ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

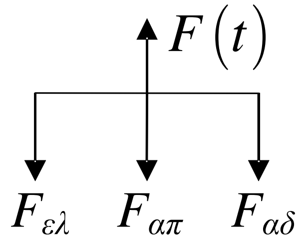
Εκπαιδευτική Ενότητα 21η
Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων – Εφαρμογές

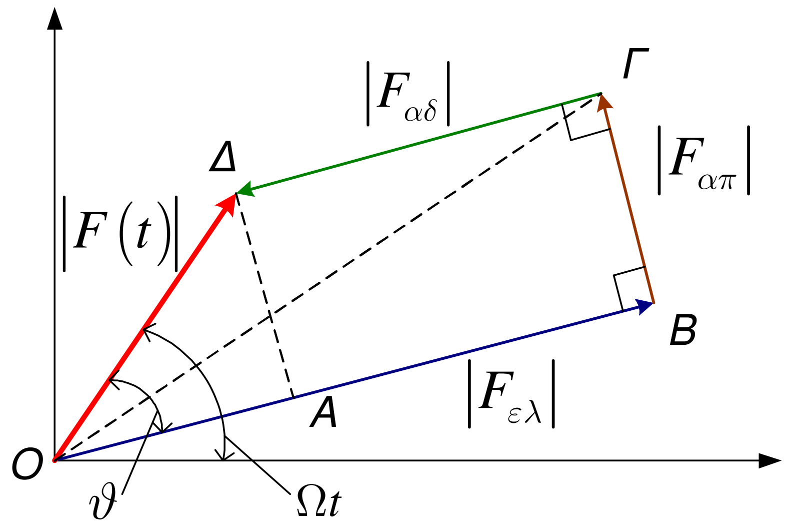
Γενικά

Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα θα μελετηθούν δύο τυπικές περιπτώσεις απλού ταλαντωτή, για τους οποίους ζητείται ο προσδιορισμός των σταθερών ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιείται η έννοια του Συντελεστή Μεταδοτικότητας, ο οποίος περιγράφεται και με γεωμετρικό τρόπο. Στη δεύτερη περίπτωση, εξετάζεται η ταλάντωση αβαρούς και άκαμπτης ράβδου, φέρουσας ελατήριο, αποσβεστήρα και ανηρτημένη μάζα.

Συνοπτική παρουσίαση θεωρητικών στοιχείων

Η έννοια του Συντελεστού Μεταδοτικότητας *TR* παρουσιάσθηκε στην Εκπαιδευτική Ενότητα 04. Ειδικότερα, είχε αναφερθεί ότι ο εν λόγω συντελεστής σχετίζεται με την κινηματική διέγερση της βάσης ενός μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ και αποτελεί μία τεχνική διόρθωση του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης $\mathbb{H}$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσέγγιση του εν λόγω συντελεστή μέσα από τη γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης ισορροπίας του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ (βλ. Σχήμα 1).





Σχήμα 1: Τυπικό μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$: (α) ισορροπία δυνάμεων και (γ) γεωμετρική αναπαράσταση δυνάμων

Ειδικότερα, στο Σχήμα 1α απεικονίζεται ποιοτικά η ισορροπία δυνάμεων (βλ. Εξ.(1)):

$$F(t) = F_{\varepsilon\lambda} + F_{\alpha\pi} + F_{\alpha\delta} \tag{1}$$

όπου $F(t)$ είναι η εξωτερικώς ασκούμενη δύναμη (διέγερση), $F_{\varepsilon\lambda} = kx$ είναι η εμφανιζόμενη δύναμη σε γραμμικό ελατήριο σταθεράς k, $F_{\alpha\pi} = c\dot{x}$ είναι η εμφανιζόμενη δύναμη σε αποσβεστήρα (τύπου ροής Quette) σταθεράς απόσβεσης c και $F_{\alpha\delta} = m\ddot{x}$ είναι η εμφανιζόμενη αδρανειακή δύναμη στη μάζα m. Εάν η εξωτερική δύναμη είναι της μορφής

$F(t) = F_o \cos(\Omega t)$, δηλαδή είναι αρμονική δύναμη πλάτους F_o και συχνότητας διέγερσης Ω, τότε, στη ***μόνιμη*** κατάσταση, ισχύει:

- Για την απόκριση του συστήματος:
  Το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με την ιδιοσυχνότητα του διεγέρτη:

$$x(t) = x_p(t) = X \cos(\Omega t - \vartheta) \tag{2}$$

- Για την ταχύτητα του συστήματος:
  Υπολογίζεται η πρώτη χρονική παράγωγος της απόκρισης και προκύπτει:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_p(t) = X \frac{d}{dt}\left(\cos(\Omega t - \vartheta)\right) = \Omega X \left(-\sin(\Omega t - \vartheta)\right) \Rightarrow \dot{x}(t) = \Omega X \cos\left(\Omega t - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

  Στην Εξ.(3) έχει χρησιμοποιηθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα $-\sin(a) = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

- Για την επιτάχυνση του συστήματος:
  Υπολογίζεται η δεύτερη χρονική παράγωγος της απόκρισης και προκύπτει:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_p(t) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_p(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\Omega X \cos\left(\Omega t - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\Omega^2 X \sin\left(\Omega t - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\Omega^2 X \cos(\Omega t - \vartheta) \tag{4}$$

  Στην Εξ.(4) έχει χρησιμοποιηθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$.

