

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

**Copyright © ΕΜΠ - Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών - Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών - 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.**

Απαγορεύεται η χρήση, αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για πάσης φύσεως εμπορικό ή επαγγελματικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Εκπαιδευτική Ενότητα 20^η

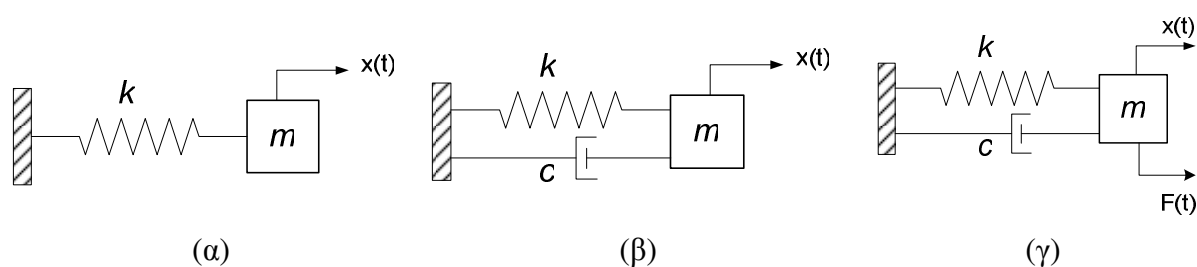
Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων – Εφαρμογές (Προσδιορισμός σταθερών Δυναμικού Συστήματος $m-c-k$ I B.E – Bio-Sensors/Bio-MEMS)

Γενικά

Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα, θα πραγματοποιηθεί μία σύντομη ανασκόπηση του δυναμικού συστήματος $m-c-k$ με ένα Βαθμό Ελευθερίας, θα αναφερθούν βασικές συνδεσμολογίες μεταξύ των δυναμικών στοιχείων ελαστικότητας (ελατήριο) και απόσβεσης (αποσβεστήρας), ενώ θα εξετασθούν και δύο τυπικές περιπτώσεις απλού ταλαντωτή. Στην πρώτη περίπτωση περιγράφεται ο προσδιορισμός των σταθερών ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ και στη δεύτερη περίπτωση περιγράφεται μία τεχνολογική εφαρμογή στο πεδίο των Βιολογικών Συστημάτων (Biology Systems), η οποία αφορά στη χρήση μονοβάθμιου ταλαντωτή για την ανίχνευση βιομορίων (περισσότερα θα αναφερθούν στην αντίστοιχη ενότητα).

Δυναμική συμπεριφορά μονοβάθμιου συστήματος $m-c-k$

Σε προηγούμενες Εκπαιδευτικές Ενότητες (π.χ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03), μελετήθηκαν τα μονοβάθμια δυναμικά συστήματα $m-c-k$, τα οποία απεικονίζονται στο Σχήμα 1.

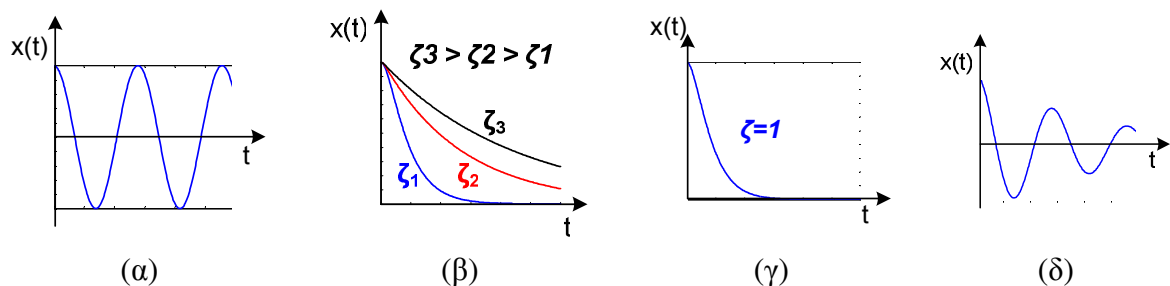


Σχήμα 1: Δυναμικό σύστημα $m-c-k$ (α) χωρίς απόσβεση/χωρίς εξωτερική διέγερση, (β) με απόσβεση/χωρίς εξωτερική διέγερση και (γ) με απόσβεση/με εξωτερική διέγερση

Μελετήθηκαν δύο βασικές περιπτώσεις: χωρίς εξωτερική διέγερση και με εξωτερική (αρμονική) διέγερση. Πιο συγκεκριμένα:

Περίπτωση 1^η: Δυναμικό σύστημα χωρίς εξωτερική διέγερση

Η απόκριση του συστήματος, για διάφορες περιπτώσεις απόσβεσης, φαίνεται στο Σχήμα 2.

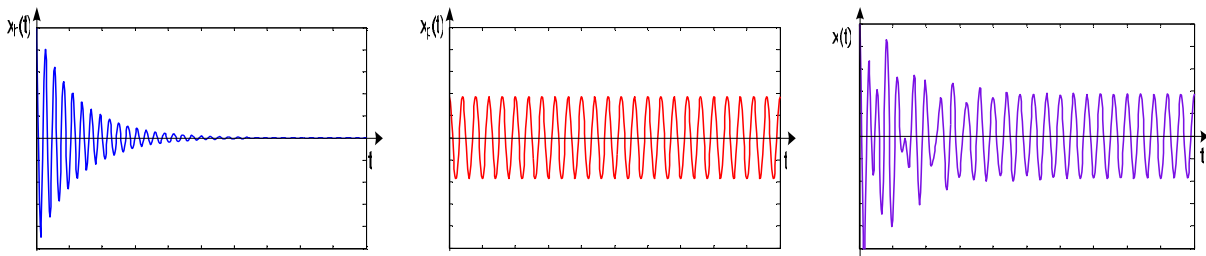


Σχήμα 2: Τυπική απόκριση μονοβάθμιου συστήματος $m-c-k$ χωρίς εξωτερική διέγερση: (α) χωρίς απόσβεση, (β) με υπερκρίσιμη απόσβεση, (γ) με κρίσιμη απόσβεση και (δ) με υποκρίσιμη απόσβεση.

- **Υποπερίπτωση 1α: χωρίς απόσβεση ($\zeta = 0$)** (βλ. Σχήμα 1α & Σχήμα 2α)
 Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) $\omega = \sqrt{k/m}$. Η απόκριση του συστήματος ισούται με $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.
- **Υποπερίπτωση 1β: υπερκρίσιμη απόσβεση ($\zeta \gg 1$)** (βλ. Σχήμα 1β & Σχήμα 2β)
 Για πολύ μεγάλες τιμές του λόγου απόσβεσης, Το σύστημα **δεν** ταλαντώνεται και η απόκριση ισούται με $x(t) = x_h(t) = \left(\frac{1}{s_1 - s_2} \right) \left[x_o (-s_2 e^{s_1 t} + s_1 e^{s_2 t}) + v_o (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \right]$.
- **Υποπερίπτωση 1γ: κρίσιμη απόσβεση ($\zeta = 1$)** (βλ. Σχήμα 1β & Σχήμα 2γ)
 Το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση ηρεμίας **χωρίς** να ταλαντωθεί (εκτός και εάν υπάρχει αρχική ταχύτητα v_o). Το σύστημα ηρεμεί μετά από χρόνο $t \approx (3/\omega)$ και η απόκριση του συστήματος ισούται με $x(t) = (x_o + (v_o + \omega x_o)t) e^{-\omega t}$.
- **Υποπερίπτωση 1δ: υποκρίσιμη απόσβεση ($0 < \zeta < 1$)** (βλ. Σχήμα 1β & Σχήμα 2δ)
 Το σύστημα ταλαντώνεται με ιδιοσυχνότητα $\omega_n = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ (ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης). Η απόκριση του συστήματος ισούται με $x(t) = A e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_n t + \varphi)$, όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης και φ η διαφορά φάσης. Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης ισούται με $e^{-\zeta \omega t}$. Για χρόνο $t = (3/(\zeta \omega))$, το πλάτος της ταλάντωσης έχει μειωθεί κατά 95%. Για πρακτικές εφαρμογές Μηχανικού, θεωρείται ότι, σε αυτήν την περίπτωση, το πλάτος ταλάντωσης έχει μηδενισθεί.

