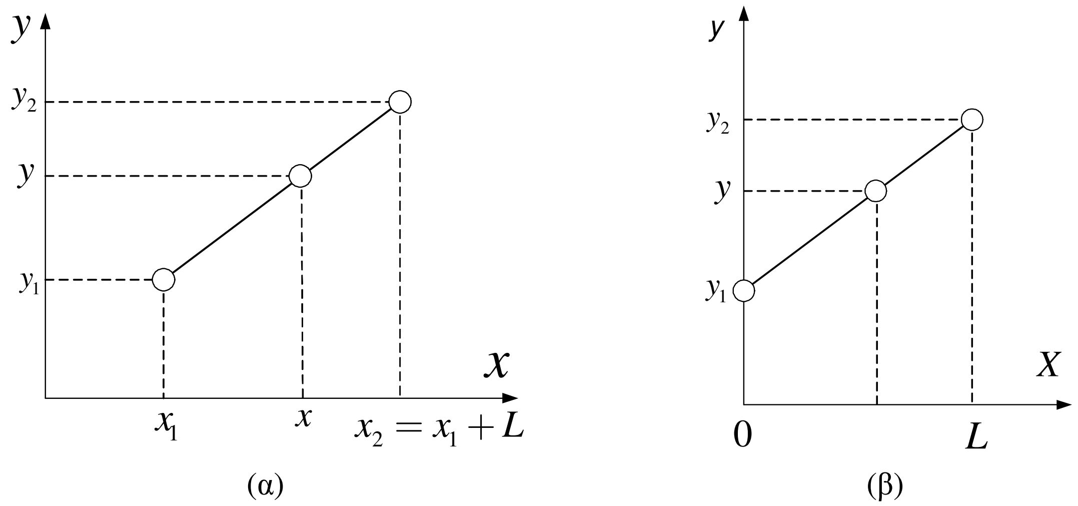
$$I_\theta = \int_A r^2 dm = \int_A r^2 \rho dA \xrightarrow{\rho = const} I_\theta = \rho \underbrace{\int_A r^2 dA}_{J_\theta} \Rightarrow I_\theta = \rho J_\theta \tag{A.1}$$

Υπενθυμίζεται ότι σε επίπεδα σχήματα, η πυκνότητα ρ ορίζεται ανά μονάδα εμβαδού. Συνεπώς, η πολική ροπή αδρανείας J_θ έχει διαστάσεις $\left[L^4\right]$, ενώ η μαζική ροπή αδρανείας I_θ έχει διαστάσεις $\left[ML^2\right]$. Τυπικές μονάδες μέτρησης είναι:

- για την πολική ροπή αδρανείας J_θ: $\left[m^4\right]$
- για τη μαζική ροπή αδρανείας I_θ: $\left[kg\, m^2\right]$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Περί γραμμικής παρεμβολής

Έστω ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο ενώνει δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) του επιπέδου (βλ. Σχήμα Β.1). Ισοδύναμα, έστω η γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών (x_1, y_1) και (x_2, y_2).



Σχήμα Β.1: Γραμμική παρεμβολή μεταξύ δύο σημείων του επιπέδου: (α) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και (β) σε μετατοπισμένο σύστημα συντεταγμένων

Από τη Γραμμική Άλγεβρα, είναι γνωστό ότι η εξίσωση του προαναφερθέντος ευθυγράμμου τμήματος (βλ. Σχήμα Β.1α) είναι:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{B.1}$$

όπου το πεδίο ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής x είναι:

$$x \in [x_1, x_2] \tag{B.2}$$

Επιλύοντας την Εξ.(Β.1) ως προς y, προκύπτει:

$$y = (x - x_1)\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + y_1 = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}(y_2 - y_1) + y_1 = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2 - \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_1 + y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left(1 - \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}\right) y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2 \tag{B.3}$$

Ωστόσο, από το Σχήμα Β.1α, προκύπτει ότι ισχύει:

$$x_2 = x_1 + L \tag{B.4}$$

Εισάγοντας την Εξ.(Β.4) στην Εξ.(Β.3), προκύπτει:

$$y = \left(1 - \frac{(x - x_1)}{(x_1 + L - x_1)}\right) y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_1 + L - x_1)} y_2 \Rightarrow y = \left(1 - \frac{(x - x_1)}{L}\right) y_1 + \frac{(x - x_1)}{L} y_2 \tag{B.5}$$

Επίσης, εάν μετατοπισθεί ο άξονας των τεταγμένων στη θέση x_1 (βλ. Σχήμα Β.1β), τότε προκύπτει η μετασχηματισμένη μεταβλητή:

$$X = x - x_1 \tag{B.6}$$

Το πεδίο ορισμού της μεταβλητής X είναι:

$$x \in \left[x_1, x_2\right] \Rightarrow \left(x - x_1\right) \in \left[x_1 - x_1, x_2 - x_2\right] \Rightarrow X \in \left[0, L\right] \tag{B.7}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(Β.5, Β.6, Β.7) δίδει:

$$y = \underbrace{\left(1 - \frac{X}{L}\right)}_{N_1(X)} y_1 + \underbrace{\left(\frac{X}{L}\right)}_{N_2(X)} y_2, \quad X \in \left[0, L\right] \tag{B.8}$$

Η Εξ.(Β.8) πληροφορεί ότι στον υπολογισμό της τιμής y, μέσω γραμμικής παρεμβολής σε ένα διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$, συμμετέχουν οι τιμές στα άκρα του διαστήματος $\left[x_1, x_2\right]$ με συγκεκριμένη βαρύτητα, η οποία περιγράφεται από τις συναρτήσεις $N_1\left(X\right)$ και. $N_2\left(X\right)$ (βλ. Εξ.(Β.8)), όπου X είναι η μετασχηματισμένη μεταβλητή της Εξ.(Β.6).