Με βάση τις Εξ.(2,3,4), προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τις δυνάμεις, οι οποίες εμφανίζονται στο δυναμικό σύστημα:

- Για τη δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$

$$F_{\varepsilon\lambda} = kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = \underbrace{kX}_{|F_{\varepsilon\lambda}|} \cos(\Omega t - \vartheta) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = |F_{\varepsilon\lambda}| \cos(\Omega t - \vartheta) \tag{5}$$

  Εάν η δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$ θεωρηθεί ως διάνυσμα μέτρου $|F_{\varepsilon\lambda}| = kX$ και πολικής γωνίας $(\Omega t - \vartheta)$, τότε η Εξ.(5) εκφράζει την προβολή της $F_{\varepsilon\lambda}$ επί οριζοντίου άξονα.

- Για τη δύναμη απόσβεσης $F_{\alpha\pi}$

$$F_{\alpha\pi} = k\dot{x} \Rightarrow F_{\alpha\pi} = \underbrace{c\Omega X}_{|F_{\alpha\pi}|} \cos\left(\Omega t - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow F_{\alpha\pi} = |F_{\alpha\pi}| \cos\left(\Omega t - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

  Κατ' αντιστοιχία, εάν η δύναμη απόσβεσης $F_{\alpha\pi}$ θεωρηθεί ως διάνυσμα μέτρου $|F_{\alpha\pi}| = c\Omega X$ και πολικής γωνίας $\left(\Omega t - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right)$, τότε η Εξ.(6) εκφράζει την προβολή της $F_{\alpha\pi}$ επί οριζοντίου άξονα. Επίσης, παρατηρώντας τις πολικές γωνίες των διανυσμάτων

$F_{\varepsilon\lambda}$ και $F_{\alpha\pi}$, προκύπτει ότι το διάνυσμα $F_{\alpha\pi}$ έχει μεγαλύτερη πολική γωνία και είναι κάθετο στο διάνυσμα $F_{\varepsilon\lambda}$. Εάν, λοιπόν, το διάνυσμα $F_{\varepsilon\lambda}$ απεικονισθεί στο Σχήμα 1β ως το διάνυσμα $\overrightarrow{(\mathrm{OB})}$, τότε το διάνυσμα $F_{\alpha\pi}$ θα απεικονισθεί ως το διάνυσμα $\overrightarrow{(\mathrm{B\Gamma})}$.

- Για τη δύναμη αδρανείας $F_{\alpha\delta}$

$$F_{\alpha\delta} = m\ddot{x} \Rightarrow F_{\alpha\delta} = -\underbrace{m\Omega^2 X}_{|F_{\alpha\delta}|}\cos(\Omega t - \vartheta) \Rightarrow F_{\alpha\delta} = -|F_{\alpha\delta}|\cos(\Omega t - \vartheta) \quad (7)$$

Ομοίως με τα προηγούμενα, εάν η αδρανειακή δύναμη $F_{\alpha\delta}$ θεωρηθεί ως διάνυσμα μέτρου $|F_{\alpha\delta}| = m\Omega^2 X$ και πολικής γωνίας $(\Omega t - \vartheta)$, τότε η Εξ.(7) εκφράζει την προβολή της $F_{\alpha\delta}$ επί οριζοντίου άξονα. Επίσης, παρατηρώντας τις πολικές γωνίες των διανυσμάτων $F_{\varepsilon\lambda}$ και $F_{\alpha\delta}$, προκύπτει ότι τα δύο διάνυσμα έχουν την ίδια διεύθυνση (είναι μεταξύ τους παράλληλα). Σχετικά με τη φορά των εν λόγω διανυσμάτων, παρατηρούμε στην Εξ.(7) την ύπαρξη αρνητικού προσήμου, η φυσική σημασία του οποίου είναι άμεση: τα διανύσματα $F_{\varepsilon\lambda}$ και $F_{\alpha\delta}$ έχουν αντίθετη φορά. Συνεπώς, στο Σχήμα 1β, το διάνυσμα $F_{\alpha\delta}$ θα απεικονισθεί ως το διάνυσμα $\overrightarrow{(\Gamma\Delta)}$.

- Για την εξωτερική αρμονική δύναμη διέγερσης $F(t)$

$$F(t) = \underbrace{F_o}_{|F(t)|}\cos(\Omega t) \Rightarrow F(t) = |F(t)|\cos(\Omega t) \quad (8)$$

- Σε συμφωνία με τα προηγούμενα, εάν η εξωτερική δύναμη $F(t)$ θεωρηθεί ως διάνυσμα μέτρου $|F(t)| = F_o$ και πολικής γωνίας (Ωt), τότε η Εξ.(8) εκφράζει την προβολή της $F(t)$ επί οριζοντίου άξονα. Λόγω της δυναμικής ισορροπίας του συστήματος (βλ.Εξ.(1)), το διάνυσμα $F(t)$ θα απεικονισθεί ως το διάνυσμα $\overrightarrow{(\mathrm{O}\Delta)}$, δηλαδή ως το αντίθετο του διανύσματος $\overrightarrow{(\Delta\mathrm{O})}$, το οποίο εκφράζει την άθροιση των δυνάμεων $F_{\varepsilon\lambda}$, $F_{\alpha\pi}$ και $F_{\alpha\delta}$.