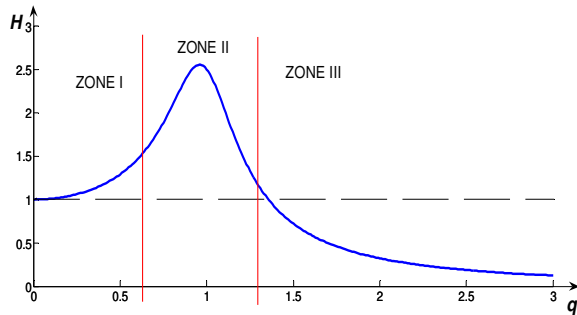
Περίπτωση 2^η: Δυναμικό σύστημα με εξωτερική αρμονική διέγερση συχνότητας Ω

- Σύστημα με απόσβεση (βλ. Σχήμα 1γ).
 Η απόκριση (ολική λύση) του συστήματος ισούται με $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, όπου $x_h(t) = A e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_n t + \varphi)$ είναι η ομογενής λύση του συστήματος (μεταβατική κατάσταση, ταλάντωση με συχνότητα ω_n) και $x_p(t) = X \cos(\Omega t - \vartheta)$ είναι η μερική λύση του συστήματος (μόνιμη κατάσταση, ταλάντωση με συχνότητα Ω).



Σχήμα 3: Τυπική απόκριση μονοβάθμιου συστήματος $m - c - k$ με εξωτερική αρμονική διέγερση: (α) ομογενής λύση $x_h(t)$, (β) μερική λύση $x_p(t)$, (γ) ολική λύση $x(t)$.

Για αυτού του τύπου τα δυναμικά συστήματα, πολύ χρήσιμη ποσότητα είναι ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης $\mathbb{H} = f(\zeta, q)$, ο οποίος εκφράζει ποσοτικά το λόγο του πλάτους X της ταλάντωσης, ενός συστήματος με εξωτερική αρμονική διέγερση πλάτους F_o , προς τη στατική μετατόπιση X_{ST} , που θα είχε το σύστημα όταν σε αυτό επιβάλλεται σταθερή εξωτερική δύναμη F_o . Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται μία τυπική γραφική παράσταση του συντελεστή \mathbb{H} .



Ζώνη Ι: Στατική περιοχή ($\Omega \ll \omega$)
κυριαρχούν οι δυνάμεις ελαστικότητας

Ζώνη ΙΙ: Περιοχή συντονισμού ($\Omega \approx \omega$)

Ζώνη ΙΙΙ: Περιοχή υψίσυχνων διεγέρσεων
($\Omega \gg \omega$) κυριαρχούν οι δυνάμεις αδρανείας

Σχήμα 4: Γραφική παράσταση Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης συναρτήσει του λόγου q

Συμπεριφορά βασικών δυναμικών στοιχείων χωρίς μάζα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά μίας κατηγορίας βασικών δυναμικών στοιχείων, στα οποία απουσιάζει το στοιχείο αδράνειας (μάζα). Σε αυτήν την κατηγορία, ανήκουν τα ακόλουθα στοιχεία:

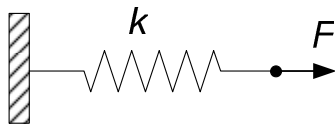
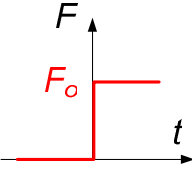
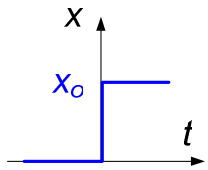
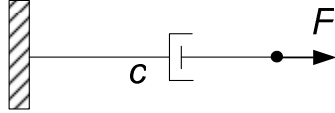
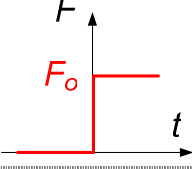
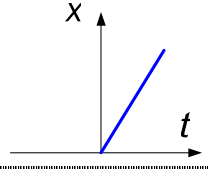
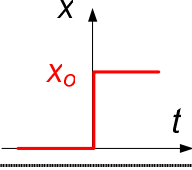
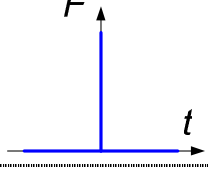
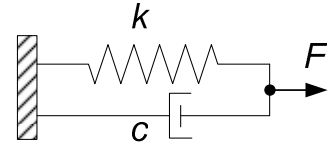
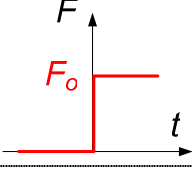
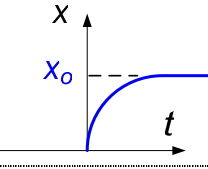
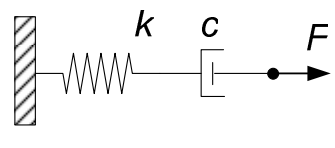
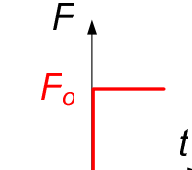
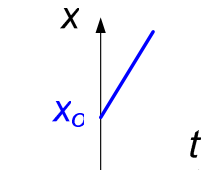
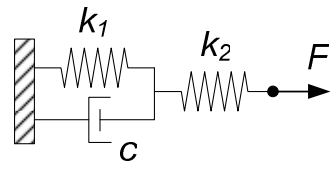
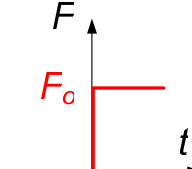
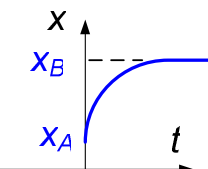
- **Ελατήριο** (στοιχείο ελαστικότητας)

Για γραμμικό ελατήριο, ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή $F(t) = kx(t)$, όπου $F(t)$ είναι η εξωτερική διέγερση, $x(t)$ είναι η απόκριση του ελατηρίου και k είναι η σταθερά του ελατηρίου. Σύμφωνα με τον εν λόγω νόμο, η μορφή της απόκρισης είναι όμοια με αυτήν της εξωτερικής διέγερσης, με σταθερά αναλογίας ($1/k$). Συνεπώς, εάν η εξωτερική διέγερση είναι μία βηματική συνάρτηση (συνάρτηση Heaviside), τότε και η απόκριση θα είναι ομοίως βηματική συνάρτηση (βλ. Πίνακα 1, A/A:1).

- **Αποσβεστήρας** (στοιχείο απόσβεσης)

Θεωρώντας στοιχείο απόσβεσης με ροή Quette (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/σελ.3.4), ισχύει $F(t) = c\dot{x}(t)$, δηλαδή η εξωτερική διέγερση είναι ανάλογη της πρώτης χρονικής παραγώγου της απόκρισης. Σύμφωνα με αυτόν τον νόμο, εάν η εξωτερική διέγερση είναι μία βηματική συνάρτηση, τότε η απόκριση είναι γραμμική και για μηδενικές αρχικές συνθήκες, η απόκριση θα είναι μηδενική τη στιγμή αρχής μέτρησης του χρόνου (βλ. Πίνακα 1, A/A:2α). Επίσης, εάν η απόκριση είναι η βηματική συνάρτηση τότε η διέγερση είναι η συνάρτηση Dirac (βλ. Πίνακα 1, A/A:2β).

Πίνακας 1: Συμπεριφορά βασικών δυναμικών στοιχείων

A/A	Στοιχείο	Διέγερση	Απόκριση
1	Ελατήριο 		
2α	Αποσβεστήρας 		
2β			
3	Kelvin-Voigt 		
4	Maxwell 		
5	Kelvin-Voigt σε σειρά με ελατήριο 		

• **Στοιχείο Kelvin-Voigt**

Το εν λόγω στοιχείο αποτελείται από ένα ελατήριο συνδεδεμένο παράλληλα με έναν αποσβεστήρα. Λόγω της παράλληλης σύνδεσης, το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου μετατοπίζεται όπως ακριβώς μετατοπίζεται και το ελεύθερο άκρο του αποσβεστήρα. Η εξίσωση ισορροπίας του στοιχείου είναι $F(t) = F_k(t) + F_c(t)$, όπου $F(t)$ είναι η εξωτερική διέγερση, $F_k(t)$ είναι η δύναμη στο ελατήριο και $F_c(t)$ είναι η δύναμη στον αποσβεστήρα. Από την επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας προκύπτει η απόκριση του στοιχείου. Για βηματική διέγερση $F(t) = F_0 H^*(t)$, η απόκριση παρουσιάζεται στον Πίνακα 1, A/A:3. Η ποιοτική ερμηνεία της μορφής της απόκρισης είναι άμεση. Μετά από την πάροδο ικανοποιητικού χρονικού διαστήματος (μόνιμη κατάσταση), το ελεύθερο άκρο του στοιχείου ακινητεί (μηδενική ταχύτητα), συνεπώς η δύναμη $F_c(t) = c \dot{x}(t)$ στον

αποσβεστήρα μηδενίζεται και παραμένει μόνον η δύναμη $F_k(t)$ του ελατηρίου. Αυτό σημαίνει ότι η εξωτερική διέγερση $F(t)$ παραλαμβάνεται εξ ολοκλήρου από το ελατήριο (ως εάν δεν υπάρχει αποσβεστήρας). Σε αυτήν την κατάσταση, η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου του στοιχείου ισούται με $x = F_o H^*(t)/k$, δηλαδή ισούται με $x_o = F_o/k$ (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:1). Αντιθέτως, στην αρχή μέτρησης του χρόνου, το ελεύθερο άκρο, από ακινησία, τίθεται σε κίνηση, άρα εμφανίζει σημαντική μεταβολή στη μετατόπισή του (εμφανίζει ταχύτητα). Ως εκ τούτου, η δύναμη απόσβεσης επικρατεί σημαντικά της δύναμης ελαστικότητας (ως εάν δεν υπάρχει ελατήριο). Αναλυτικός υπολογισμός της απόκρισης του στοιχείου Kelvin-Voigt σε βηματική διέγερση παρατίθεται στο Παράρτημα Α.

- **Στοιχείο Maxwell**

Το εν λόγω στοιχείο αποτελείται από ένα ελατήριο συνδεδεμένο σε σειρά με έναν αποσβεστήρα. Λόγω της σύνδεσης αυτής, η εξωτερική διέγερση $F(t)$ παραλαμβάνεται ολόκληρη και από το ελατήριο και από τον αποσβεστήρα. Με άλλα λόγια ισχύει $F(t) = F_c(t) = F_k(t)$, άρα η απόκριση του ελατηρίου (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:1) και η απόκριση του αποσβεστήρα (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:2) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συνεπώς, η συνολική απόκριση του στοιχείου Maxwell προέρχεται από την υπέρθεση των προαναφερομένων αποκρίσεων (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:4).

- **Στοιχείο Kelvin-Voigt συνδεδεμένο σε σειρά με ελατήριο**

Με σκεπτικό παρόμοιο με εκείνο, το οποίο αναπτύχθηκε στο στοιχείο Maxwell, προκύπτει ότι $F(t) = F_{\text{Maxwell}}(t) = F_k(t)$, συνεπώς η απόκριση του στοιχείου Kelvin-Voigt (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:3) και η απόκριση του ελατηρίου σταθεράς k_2 (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:1) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, η συνολική απόκριση του εξεταζόμενου στοιχείου (στοιχείο Kelvin-Voigt συνδεδεμένο σε σειρά με ελατήριο) προέρχεται από την υπέρθεση των προαναφερομένων αποκρίσεων (βλ. Πίνακα 1, Α/Α:5). Επίσης, με βάση όσα αναφέρθηκαν στο στοιχείο Kelvin-Voigt, μετά την παρέλευση ικανοποιητικού χρονικού διαστήματος (μόνιμη κατάσταση), η παρουσία του αποσβεστήρα αμελείται και το εξεταζόμενο στοιχείο εκφυλίζεται σε δύο ελατήρια, σταθεράς k_1 και σταθεράς k_2 , συνδεδεμένων σε σειρά. Βάσει αυτών των διευκρινίσεων, προκύπτει ότι ισχύει $x_A = (F(t)/k_2)$ και $x_B = (F(t)/k_{\text{tot}})$, όπου $(1/k_{\text{tot}}) = (1/k_1) + (1/k_2)$.

Ισοδύναμα δυναμικά συστήματα

Σε ένα δυναμικό σύστημα, **ένα δυναμικό στοιχείο** είναι δυνατόν να αντικατασταθεί **με ένα άλλο**, αρκεί η δυναμική συμπεριφορά των δύο στοιχείων να είναι ακριβώς η ίδια. Κατ' αντιστοιχία, μία **ομάδα από** δύο ή περισσότερα **δυναμικά στοιχεία** είναι δυνατόν να αντικατασταθεί **με ένα δυναμικό στοιχείο**, αρκεί η δυναμική συμπεριφορά του στοιχείου

αντικατάστασης να είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της ομάδος στοιχείων, την οποία αντικαθιστά. Και στις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις, το δυναμικό στοιχείο αντικατάστασης καλείται 'ισοδύναμο στοιχείο'. Κατ' επέκταση, ισοδύναμα καλούνται εκείνα τα δυναμικά συστήματα, τα οποία περιέχουν ισοδύναμα δυναμικά στοιχεία. Σε αυτήν την κατηγορία, αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι περιπτώσεις, οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Ισοδύναμα συστήματα

A/A	Περιγραφή στοιχείου	Συμβολισμός στοιχείου	Ισοδύναμο στοιχείο	Ισοδύναμη σταθερά
1	Δύο ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά			$\left(\frac{1}{k_{I\sigma}}\right) = \left(\frac{1}{k_1}\right) + \left(\frac{1}{k_2}\right)$
2	Δύο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα			$k_{I\sigma} = k_1 + k_2$
3	Ράβδος σε εφελκυσμό			$k_{I\sigma} = \left(\frac{AE}{L}\right)$
4	Πρόβολος σε κάμψη			$k_{\delta} = \left(\frac{3EI}{L^3}\right)$
5	Μάζα ανηρτημένη με ελατήριο στο άκρο προβόλου			$\left(\frac{1}{k_{\delta,1}}\right) = \left(\frac{1}{k_{\delta}}\right) + \left(\frac{1}{k_1}\right)$
6	Μάζα σε ελαστική έδραση και ανηρτημένη με ελατήριο στο άκρο προβόλου			$\left(\frac{1}{k_{\delta,1,2}}\right) = \left(\frac{1}{k_{\delta}}\right) + \left(\frac{1}{k_1}\right)$ $k_{\delta,1,2} = k_{\delta,1} + k_2$

- Δύο ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά (βλ. Πίνακα 2, A/A:1)

Η εξωτερική διέγερση F παραλαμβάνεται ολόκληρη και από το ελατήριο σταθεράς k_1 και από το ελατήριο σταθεράς k_2 , συνεπώς οι αποκρίσεις των δύο ελατηρίων είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Η απόκριση του ισοδύναμου ελατηρίου προέρχεται από την

υπέρθεση των προαναφερομένων αποκρίσεων $x_{i\sigma} = x_1 + x_2$. Για γραμμικά ελατήρια, από τον νόμο Hooke $F = kx$, προκύπτει $(F/k_{i\sigma}) = (F/k_1) + (F/k_2) \Rightarrow (1/k_{i\sigma}) = (1/k_1) + (1/k_2)$.

- **Δύο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα (βλ. Πίνακα 2, A/A:2)**

Το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου σταθεράς k_1 μετατοπίζεται όπως ακριβώς μετατοπίζεται και το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου σταθεράς k_2 , δηλαδή $x_{i\sigma} = x_1 = x_2$. Από την ισορροπία δυνάμεων, ισχύει $F = F_{k_1} + F_{k_2}$. Για γραμμικά ελατήρια, από τον νόμο Hooke $F = kx$, προκύπτει ότι $k_{i\sigma}x_{i\sigma} = k_1x_1 + k_2x_2 \Rightarrow k_{i\sigma} = k_1 + k_2$.