Το δυναμοπολύγωνο του Σχήματος 1β είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην εύκολη διατύπωση σχέσεων μεταξύ των εμπλεκομένων δυνάμεων. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $(\mathrm{OA}\Delta)$ προκύπτει:

$$(\mathrm{O}\Delta)^2 = (\mathrm{OA})^2 + (\mathrm{A}\Delta)^2 \Rightarrow |F(t)|^2 = \left(|F_{\varepsilon\lambda}| - |F_{\alpha\delta}|\right)^2 + |F_{\alpha\pi}|^2 \Rightarrow F_o^2 = \left(kX - m\Omega^2 X\right)^2 + (c\Omega X)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_o^2 = \left(k - m\Omega^2\right)^2 X^2 + (c\Omega)^2 X^2 = \left[\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (c\Omega)^2\right] \Rightarrow \frac{X^2}{F_o^2} = \left(\frac{1}{\left[\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (c\Omega)^2\right]}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X}{F_o} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \right) \Rightarrow \frac{X\left(\frac{1}{k}\right)}{F_o\left(\frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \right) \xrightarrow{X_{ST}=\left(\frac{F_o}{k}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{X\left(\frac{1}{k}\right)}{X_{ST}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \right) \Rightarrow \left(\frac{X}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{k}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{k}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \right) = \left(\frac{k}{\sqrt{\left(k\left[1-\left(m/k\right)\Omega^2\right]\right)^2 + \left(k\left(c/k\right)\Omega\right)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{k}{\sqrt{k^2\left(1-\left(m/k\right)\Omega^2\right)^2 + k^2\left(\left(c/m\right)\left(m/k\right)\Omega\right)^2}} \right) \xrightarrow{\omega^2=\left(\frac{k}{m}\right)} \left(\frac{X}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{k}{\sqrt{k^2\left(1-\left(1/\omega^2\right)\Omega^2\right)^2 + k^2\left(\left(c/m\right)\left(1/\omega\right)\Omega\right)^2}} \right) \xrightarrow[\zeta=\frac{c}{2\omega m}]{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \right) \xrightarrow{\mathbb{H}=\left(\frac{X}{X_{ST}}\right)} \mathbb{H} = \left(\frac{X}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{H} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \right) = \left(\frac{kX}{kX_{ST}}\right) \xrightarrow[\left|F(t)\right|=F_o=kX_{sT}]{\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|=kX} \mathbb{H} = \left(\frac{\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|}{\left|F\left(t\right)\right|}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \right) \tag{9}$$

Στην Εξ.(9) ως $\mathbb{H}$ συμβολίζεται ο Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης. Επιλύοντας την Εξ.(9) ως προς το μέτρο $\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|$ της δύναμης ελατηρίου, προκύπτει:

$$\left|F_{\varepsilon\lambda}\right| = \mathbb{H}\left|F\left(t\right)\right| \tag{10}$$

Επίσης, από το δυναμοπολύγωνο του Σχήματος 1β, είναι δυνατόν να προκύψει η εξίσωση υπολογισμού της γωνίας ϑ. Πιο συγκεκριμένα, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\left(\mathrm{O}\mathrm{A}\Delta\right)$ ισχύει:

$$\tan\vartheta = \frac{\left(\mathrm{A}\Delta\right)}{\left(\mathrm{OA}\right)} = \frac{\left|F_{\alpha\pi}\right|}{\left|F_{\varepsilon\lambda}\right| - \left|F_{\alpha\delta}\right|} \tag{11}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(5,6,7) στην Εξ.(11), προκύπτει:

$$\tan\vartheta = \frac{\left(\mathrm{A}\Delta\right)}{\left(\mathrm{OA}\right)} = \frac{c\Omega X}{kX - m\Omega^2 X} = \frac{c\Omega \cancel{X}}{\left(k - m\Omega^2\right)\cancel{X}} = \frac{c\Omega}{\left(k - m\Omega^2\right)} = \frac{c\Omega}{m\left(\left(k/m\right) - \Omega^2\right)} \xrightarrow{\omega^2=\left(\frac{k}{m}\right)}$$

$$\Rightarrow \tan\vartheta = \frac{\left(c/m\right)\Omega}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)} \xrightarrow{\zeta=\frac{c}{2\omega m}} \tan\vartheta = \frac{2\zeta\omega\Omega}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)} = \frac{\omega^2 2\zeta\left(\Omega/\omega\right)}{\omega^2\left(1-\left(\Omega/\omega\right)^2\right)} = \frac{2\zeta\left(\Omega/\omega\right)}{\left(1-\left(\Omega/\omega\right)^2\right)} \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \tan\vartheta = \frac{2\zeta q}{\left(1-q^2\right)} \tag{12}$$