- **Ράβδος σε εφελκυσμό (βλ. Πίνακα 2, A/A:3)**

Για την περιοχή της γραμμικής ελαστικότητας, σύμφωνα με το νόμο Hooke, η εφελκυστική τάση σ σε μία ράβδο είναι ανάλογη της παραμόρφωσης ε της ράβδου, με σταθερά αναλογίας το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ($\sigma = \varepsilon E$). Από τον ορισμό της τάσης, ισχύει $\sigma = (F/A)$, όπου F είναι η εφελκυστική δύναμη και A είναι το εμβαδόν της επιφάνειας, επί της οποίας ασκείται η δύναμη F . Επίσης, από τον ορισμό της παραμόρφωσης ισχύει $\varepsilon = (\Delta L/L)$, όπου L είναι το αρχικό μήκος της ράβδου και ΔL είναι η μεταβολή του μήκους της ράβδου. Από το συνδυασμό των ανωτέρω ορισμών προκύπτει $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow (F/A) = E(\Delta L/L) \Rightarrow F = (AE/L)\Delta L$. Δεδομένου ότι η ποσότητα ΔL εκφράζει και τη μετατόπιση x του ελευθέρου άκρου της ράβδου, έπεται ότι ισχύει $F = (AE/L)x$. Από την τελευταία σχέση, προκύπτει ότι μία ράβδος σε εφελκυσμό είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ένα ελατήριο σταθεράς $k_{i\sigma} = (AE/L)$, το οποίο εφελκύεται με δύναμη F και το ελεύθερο άκρο του μετατοπίζεται κατά x .

- **Πρόβολος σε κάμψη (βλ. Πίνακα 2, A/A:4)**

Από τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Σώματος προκύπτει, για παράδειγμα χρησιμοποιώντας την τεχνική της ελαστικής γραμμής, ότι το βέλος κάμψης δ προβόλου (μονόπακτη δοκός σε κάμψη) μήκους L υπό καμπτικό φορτίο P , ασκούμενο στο ελεύθερο άκρο του, ισούται με $\delta = (PL^3/(3EI))$, όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και I είναι η ροπή αδρανείας της διατομής της δοκού. Αναδιατάσσοντας τους όρους, προκύπτει $P = (3EI/L^3)\delta$. Επομένως, η περίπτωση προβόλου σε κάμψη είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ένα ελατήριο σταθεράς $k_{i\sigma} = (3EI/L^3)$, το οποίο εφελκύεται με δύναμη F και το ελεύθερο άκρο του μετατοπίζεται κατά δ .

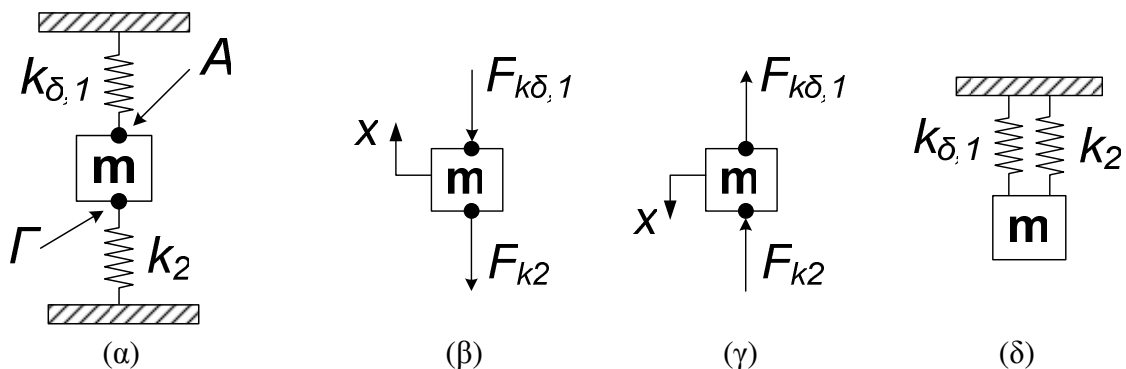
- **Μάζα ανηρτημένη μέσω ελατηρίου στο άκρο προβόλου (βλ. Πίνακα 2, A/A:5)**

Σε αυτήν την περίπτωση, ο πρόβολος αντικαθίσταται από το ισοδύναμο στοιχείο του (βλ. Πίνακα 2, A/A:4), δηλαδή από ένα ελατήριο σταθεράς k_δ . Συνεπώς, προκύπτει ένα νέο

(ισοδύναμο) σύστημα, το οποίο αποτελείται από δύο ελατήρια, σταθεράς k_δ και k_1 αντίστοιχα, συνδεδεμένα σε σειρά, μία μάζα m και ένα ελατήριο σταθεράς k_2 . Το εν λόγω σύστημα απλοποιείται περαιτέρω, αντικαθιστώντας τα ελατήρια σταθεράς k_δ και k_1 με ένα ισοδύναμό τους $k_{\delta,1}$, όπου $(1/k_{\delta,1}) = (1/k_\delta) + (1/k_1)$ (βλ. Πίνακα 2, Α/Α:1). Με βάση τα ανωτέρω, τελικά προκύπτει ένα μονοβάθμιο σύστημα $m - k_{\delta,1,2}$.

• **Μάζα επί ελαστικής έδρασης και ταυτόχρονα ανηρτημένης μέσω ελατηρίου στο άκρο προβόλου (βλ. Πίνακα 2, Α/Α:5)**

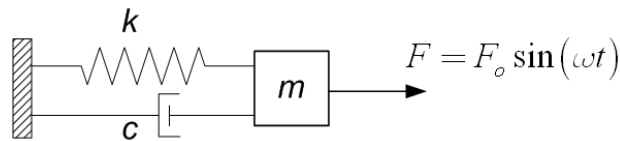
Σε αυτήν την περίπτωση, ο πρόβολος αντικαθίσταται από το ισοδύναμο στοιχείο του (βλ. Πίνακα 2, Α/Α:4), δηλαδή από ένα ελατήριο σταθεράς k_δ . Συνεπώς, προκύπτει ένα νέο (ισοδύναμο) σύστημα, το οποίο αποτελείται από δύο ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά, σταθεράς k_δ και k_1 αντίστοιχα, από μία μάζα m και από ένα ελατήριο σταθεράς k_2 . Το εν λόγω σύστημα είναι δυνατόν να απλοποιηθεί, αντικαθιστώντας τα δύο ελατήρια σταθεράς k_δ και k_1 με ένα ισοδύναμό τους $k_{\delta,1}$, όπου $(1/k_{\delta,1}) = (1/k_\delta) + (1/k_1)$ (βλ. Πίνακα 2, Α/Α:1). Προκύπτει, λοιπόν, το σύστημα του Σχήματος 1α. Στο σύστημα αυτό παρατηρούμε ότι τα σημεία Α και Γ (ελεύθερα άκρα των ελατηρίων σταθεράς $k_{\delta,1}$ και k_2 , αντίστοιχα), θεωρώντας το στοιχείο μάζας m ως απαραμόρφωτο, εμφανίζουν κοινή μετατόπιση. Επίσης, παρατηρούμε ότι και το ελατήριο σταθεράς $k_{\delta,1}$ και το ελατήριο σταθεράς k_2 αντιτίθενται στην κατακόρυφη μετακίνηση της μάζας m (βλ. Σχήμα 1β, 1γ). Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1α εμφανίζει την ίδια συμπεριφορά με εκείνη του συστήματος του Σχήματος 1δ. Συνεπώς, τα δύο εν λόγω συστήματα είναι ισοδύναμα.



Σχήμα 1: Μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m - c - k$ υπό αρμονική διέγερση

Με βάση την ανωτέρω παρατήρηση, το σύστημα του Σχήματος 1α απλοποιείται περαιτέρω στο σύστημα του Σχήματος 1δ., στο οποίο αναγνωρίζουμε ότι τα ελατήρια σταθεράς $k_{\delta,1}$ και k_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα μεταξύ τους, άρα είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από ένα ισοδύναμο ελατήριο σταθεράς $k_{\delta,1,2} = k_{\delta,1} + k_2$.