Η φυσική σημασία της γωνίας ϑ προκύπτει από την ερμηνεία του Σχήματος 1β. Ειδικότερα, η γωνία ϑ σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος της δύναμης ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$ και του διανύσματος της εξωτερικής δύναμης $F(t)$. Για ένα γραμμικό ελατήριο, από το νόμο του Hooke $F_{\varepsilon\lambda} = kx_{\varepsilon\lambda}$, προκύπτει ότι η δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$ είναι συμφασική της απόκρισης $x_{\varepsilon\lambda}$ του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου. Σε ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα, η εν λόγω απόκριση ταυτίζεται με την απόκριση του συστήματος, δηλαδή ισχύει $x(t) = x_{\varepsilon\lambda}$. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, η γωνία ϑ του Σχήματος 1β εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ των δυνάμεων $F(t)$ και $F_{\varepsilon\lambda}$, ή, ισοδύναμα, τη διαφορά φάσης μεταξύ της δύναμης διέγερσης $F(t)$ και της απόκρισης $x(t)$ του συστήματος.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον ζήτημα είναι ο συσχετισμός, στη ***μόνιμη*** κατάσταση, του πλάτους F_o της δύναμης διέγερσης και του πλάτους της δύναμης, η οποία μεταφέρεται στην ***ακίνητη*** βάση (έδραση) του συστήματος του Σχήματος 1β μέσω του ελατηρίου και του αποσβεστήρα. Πιο συγκεκριμένα, στη ***μόνιμη*** κατάσταση, η ***ακίνητη*** βάση του συστήματος καταπονείται από τη συνισταμένη F_B των δυνάμεων ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$ και αποσβεστήρα $F_{\alpha\pi}$. Στο Σχήμα 1β, η εν λόγω συνισταμένη απεικονίζεται ως το διάνυσμα $\overrightarrow{(\mathrm{O\Gamma})}$. Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $(\mathrm{OB\Gamma})$ προκύπτει:

$$\frac{|F_B|}{|F(t)|} = \frac{(\mathrm{O\Gamma})}{(\mathrm{O\Delta})} = \frac{\sqrt{(\mathrm{O\Gamma})^2 + (\mathrm{B\Gamma})^2}}{(\mathrm{O\Delta})} = \frac{\sqrt{|F_{\varepsilon\lambda}|^2 + |F_{\alpha\pi}|^2}}{F_o} = \frac{\sqrt{(kX)^2 + (c\Omega X)^2}}{F_o} = \frac{\sqrt{(kX)^2\left[1+\left(\left(c/k\right)\Omega\right)^2\right]}}{F_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|F_B|}{|F(t)|} = \frac{(kX)}{F_o}\sqrt{\left[1+\left(\left(c/k\right)\Omega\right)^2\right]} = \frac{X}{\left(F_o/k\right)}\sqrt{\left[1+\left(\left(c/m\right)\left(m/k\right)\Omega\right)^2\right]} \xrightarrow[\omega^2=\left(\frac{k}{m}\right),\ \zeta=\left(\frac{c}{2\omega m}\right)]{X_{ST}=\left(\frac{F_o}{k}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{|F_B|}{|F(t)|} = \left(\frac{X}{X_{ST}}\right)\sqrt{\left[1+\left(2\zeta\omega\left(1/\omega^2\right)\Omega\right)^2\right]} = \left(\frac{X}{X_{ST}}\right)\sqrt{\left[1+\left(2\zeta\left(\Omega/\omega\right)\right)^2\right]} \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{|F_B|}{|F(t)|} = \left(\frac{X}{X_{ST}}\right)\sqrt{1+(2\zeta q)^2} \xrightarrow{\mathbb{H}=\left(\frac{X}{X_{ST}}\right)} \left(\frac{|F_B|}{F_o}\right) = \underbrace{\mathbb{H}\sqrt{1+(2\zeta q)^2}}_{(TR)} \tag{13}$$

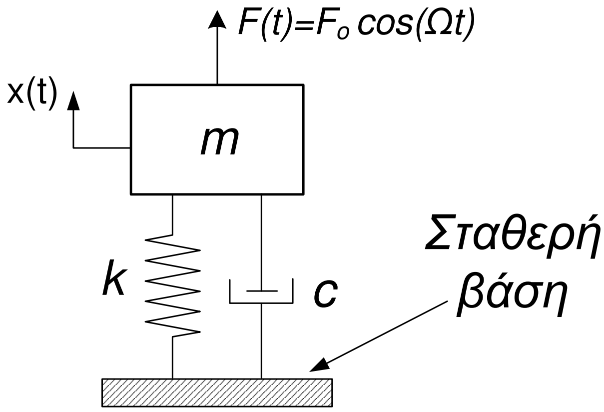
Από την Εξ.(13) προκύπτει ότι, στη ***μόνιμη*** κατάσταση, το πλάτος $|F_B|$ της δύναμης, η οποία καταπονεί την ***ακίνητη*** βάση του εξεταζομένου συστήματος, ισούται με:

$$|F_B| = |F(t)|\,(TR) \Rightarrow |F_B| = F_o\,(TR) \tag{14}$$

Στην Εξ.(14), ο Συντελεστή Μεταδοτικότητας (TR) εκφράζεται συναρτήσει πλατών ***δύναμης***. Υπενθυμίζεται ότι ο ίδιος συντελεστής, στην Εκπαιδευτική Ενότητα 04 (βλ. σελ.4.15, Εξ.(49)), είχε ορισθεί συναρτήσει πλατών ***μετατόπισης***, όταν επιβάλλεται κινηματική διέγερση στη βάση του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$.

Εφαρμογή #1: Προσδιορισμός σταθερών μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος $m-c-k$ ***(Θέμα Εξετάσεων 2006)***

Μία μηχανή μάζας $m = 3000kg$ εδράζεται μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k και ενός αποσβεστήρα σταθεράς c σε μία σταθερή βάση. Η μηχανή ασκεί στο σύστημα έδρασης μίας αρμονική δύναμη πλάτους $3000N$ και συχνότητας ίσης με την εκάστοτε συχνότητα περιστροφής του άξονά της. Οι κανονικές στροφές λειτουργίας της μηχανής είναι $3000ΣΑΛ$. Κατά τη λειτουργία της μηχανής σε διάφορες στροφές διαπιστώθηκε ότι στις $900ΣΑΛ$ παρατηρείται η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης, ίση με $5\,m/\sec^2$.