Εφαρμογή #1: Προσδιορισμός σταθερών μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m - c - k$
 Έστω το μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m - c - k$ του Σχήματος 2, στο οποίο η εξωτερική αρμονική (ημιτονοειδής) διέγερση έχει πλάτος $F_o = 2500N$. Αρχικά, το σύστημα διεγέρθηκε, από κατάσταση ηρεμίας, με συχνότητα $\Omega_1 = 16 \text{ rad/s}$ και, στη μόνιμη κατάσταση, μετρήθηκε πλάτος ταλάντωσης $X_1 = 18 \times 10^{-3} \text{ cm}$ και διαφορά φάσης $\vartheta_1 = -15^\circ$. Στη συνέχεια, το σύστημα, πάλι από κατάστασης ηρεμίας, διεγέρθηκε με συχνότητα $\Omega_2 = 25 \text{ rad/s}$ και, στη μόνιμη κατάσταση, μετρήθηκε πλάτος ταλάντωσης $X_2 = 36 \times 10^{-3} \text{ cm}$ και διαφορά φάσης $\vartheta_2 = -55^\circ$.



Σχήμα 2: Μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m - c - k$ υπό αρμονική διέγερση

Ζητούνται:

- A) οι σταθερές m, c, k, ω, ζ του συστήματος
- B) οι μεταβολές των ελαστικών δυνάμεων, όταν ο λόγος απόσβεσης ζ τεθεί ίσος προς 0.1

Λύση

Για το ερώτημα (A):

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι το σύστημα, στη ‘μόνιμη κατάσταση’, ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος ταλάντωσης (μόνιμη ταλάντωση). Αυτή η συμπεριφορά εμφανίζεται όταν το σύστημα χαρακτηρίζεται είτε από λόγο απόσβεσης $0 < \zeta < 1$, είτε από λόγο απόσβεσης $\zeta = 0$ (για άλλες τιμές του λόγου απόσβεσης, δεν εμφανίζεται μόνιμη ταλάντωση, βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 12/Σχήμα 1). Επίσης, αναφέρεται ότι στη ‘μόνιμη κατάσταση’, μετρήθηκε διαφορά φάσης $\vartheta \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα του διεγέρτη δεν ταυτίζεται με την συχνότητα της απόκρισης του συστήματος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Πίνακα 3). Ο συνδυασμός των ανωτέρω δύο πληροφοριών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σύστημα χαρακτηρίζεται από λόγο απόσβεσης $0 < \zeta < 1$ (για $\zeta = 0$, η διαφορά φάσης ϑ μεταξύ συχνότητας διεγέρτη και απόκρισης συστήματος είναι μηδενική). Συνεπώς, για το εξεταζόμενο μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m - c - k$ είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η έννοια του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης \mathbb{H} . Ειδικότερα, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.(21)):

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + (2\zeta q)^2}} \tag{1}$$

Επίσης, για τη διαφορά φάσης ϑ ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.(30)):

$$\tan \vartheta = \left(\frac{2\zeta q}{1 - q^2} \right) \tag{2}$$

Από την τριγωνομετρία, εξ ορισμού ισχύει:

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 \quad (3)$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(3), προκύπτει:

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \Rightarrow \tan^2 \vartheta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \Rightarrow \cos \vartheta = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \vartheta + 1}} \quad (4)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(2,4) δίδει:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\zeta q}{1-q^2}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\zeta q}{1-q^2}\right)^2 + \left(\frac{1-q^2}{1-q^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{(2\zeta q)^2}{(1-q^2)^2} + \frac{(1-q^2)^2}{(1-q^2)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2}{(1-q^2)^2}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \vartheta = \sqrt{\frac{(1-q^2)^2}{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2}} \Rightarrow \cos \vartheta = (1-q^2) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2}} \right)}_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (5)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(1,5) δίδει:

$$\cos \vartheta = (1-q^2) \mathbb{H} \Rightarrow \mathbb{H} = \frac{\cos \vartheta}{(1-q^2)} \quad (6)$$

Επίσης, εξ ορισμού, ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.(20)):

$$\mathbb{H} = \frac{X}{X_{ST}} \Rightarrow X = X_{ST} \mathbb{H} \quad (7)$$

Ως X_{ST} ορίζεται το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.(10)):

$$X_{ST} = \left(\frac{F_o}{k} \right) \quad (8)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(6,7,8) δίδει:

$$X = \left(\frac{F_o}{k} \right) \frac{\cos \vartheta}{(1-q^2)} \Rightarrow k(1-q^2) = \frac{F_o \cos \vartheta}{X} \Rightarrow k - kq^2 = \frac{F_o \cos \vartheta}{X} \quad (9)$$

Ο λόγος q ορίζεται ως εξής (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03/Εξ.(18)):

$$q = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \quad (10)$$

Υπενθυμίζεται ότι ως Ω συμβολίζεται η συχνότητα του διεγέρτη. Ο συνδυασμός των Εξ.(9,10) δίδει:

$$k - k \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 = \frac{F_o \cos \vartheta}{X} \Rightarrow k - \Omega^2 \left(\frac{k}{\omega^2} \right) = \frac{F_o \cos \vartheta}{X} \xrightarrow{\omega^2 = \left(\frac{k}{m} \right)} k - \Omega^2 \left(\frac{k}{\left(\frac{k}{m} \right)} \right) = \frac{F_o \cos \vartheta}{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k - m\Omega^2 = \frac{F_o \cos \vartheta}{X} \quad (11)$$

Εφαρμόζοντας την Εξ.(11), για την πρώτη περίπτωση διέγερσης, προκύπτει:

$$k - m \times 16^2 = \frac{2500 \times \cos(-15^\circ)}{\underbrace{18 \times 10^{-3} \times 10^{-2}}_{\substack{cm \\ m}}} \Rightarrow k - m \times 16^2 = \frac{2500 \times 0.966}{18 \times 10^{-5}} \Rightarrow k - 256m = 134.156 \times 10^5 \quad (12)$$

Εφαρμόζοντας την Εξ.(11), για τη δεύτερη περίπτωση διέγερσης, προκύπτει:

$$k - m \times 25^2 = \frac{2500 \times \cos(-55^\circ)}{\underbrace{36 \times 10^{-3} \times 10^{-2}}_{\substack{cm \\ m}}} \Rightarrow k - m \times 25^2 = \frac{2500 \times 0.574}{36 \times 10^{-5}} \Rightarrow k - 625m = 39.832 \times 10^5 \quad (13)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις Εξ.(12,13), προκύπτει:

$$(k - 256m) - (k - 625m) = (134.156 \times 10^5) - (39.832 \times 10^5) \Rightarrow 369m = 94.325 \times 10^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 25562 \text{ kg} \quad (14)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(13,14) δίδει:

$$k = 39.832 \times 10^5 + 625m \xrightarrow{m=25562} k = 39.832 \times 10^5 + 625 \times 25562 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 1.996 \times 10^7 \text{ N/m} \quad (15)$$

Συνεπώς, η ιδιοσυχνότητα του συστήματος ισούται με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.996 \times 10^7}{25562}} \Rightarrow \omega = 27.943 \text{ rad/s} \quad (16)$$

Επίσης, πάλι από την Εξ.(3) και εκτελώντας πράξεις, προκύπτει:

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 \Rightarrow \sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta \quad (17)$$

Εισάγοντας την Εξ.(5) στην Εξ.(17), προκύπτει:

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \left(\frac{(1-q^2)}{\sqrt{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2}} \right)^2 = 1 - \left(\frac{(1-q^2)^2}{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2} \right) = \left(\frac{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2 - (1-q^2)^2}{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin^2 \vartheta &= \frac{(2\zeta q)^2}{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2} = (2\zeta q)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{\left(\sqrt{(2\zeta q)^2 + (1-q^2)^2} \right)^2}_{\mathbb{H}}} \right)^2}_{\mathbb{H}^2} \Rightarrow \sin^2 \vartheta = (2\zeta q)^2 \mathbb{H}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta^2 &= \frac{\sin^2 \vartheta}{(2q)^2 \mathbb{H}^2} \xrightarrow{E\xi.(10):q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)} \zeta^2 = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \mathbb{H}^2} \right) \xrightarrow{E\xi.(10):\mathbb{H}=\left(\frac{X}{X_{ST}}\right)} \zeta^2 = \left(\frac{\omega^2}{4}\right) \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{\Omega^2 \left(\frac{X}{X_{ST}}\right)^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta^2 &= \left(\frac{\omega^2}{4}\right) \left(\frac{X_{ST}^2 \sin^2 \vartheta}{\Omega^2 X^2} \right) \xrightarrow{X_{ST}=\left(\frac{F_o}{k}\right)} \zeta^2 = \left(\frac{\omega^2}{4}\right) \left(\frac{\left(\frac{F_o}{k}\right)^2 \sin^2 \vartheta}{\Omega^2 X^2} \right) \Rightarrow \zeta = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{4}\right) \left(\frac{\left(\frac{F_o}{k}\right)^2 \sin^2 \vartheta}{\Omega^2 X^2} \right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta &= \left(\frac{\omega}{2}\right) \left(\frac{F_o}{k}\right) \left(\frac{1}{\Omega X}\right) |\sin \vartheta| \end{aligned} \quad (18)$$

Διευκρινίζεται ότι στην Εξ.(18), απόλυτη τιμή έχει επιβληθεί μόνον στην τριγωνομετρική ποσότητα $\sin \vartheta$, διότι όλες οι άλλες ποσότητες λαμβάνουν πάντοτε θετική τιμή. Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(18), προκύπτει η τιμή του λόγου απόσβεσης ζ . Προς τούτο, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα δεδομένα είτε από την πρώτη περίπτωση διέγερσης είτε από τη δεύτερη περίπτωση διέγερσης. Έστω ότι επιλέγεται η πρώτη περίπτωση διέγερσης, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} \zeta &= \left(\frac{\omega}{2}\right) \left(\frac{F_o}{k}\right) \left(\frac{1}{\Omega_1 X_1}\right) |\sin \vartheta| = \left(\frac{27.946}{2}\right) \left(\frac{2500}{1.996 \times 10^7}\right) \left(\frac{1}{\underbrace{16 \times \underbrace{18 \times 10^{-3}}_{cm} \times 10^{-2}}_m} \right) |\sin(-15^\circ)| \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta &= \left(\frac{27.943 \times 2500}{2 \times 1.996 \times 16 \times 18 \times 10^7 \times 10^{-5}}\right) |\sin(-15^\circ)| = \left(\frac{69857.5}{1149.7 \times 10^2}\right) |-0.2588| \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta &= 0.1572 \end{aligned} \quad (19)$$

Από τον ορισμό του λόγου απόσβεσης ζ , ισχύει (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02/Εξ.(12)):

$$\zeta = \frac{c}{2\omega m} \Rightarrow c = 2\zeta\omega m \quad (20)$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(20), προκύπτει:

$$c = 2 \times 0.1572 \times 27.943 \frac{rad}{s} \times 25562 kg \Rightarrow c = 2.247 \times 10^5 kg/s \quad (21)$$

Για το ερώτημα (B):

Για την πρώτη περίπτωση διέγερσης, η ελαστική δύναμη $F_{el,1}$, εξ ορισμού, ισούται με:

$$F_{el,1} = k X_1 = 1.996 \times 10^7 \frac{N}{m} \times \underbrace{18 \times 10^{-3}}_{cm} \times 10^{-2} \Rightarrow F_{el,1} = 3592.8 N \quad (22)$$

Για τη δεύτερη περίπτωση διέγερσης, η ελαστική δύναμη $F_{el,2}$, εξ ορισμού, ισούται με:

$$F_{el,2} = k X_2 = 1.996 \times 10^7 \frac{N}{m} \times \underbrace{36 \times 10^{-3}}_{cm} \times 10^{-2} \Rightarrow F_{el,2} = 7185.6 N \quad (23)$$

Από τον ορισμό του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης (βλ. Εξ.(7)), προκύπτει ότι η ελαστική δύναμη F_{el} του συστήματος ισούται με:

$$\mathbb{H} = \frac{X}{X_{ST}} = \frac{X}{X_{ST}} \frac{k}{k} = \frac{F_{el}}{F_o} \Rightarrow F_{el} = \mathbb{H} F_o \quad (24)$$

Επομένως, η ελαστική δύναμη F_{el} , για διαφορετική τιμή του λόγου απόσβεσης ζ , είναι δυνατόν να υπολογισθεί από την Εξ.(24), αφού πρώτα υπολογισθεί η νέα τιμή του Συντελεστού Ενίσχυσης \mathbb{H} . Συνεπώς, ισχύει:

- Για την πρώτη περίπτωση διέγερσης και για $\zeta = 0.1$:

Από την Εξ.(10), προκύπτει:

$$q_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\omega} \right) = \left(\frac{16}{27.946} \right) \Rightarrow q_1 = 0.5725 \quad (25)$$

Με βάση την Εξ.(1), ισχύει:

$$\mathbb{H}_{1,new} = \frac{1}{\sqrt{(1 - q_1^2)^2 + (2\zeta_{1,new} q_1)^2}} \quad (26)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(25,26), δίδει:

$$\mathbb{H}_{1,new} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.5725^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 0.5725)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.45191 + 0.01311}} \Rightarrow \mathbb{H}_{1,new} = 1.466 \quad (27)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(24,27) δίδει:

$$F_{el,1,new} = 1.466 \times 2500 \Rightarrow F_{el,1,new} = 3665 N \quad (28)$$

- Για τη δεύτερη περίπτωση διέγερσης και για $\zeta = 0.1$ (όπως και για την πρώτη περίπτωση διέγερσης):

Από την Εξ.(10), προκύπτει:

$$q_2 = \left(\frac{\Omega_2}{\omega} \right) = \left(\frac{25}{27.946} \right) \Rightarrow q_2 = 0.8946 \quad (29)$$

Με βάση την Εξ.(1), ισχύει:

$$\mathbb{H}_{2,new} = \frac{1}{\sqrt{(1-q_2^2)^2 + (2\zeta_{2,new}q_2)^2}} \quad (30)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(29,30), δίδει:

$$\mathbb{H}_{2,new} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.8946^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 0.8946)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.03987 + 0.03201}} \Rightarrow \mathbb{H}_{2,new} = 3.729 \quad (31)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(24,31) δίδει:

$$F_{el,2,new} = 3.729 \times 2500 \Rightarrow F_{el,2,new} = 9322.5N \quad (32)$$

Εφαρμογή #2: Προσδιορισμός πρωτεϊνών μέσω υπολογισμού σταθερών μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m - c - k$