Σχήμα 1: Εξεταζόμενη διάταξη

Ζητούνται:

Α) Ο υπολογισμός των σταθερών k και c του συστήματος.

Β) Το πλάτος δύναμης που ασκείται στο ελατήριο και στη βάση της μηχανής στις κανονικές στροφές λειτουργίας.

Γ) Ο υπολογισμός νέων σταθερών k και c του ελατηρίου και του αποσβεστήρα του συστήματος έδρασης, ώστε το πλάτος της μέγιστης δύναμης του ελατηρίου να μειωθεί κατά 50% και το πλάτος της δύναμης που ασκείται στη βάση της μηχανής στις κανονικές στροφές λειτουργίας να μειωθεί κατά 25%.

Λύση

Η εξεταζόμενη διάταξη (βλ. Σχήμα 2) αποτελεί μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$ υπό αρμονική διέγερση πλάτους F_o και συχνότητας Ω. Ως εκ τούτου, θα χρησιμοποιηθεί η αντίστοιχη θεωρία.

Για το ερώτημα (Α):

Σε μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$, ισχύει:

$$\omega^2 = \left(\frac{k}{m}\right) \Rightarrow k = m\omega^2 \tag{15}$$

όπου ω είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος, k είναι η σταθερά του ελατηρίου και m είναι η μάζα του συστήματος. Από την εκφώνηση, δίδεται $m = 3000kg$, επομένως αρκεί να υπολογισθεί το η ιδιοσυχνότητα ω.

Σε μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$ υπό αρμονική διέγερση, ισχύει για τη ***μόνιμη*** κατάσταση:

- Απόκριση συστήματος

$$x(t) = X\cos(\omega t - \vartheta) \tag{16}$$

- Ταχύτητα συστήματος

$$\upsilon(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\big(X\cos(\Omega t - \vartheta)\big) = -\Omega X \sin(\Omega t) \tag{17}$$

- Επιτάχυνσης συστήματος

$$A(t) = \frac{d}{dt}\big(\dot{x}(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(-\Omega X\sin(\Omega t - \vartheta)\big) = \Omega^2 X\cos(\Omega t - \vartheta) \Rightarrow |A| = \Omega^2 X \tag{18}$$

Από την τελευταία εξίσωση, προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή του πλάτους $|A|$ της επιτάχυνσης του συστήματος εμφανίζεται όταν μεγιστοποιείται το πλάτος X της απόκρισης του συστήματος, κάτι που συμβαίνει στο συντονισμό (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03). Συνεπώς, η δήλωση ότι '*στις* $900\Sigma\text{ΑΛ}$ *παρατηρείται η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης*', για μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$ υπό αρμονική διέγερση και θεωρώντας ότι η μέτρηση της επιτάχυνσης πραγματοποιείται στη ***μόνιμη*** κατάσταση λειτουργίας του συστήματος, σημαίνει ότι στις $900\Sigma\text{ΑΛ}$ εμφανίζεται συντονισμός. Για μικρή τιμή του λόγου απόσβεσης ζ ισχύει:

$$\omega \approx \Omega_\Sigma \Rightarrow \omega \approx \Omega_\Sigma = 900\Sigma\text{ΑΛ} \times \left(\frac{2\pi}{60}\right) \Rightarrow \omega \approx \Omega_\Sigma = 94.25\, {}^{rad}\!/\!_{\sec} \tag{19}$$

όπου ο δείκτης Σ υποδηλώνει συντονισμό. Ο συνδυασμός των Εξ.(15,19) δίδει:

$$k = m\omega^2 = 3000kg \times \left(94.25\, {}^{rad}\!/\!_{\sec}\right)^2 \Rightarrow k = 2.665 \times 10^7\, {}^{N}\!/\!_{m} \tag{20}$$

Από τον ορισμό του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης, στο συντονισμό ισχύει:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{X_\Sigma}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}}\right) \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\to 1} \mathbb{H} = \left(\frac{X_\Sigma}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{1}{2\zeta}\right) \tag{21}$$

όπου X_Σ είναι το πλάτος του συντονισμού, X_{ST} είναι το Ισοδύναμο Στατικό Πλάτος και ζ είναι ο λόγος απόσβεσης. Επιλύοντας την Εξ.(18) ως προς το πλάτος X της απόκρισης, στην περίπτωση του συντονισμού θα ισχύει:

$$X_\Sigma = \frac{\left|A(t)\right|_\Sigma}{\Omega_\Sigma^2} = \frac{A_\Sigma}{\Omega_\Sigma^2} \tag{22}$$