Πληροφοριακό σημείωμα

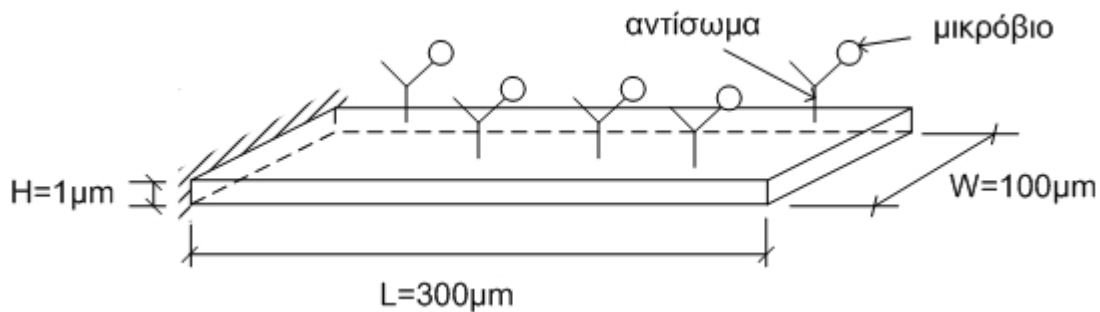
Ένα θέμα, πολύ ενδιαφέρον από θεωρητικής απόψεως και εξαιρετικής αξίας από πρακτικής απόψεως, είναι η δυνατότητα ανίχνευσης βιομορίων. Για παράδειγμα, η δυνατότητα ανίχνευσης πρωτεϊνών στον ανθρώπινο οργανισμό αποτελεί ένα εξαιρετο μέσο έγκαιρης και έγκυρης διάγνωσης διαφόρων παθολογικών καταστάσεων, όπως είναι ο καρκίνος. Επίσης, η δυνατότητα ανίχνευσης είτε μικροβίων είτε των αποκαλούμενων *'biomarkers'*¹ σε φαγητά, αποτελεί ένα εξαιρετο μέσο αξιολόγησης επικινδυνότητας τροφών. Η δυνατότητα αναγνώρισης μικροβίων, όπως αυτό του άνθρακα, αποτελεί ένα εξαιρετο μέσο πρόληψης. Προς την κατεύθυνση της δυνατότητα ανίχνευσης βιομορίων, έχουν αναπτυχθεί διατάξεις αποκαλούμενες ως *'lab-on-a-chip'*. Η ονομασία τους οφείλεται στο γεγονός ότι πρόκειται για διατάξεις μικροσκοπικού μεγέθους, οι οποίες, ωστόσο, επιτελούν έργο, παραδοσιακά υλοποιούμενο σε διαγνωστικά εργαστήρια. Το μικροσκοπικό τους μέγεθος επιτυγχάνεται με την εφαρμογή κατάλληλης τεχνολογίας (τεχνολογία chip). Στις εν λόγω διατάξεις, είναι τοποθετημένα διάφορα ηλεκτροκινούμενα μηχανικά συστήματα, το μέγεθος των οποίων ποικίλει μεταξύ $20\mu m$ και $1mm$ (συστήματα **MEMS**, αρκτικόλεξο του όρου **MicroElectroMechanicalSystems**). Συνήθως, αποτελούνται από μία κεντρική μονάδα επεξεργασίας δεδομένων, έναν μικροεπεξεργαστή και ένα σύνολο τεμαχίων μεγέθους μεταξύ $1\mu m$ και $100\mu m$. Αξιοποιώντας, λοιπόν, τα MEMS στο πεδίο των Βιολογικών Συστημάτων (Biology Systems), είναι δυνατή η κατασκευή και χρήση Βιο-αισθητήρων (Bio-Sensors/Bio-

¹ *Biomarker* (βιολογικός επισημαντήρας): Συγκεκριμένες πρωτεΐνες, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην αντικειμενική αξιολόγηση της βιολογικής κατάστασης (π.χ. φυσιολογική, παθολογική) ενός οργανισμού.

MEMS), με τους οποίους επιδιώκεται και επιτυγχάνεται η ανίχνευση βιομορίων, π.χ. ανίχνευση πρωτεϊνών στον ανθρώπινο οργανισμό, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.

Διαδικασία ανίχνευσης

Έστω μονοβάθμιος ταλαντωτής μάζας m_T και ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης $f = 40kHz$, στην επιφάνεια του οποίου έχουν προσαρμοσθεί αντισώματα². Η προσκόλληση μικροβίων στα προαναφερθέντα αντισώματα έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της μάζας του ταλαντωτή και ως εκ τούτου και τη μεταβολή της ιδιοσυχνότητάς του. Συνεπώς, η μέτρηση της μεταβολής της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης είναι δυνατόν να πληροφορήσει για την παρουσία μικροβίων και γενικά βιομορίων. Προς τούτο, ζητείται να υπολογισθεί η μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης του ταλαντωτή του Σχήματος 3, εάν η μάζα του m_T προσαυξηθεί κατά $m_{pr} = 0.1\% m_T$, λόγω προσκόλλησης μικροβίων, όπου m_{pr} είναι η μάζα των μικροβίων.



Σχήμα 3: Μονοβάθμιος ταλαντωτής ανίχνευσης βιομορίων

Η συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή ισούται με (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 02/Εξ.(10)):

$$\omega^2 = \left(\frac{k}{m_T} \right) \quad (33)$$

Όταν προσκολληθούν βιομόρια μάζας m_{pr} στην επιφάνεια του ταλαντωτή, τότε η συνολική μάζα του συστήματος ταλαντωτής-βιομόρια ισούται $(m_T + m_{pr})$ και η ιδιοσυχνότητα $\omega_{T,pr}$ του εν λόγω συστήματος ισούται με:

$$\omega_{T+pr}^2 = \left(\frac{k}{m_T + m_{pr}} \right) \xrightarrow{\omega_{T+pr} = \omega + \Delta\omega} (\omega + \Delta\omega)^2 = \left(\frac{k}{m_T + m_{pr}} \right) \quad (34)$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(34), προκύπτει:

² Τα αντισώματα είναι συγκεκριμένες πρωτεΐνες του αίματος ή άλλων σωματικών υγρών των σπονδυλωτών και χρησιμοποιούνται από το ανοσοποιητικό σύστημα για την ανίχνευση και εξουδετέρωση ξένων μικρο-οργανισμών, όπως είναι τα βακτήρια και οι ιοί. Στον ανθρώπινο οργανισμό υπάρχουν περίπου 20000 αντισώματα.

$$\begin{aligned}
 \omega^2 + 2\omega(\Delta\omega) + (\Delta\omega)^2 &= \left(\frac{k}{m_T \left(1 + \frac{m_{pr}}{m_T}\right)} \right) \Rightarrow \omega^2 + 2\omega(\Delta\omega) + (\Delta\omega)^2 = \left(\frac{\left(\frac{k}{m_T}\right)}{\left(1 + \frac{m_{pr}}{m_T}\right)} \right) \xrightarrow{\omega = \left(\frac{k}{m_T}\right)} \\
 &\Rightarrow \omega^2 + 2\omega(\Delta\omega) + (\Delta\omega)^2 = \left(\frac{\omega^2}{\left(1 + \frac{m_{pr}}{m_T}\right)} \right) = \left(\frac{\omega^2}{\left(1 + \frac{m_{pr}}{m_T}\right)} \right) \left(\frac{\left(1 - \frac{m_{pr}}{m_T}\right)}{\left(1 - \frac{m_{pr}}{m_T}\right)} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \omega^2 + 2\omega(\Delta\omega) + (\Delta\omega)^2 = \left(\frac{\omega^2 \left(1 - \frac{m_{pr}}{m_T}\right)}{\left(1 - \left(\frac{m_{pr}}{m_T}\right)^2\right)} \right) \Rightarrow 1 + 2\left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega}\right) + \left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\left(1 - \frac{m_{pr}}{m_T}\right)}{\left(1 - \left(\frac{m_{pr}}{m_T}\right)^2\right)} \right)
 \end{aligned} \tag{35}$$

Θεωρώντας ότι η μάζα των προσκεκολλημένων βιομορίων m_{pr} είναι σημαντικά μικρότερη της μάζας του ταλαντωτή, έπεται ότι και η μεταβολή $\Delta\omega$ θα είναι αρκετά μικρότερη της ιδιοσυχνότητας ω του ταλαντωτή, επομένως όροι ανωτέρας τάξεως της μορφής $(\Delta\omega/\omega)^n$ είναι δυνατόν να αμεληθούν. Συνεπώς, θα ισχύει:

$$m_{pr} \ll m_T \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{m_{pr}}{m_T}\right)^2 \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 \rightarrow 0 \end{array} \right. \tag{36}$$

Εισάγοντας την Εξ.(36) στην Εξ.(35), προκύπτει:

$$1 + 2\left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega}\right) = \left(1 - \frac{m_{pr}}{m_T}\right) \Rightarrow \left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m_{pr}}{m_T}\right) \tag{37}$$