όπου ο δείκτης Σ υποδηλώνει συντονισμό. Επίσης, από τον ορισμό του Ισοδύναμου Στατικού Πλάτους, ισχύει:

$$X_{ST} = \left(\frac{F_o}{k}\right) \tag{23}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(21,22,23) δίδει:

$$\left(\frac{X_\Sigma}{X_{ST}}\right) = \left(\frac{1}{2\zeta}\right) \Rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{X_{ST}}{X_\Sigma}\right) = \frac{\left(\frac{F_o}{k}\right)}{\left(\frac{A_\Sigma}{\Omega_\Sigma^2}\right)} \xrightarrow{\Omega_\Sigma \approx \omega} \Rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{F_o}{A_\Sigma}\right)\left(\frac{\omega^2}{k}\right) \xrightarrow{\omega^2 = \left(\frac{k}{m}\right)}$$

$$\Rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{F_o}{mA_\Sigma}\right) \tag{24}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(24), προκύπτει:

$$\Rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{F_o}{mA_\Sigma}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3000}{3000 \times 5}\right) \Rightarrow \zeta = 0.1 \tag{25}$$

Παρατήρηση: Προέκυψε ότι ο λόγος απόσβεσης ισούται με $\zeta = 0.1$, άρα η παραδοχή ότι $\zeta \ll 1$ (βλ. Εξ.(21)) είναι αποδεκτή. Σε διαφορετική περίπτωση, η τιμή του λόγου απόσβεσης υπολογίζεται μέσω επαναληπτικής διαδικασίας.

Εξ ορισμού, ισχύει:

$$\zeta = \left(\frac{c}{2\omega m}\right) \Rightarrow c = 2\zeta\omega m \Rightarrow c = 2 \times 0.1 \times 94.25 \times 3000 \, {}^{Ns}\!/_{m} \Rightarrow c = 56550 \, {}^{Ns}\!/_{m} \tag{26}$$

Επομένως, η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 2.665 \times 10^7 \, {}^{N}\!/_{m}$ και η σταθερά απόσβεσης είναι $c = 56550 \, {}^{Ns}\!/_{m}$.

Για το ερώτημα (Β):

Σύμφωνα με την ενότητα ‘*Συνοπτική παρουσίαση θεωρητικών στοιχείων*’, (βλ. Εξ.(10)) και για το εξεταζόμενο μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m - c - k$, το πλάτος $\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|$ της δύναμης, η οποία ασκείται στο ελατήριο, και το πλάτος $\left|F(t)\right|$ της εξωτερικά ασκούμενης δύναμης, συνδέονται μέσω του Συντελεστή Δυναμικής Ενίσχυσης ως εξής:

$$\left|F_{\varepsilon\lambda}\right| = \left|F(t)\right| \mathbb{H} \Rightarrow \left|F_{\varepsilon\lambda}\right| = F_o \,\mathbb{H} \tag{27}$$

Επίσης, σύμφωνα με την ενότητα '*Συνοπτική παρουσίαση θεωρητικών στοιχείων*', (βλ. Εξ.(13,14)) και για το εξεταζόμενο μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$, το πλάτος $\left|F_B\right|$ της δύναμης, η οποία ασκείται στη βάση, και το πλάτος $\left|F(t)\right|$ της εξωτερικά ασκούμενης δύναμης, συνδέονται μέσω του Συντελεστή Μεταδοτικότητας ως εξής

$$\left|F_B\right| = \left|F(t)\right| (TR) = F_o\,(TR) \Rightarrow \left|F_B\right| = F_o\,\mathbb{H}\sqrt{1+(2\zeta q)^2} \tag{28}$$

Ειδικά στον συντονισμό, όπου $q \to 1$, η Εξ.(28) γράφεται ως εξής:

$$\left|F_B\right| = \left|F(t)\right| (TR)_\Sigma = F_o\,(TR)_\Sigma \Rightarrow \left|F_B\right| = F_o\,\mathbb{H}_\Sigma\sqrt{1+(2\zeta)^2} \tag{29}$$

Συνεπώς, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Για το συντονισμό
  - Για το πλάτος της δύναμης που ασκείται στο ελατήριο
    Από τον ορισμό του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης, προκύπτει:

$$\mathbb{H}_\Sigma = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2+(2\zeta q)^2}}\right) \xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\to 1} \mathbb{H}_\Sigma = \left(\frac{1}{2\zeta}\right) = \left(\frac{1}{2\times 0.1}\right) \Rightarrow \mathbb{H}_\Sigma = 5 \tag{30}$$

    Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(27), προκύπτει:

$$\left.\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|\right|_\Sigma = F_o \mathbb{H}_\Sigma = 3000\times 5 \Rightarrow \left.\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|\right|_\Sigma = 15000N \tag{31}$$

  - Για το πλάτος της δύναμης που ασκείται στο βάση
    Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(29), προκύπτει:

$$\left.\left|F_B\right|\right|_\Sigma = F_o\,\mathbb{H}_\Sigma\sqrt{1+(2\zeta)^2} = 3000\times 5\times\sqrt{1+(2\times 0.1)^2} = 15000\times\sqrt{1.04} \Rightarrow \left.\left|F_B\right|\right|_\Sigma = 15297N \tag{32}$$

- Για τις κανονικές στροφές λειτουργίας (όπως και προηγουμένως)
  Σε αυτήν την περίπτωση, η συχνότητα διέγερσης (έστω συχνότητα Ω_Λ) είναι:

$$\Omega_\Lambda = 3000\Sigma\text{Α}\Lambda \times\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 314.16\,{}^{rad}\!/_{\sec} \tag{33}$$

  Συνεπώς, θα ισχύει:

$$q_\Lambda = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\omega}\right) = \left(\frac{314.16}{94.25}\right) \Rightarrow q_\Lambda = 3.333 \tag{34}$$

- Για το πλάτος της δύναμης που ασκείται στο ελατήριο
  Με αριθμητική αντικατάσταση στον ορισμό του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης, προκύπτει:

$$\mathbb{H}_{\Lambda} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\zeta q\right)^2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-3.33^2\right)^2 + \left(2\times 0.1\times 3.33\right)^2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{101.78+0.443}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{H}_{\Lambda} = 0.099 \tag{35}$$

  Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(27), προκύπτει:

$$\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{\Lambda} = F_o \mathbb{H}_{\Lambda} = 3000\times 0.099 \Rightarrow \left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{\Lambda} = 297N \tag{36}$$

- Για το πλάτος της δύναμης που ασκείται στο βάση
  Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(28), προκύπτει:

$$\left|F_B\right|_{\Lambda} = F_o\, \mathbb{H}_{\Lambda} \sqrt{1+\left(2\zeta q\right)^2} = 3000\times 0.099\times \sqrt{1+\left(2\times 0.1\times 3.33\right)} \Rightarrow \left|F_B\right|_{\Lambda} = 3000\times 0.099\times 1.291N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|F_B\right|_{\Lambda} = 383.35N \tag{37}$$

Επομένως, το πλάτος της δύναμης που ασκείται:

στο ελατήριο, στο συντονισμό, είναι:	$\left\|F_{\varepsilon\lambda}\right\|_{\Sigma} = 15000N$
στο ελατήριο, στις κανονικές στροφές λειτουργίας, είναι:	$\left\|F_{\varepsilon\lambda}\right\|_{\Lambda} = 297N$
στη βάση, στο συντονισμό, είναι:	$\left\|F_B\right\|_{\Sigma} = 15297N$
στη βάση, στις κανονικές στροφές λειτουργίας, είναι:	$\left\|F_B\right\|_{\Lambda} = 383.35N$

Για το ερώτημα (Γ):

Από την Εξ.(27), προκύπτει ότι το πλάτος της δύναμης του ελατηρίου, για τις δοθείσες τιμές των σταθερών k και c, ισούται με:

$$\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{old} = F_o\, \mathbb{H}_{old} \tag{38}$$

Με τις νέες τιμές των σταθερών k και c, μεταβάλλεται η τιμή του Συντελεστού Δυναμικής Ενίσχυσης (βλ. Εξ.(9)):

$$\mathbb{H}_{new} = \left(\frac{k}{\sqrt{\left(k-m\Omega^2\right)^2 + \left(c\Omega\right)^2}} \right)_{new} \tag{39}$$

Συνεπώς, με τις νέες τιμές των σταθερών k και c, θα ισχύει:

$$\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{new} = F_o\, \mathbb{H}_{new} \tag{40}$$

Από την εκφώνηση, δίδεται ότι, με τις νέες τιμές των σταθερών k και c, πρέπει '*το πλάτος της μέγιστης δύναμης του ελατηρίου να μειωθεί κατά* 50%'. Από την Εξ.(40), έπεται ότι, για σταθερό πλάτος F_o εξωτερικής δύναμης, το πλάτος $\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{new}$ της δύναμης του ελατηρίου μεγιστοποιείται, όταν η ποσότητα $\mathbb{H}_{new}$ λάβει τη μέγιστη τιμή της. Αυτό, ωστόσο, συμβαίνει στο συντονισμό, επομένως η έκφραση '*το πλάτος της μέγιστης δύναμης του ελατηρίου*' υποδηλώνει την κατάσταση του συντονισμού. Σχετικά με τη ζητούμενη μείωση, ισχύει:

$$\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{\Sigma,new} = 0.5\times\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{\Sigma,old} \xrightarrow{\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{old}=F_o\,\mathbb{H}_{old}} \left|F_{\varepsilon\lambda}\right|_{\Sigma,new} = 0.5\,F_o\,\mathbb{H}_{\Sigma,old} \Rightarrow F_o\,\mathbb{H}_{\Sigma,new} = 0.5\,F_o\,\mathbb{H}_{\Sigma,old} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{H}_{\Sigma,new} = 0.5\ \mathbb{H}_{\Sigma,old} \tag{41}$$

Στην Εξ.(41), ο δείκτης Σ αντιστοιχεί στον συντονισμό. Ο συνδυασμός των Εξ.(21,41) δίδει:

$$\mathbb{H}_{\Sigma,new} = 0.5\ \mathbb{H}_{\Sigma,old} \Rightarrow \left(\frac{1}{\cancel{2}\zeta}\right)_{new} = 0.5\left(\frac{1}{\cancel{2}\zeta}\right)_{old} \Rightarrow \zeta_{old} = 0.5\zeta_{new} \Rightarrow \zeta_{new} = \frac{\zeta_{old}}{0.5} \tag{42}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(42) με την Εξ.(25), προκύπτει:

$$\zeta_{new} = \frac{0.1}{0.5} \Rightarrow \zeta_{new} = 0.2 \tag{43}$$

Παρατήρηση: Ο νέος λόγος απόσβεσης ισούται με $\zeta_{new} = 0.2$. Η τιμή αυτή προέκυψε από την παραδοχή ότι $\zeta_{new} \ll 1$ (βλ. Εξ.(21)), η οποία είναι οριακά αποδεκτή.