Η φυσική σημασία του αρνητικού προσήμου στο δεξί μέλος της Εξ.(37) είναι ότι λόγω της προσαύξεσης της μάζας του συστήματος ταλαντωτής-βιομόρια, η μεταβολή $\Delta\omega$ της ιδιοσυχνότητας του συστήματος αυτού είναι αρνητική. Με άλλα λόγια, η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, λόγω της παρουσίας των βιομορίων, θα μειωθεί. Συνεπώς, για μία μάζα βιομορίων $m_{pr} = 0.1\% m_T$, από την Εξ.(37), προκύπτει:

$$\left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)0.1\% \Rightarrow (\Delta\omega) = -0.05\% \omega \tag{38}$$

Επίσης, εξ ορισμού ισχύει:

$$\Delta\omega = \omega_{new} - \omega = 2\pi f_{new} - 2\pi f \Rightarrow \Delta\omega = 2\pi (f_{new} - f) \Rightarrow \Delta\omega = 2\pi \Delta f \quad (39)$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(38,39) δίδει:

$$\begin{aligned} (\Delta\omega) &= -0.05\% \omega \Rightarrow 2\pi \Delta f = -0.05\% 2\pi f \Rightarrow \Delta f = -0.05\% f \Rightarrow \Delta f = -0.05\% \times 40kHz \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta f = -0.05\% \times 40kHz = -5 \times 10^{-2} \times 10^{-2} \times 4 \times 10 \times 10^3 \Rightarrow \Delta f = 20Hz \end{aligned} \quad (40)$$

Συνεπώς, για μία μεταβολή της μάζας m_T του ταλαντωτή της τάξεως 0.1% , προκαλείται μεταβολή (μείωση) στην ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή κατά 20Hz . Διευκρινίζεται ότι για τη μέτρηση της ταλάντωσης, άρα και της μεταβολής της, ο ταλαντωτής προσβάλλεται με μια φωτεινή δέσμη, την ανάκλαση της οποίας καταγράφουν ειδικοί αισθητήρες. Επειδή, δε, οι μεταβολές στην ταλάντωση είναι πολύ μικρές, χρησιμοποιούνται οι αποκαλούμενες διατάξεις PMT (αρκτικόλεξο του όρου **PhotoMultiplierTube**), οι οποίες έχουν την ικανότητα να διακρίνουν μεταβολή ταλάντωσης της τάξεως 1Hz .

Συμπληρωματικό πληροφοριακό σημείωμα

Η ανιχνευτική διάταξη που αναφέρθηκε προηγουμένως λειτουργεί θεωρώντας ότι ο ταλαντωτής βρίσκεται μέσα σε αέρα ή σε αέρια, άρα η όποια ανίχνευση βιομορίων αφορά σε τέτοιο περιβάλλον. Ωστόσο, για τη διάγνωση βιομορίων σε υγρό περιβάλλον, όπως για παράδειγμα σε αίμα, δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η συγκεκριμένη μορφή του ταλαντωτή, διότι, εξ αιτίας του υγρού περιβάλλοντος, οι αναπτυσσόμενες υδροδυναμικές αντιστάσεις είναι πολύ μεγάλες, επηρεάζοντας σημαντικά τη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης. Ειδικότερα, η ενεργός μάζα (effective mass) του ταλαντωτή $m_{T,eff}$, ακριβώς λόγω των αναπτυσσομένων υδροδυναμικών αντιστάσεων, γίνεται έως και 100 φορές μεγαλύτερη της μάζας m_T του ταλαντωτή:

$$m_{T,eff} \approx 100m_T \quad (41)$$

Συνεπώς, για μάζα $m_{T,eff}$, η Εξ.(37) δίδει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega} \right)_{new} &= - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_{pr}}{m_{T,eff}} \right) \Rightarrow \left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega} \right)_{new} = - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_{pr}}{100m_T} \right) = - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_{pr}}{m_T} \right)}_{\left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega} \right)_{old}} \left(\frac{1}{100} \right) \Rightarrow \\ &\left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega} \right)_{new} = \left(\frac{(\Delta\omega)}{\omega} \right)_{old} \left(\frac{1}{100} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Από την Εξ.(42) προκύπτει ότι ο ταλαντωτής του Σχήματος 3, όταν λειτουργεί σε υγρό περιβάλλον, καθίσταται έως και 100 φορές λιγότερο ευαίσθητος, άρα απολύει το πλεονέκτημα της ανιχνευτικής του ικανότητας (οι μεταβολές στην ταλάντωση του λόγω προσκόλλησης βιομορίων καθίστανται μη-ανιχνεύσιμες).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτικός υπολογισμός της απόκρισης του στοιχείου Kelvin-Voigt σε βηματική διέγερση

Εφαρμόζοντας τον Μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων προκύπτει:

$$F_c + F_k = F(t) \Rightarrow c\dot{x} + kx = F_o H^*(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{c\dot{x} + kx\} = \mathcal{L}\{F_o H^*(t)\} \Rightarrow c\mathcal{L}\{\dot{x}\} + k\mathcal{L}\{x\} = F_o \mathcal{L}\{H^*(t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(sX - x_o) + kX = F_o \left(\frac{1}{s}\right) \Rightarrow csX - cx_o + kX = F_o \left(\frac{1}{s}\right) \Rightarrow (cs + k)X = F_o \left(\frac{1}{s}\right) + cx_o \quad (\text{A.1})$$

Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή ότι ισχύει $x_o = 0$, η Εξ.(A.1) δίδει:

$$(cs + k)X = F_o \left(\frac{1}{s}\right) \Rightarrow X = F_o \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{cs + k}\right) = F_o \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{s + \left(\frac{k}{c}\right)}\right) \quad (\text{A.2})$$

Θέτοντας $a = \left(\frac{k}{c}\right)$, η Εξ.(A.2) δίδει:

$$X = \left(\frac{F_o}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{s + a}\right) \quad (\text{A.3})$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων στην Εξ.(A.3), προκύπτει:

$$\left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{s + a}\right) = \left(\frac{A_o}{s}\right) + \left(\frac{B_o}{s + a}\right) = \frac{A_o(s + a) + B_o s}{s(s + a)} = \frac{A_o s + A_o a + B_o s}{s(s + a)} = \frac{(A_o + B_o)s + A_o a}{s(s + a)} \quad (\text{A.4})$$

Από την Εξ.(A.4), έπεται ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_o + B_o = 0 \\ A_o a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_o = -A_o \\ A_o = \left(\frac{1}{a}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_o = -\left(\frac{1}{a}\right) \\ A_o = \left(\frac{1}{a}\right) \end{array} \right\} \xrightarrow{a = \left(\frac{k}{c}\right)} \left\{ \begin{array}{l} B_o = -\left(\frac{c}{k}\right) \\ A_o = \left(\frac{c}{k}\right) \end{array} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(A.3,A.5) δίδει:

$$X = \left(\frac{F_o}{c}\right) \left[\left(\frac{A_o}{s}\right) + \left(\frac{B_o}{s + a}\right) \right] = \left(\frac{F_o}{c}\right) \left[\left(\frac{\left(\frac{c}{k}\right)}{s}\right) + \left(\frac{-\left(\frac{c}{k}\right)}{s + a}\right) \right] = \left(\frac{F_o}{c}\right) \left(\frac{c}{k}\right) \left[\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s + a}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \left(\frac{F_o}{k}\right) \left[\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s + a}\right) \right] \quad (\text{A.6})$$

Εφαρμόζοντας τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace στην Εξ.(A.6), προκύπτει:

$$\mathcal{L}\{X\} = \mathcal{L}\left\{ \left(\frac{F_o}{k}\right) \left[\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s + a}\right) \right] \right\} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{F_o}{k}\right) \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{1}{s}\right) \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{1}{s + a}\right) \right\} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{F_o}{k}\right) (H^*(t) - e^{-at} H^*(t)) \Rightarrow x(t) = \left(\frac{F_o}{k}\right) (1 - e^{-at}) H^*(t) \quad (\text{A.7})$$

Η Εξ.(7) εκφράζει την απόκριση του στοιχείου Kelvin-Voigt σε βηματική διέγερση.