Με παρόμοιο σκεπτικό, αντιμετωπίζεται η περίπτωση της δύναμης στη βάση της μηχανής και για κανονικές στροφές λειτουργίας. Επειδή, ζητείται μείωση κατά 25%, η Εξ.(28) δίδει:

$$\left|F_B\right|_{\Lambda,new} = (1-0.25)\left|F_B\right|_{\Lambda,old} \xrightarrow{\left|F_B\right|=F_o\,(TR)} F_o\,(TR)_{\Lambda,new} = F_o\,(1-0.25)(TR)_{\Lambda,old} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (TR)_{\Lambda,new} = 0.75(TR)_{\Lambda,old} \tag{44}$$

Στην Εξ.(44), ο δείκτης Λ αντιστοιχεί στις κανονικές στροφές λειτουργίας της μηχανής. Με αριθμητική αντικατάσταση στην Εξ.(44), προκύπτει (βλ. και Εξ.(37)):

$$(TR)_{\Lambda,new} = 0.75\times0.099\times1.291 \Rightarrow (TR)_{\Lambda,new} = 0.0959 \tag{45}$$

Όμως, από τον ορισμό του Συντελεστή Μεταδοτικότητας (TR), ισχύει:

$$(TR) = \left(\frac{\sqrt{1+(2\zeta q)^2}}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2+(2\zeta q)^2}}\right) \Rightarrow (TR)^2 = \left(\frac{1+(2\zeta q)^2}{\left(1-q^2\right)^2+(2\zeta q)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-q^2\right)^2(TR)^2 + (2\zeta q)^2(TR)^2 = 1+(2\zeta q)^2 \Rightarrow \left(1-q^2\right)^2(TR)^2 + (2\zeta q)^2\left((TR)^2-1\right)-1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(q^4-2q^2+1\right)(TR)^2 + q^2(2\zeta)^2\left((TR)^2-1\right)-1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^4(TR)^2 + q^2\left[(2\zeta)^2\left((TR)^2-1\right)-2(TR)^2\right] + (TR)^2 - 1 = 0 \tag{46}$$

Εισάγοντας την Εξ.(45) στην Εξ.(46), προκύπτει:

$$q^4\left(0.0959\right)^2+q^2\left[\left(2\times0.2\right)^2\left(\left(0.0959\right)^2-1\right)-2\left(0.0959\right)^2\right]+\left(0.0959\right)^2-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^4\left(9.197\times10^{-3}\right)+q^2\left[0.16\times\left(-0.99\right)-0.01839\right]-0.99=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^4\left(9.197\times10^{-3}\right)-0.1768q^2-0.99=0\Rightarrow q^4-19.222q^2-107.64=0 \tag{47}$$

Θέτοντας $x=q^2$, η Εξ.(47) γράφεται:

$$x^2-19.222x-107.64=0 \tag{48}$$

Η διακρίνουσα της Εξ.(48) ισούται με:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-19.222\right)^2-4\times\left(-107.64\right)\Rightarrow\Delta=800.04 \tag{49}$$

Οι ρίζες της Εξ.(48) είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{19.222\pm\sqrt{800.04}}{2}=\frac{19.222\pm28.285}{2}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1=23.753\\ x_2<0\end{Bmatrix} \tag{50}$$

Επειδή είχε τεθεί $x=q^2\geq0\Rightarrow x\geq0$, η αρνητική ρίζα απορρίπτεται, οπότε προκύπτει:

$$x_1=23.753=q^2\Rightarrow q=\pm4.874 \tag{51}$$

Εξ ορισμού, ο λόγος $q=\left(\Omega/\omega\right)$ λαμβάνει μόνον μη-μηδενικές τιμές, επομένως, από την Εξ.(51), προκύπτει ότι, με τις νέες τιμές των σταθερών k και c, ισχύει:

$$q_{new}=4.874 \tag{52}$$

Επομένως, η νέα ιδιοσυχνότητα ω_{new} του συστήματος ισούται με:

$$q_{new}=\left(\frac{\Omega}{\omega_{new}}\right)\Rightarrow\omega_{new}=\frac{\Omega}{q_{new}}=3000\times\left(\frac{2\pi}{60}\right)\times\left(\frac{1}{4.874}\right)\Rightarrow\omega_{new}=64.456\,{}^{rad}\!/_{\sec} \tag{53}$$

Από την Εξ.(15) και για τη νέα τιμή k_{new} της σταθεράς του ελατηρίου, προκύπτει:

$$k_{new}=m\omega_{new}^2=3000\times64.456^2\Rightarrow k_{new}=12.464\times10^6\,{}^{N}\!/_{m} \tag{54}$$

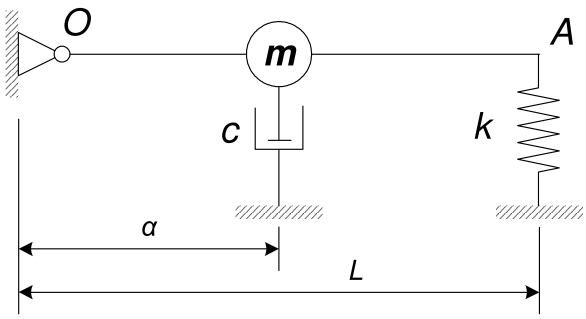
Τέλος, από την Εξ.(26) και για τη νέα τιμή της σταθεράς απόσβεσης c_{new}, προκύπτει:

$$\zeta_{new}=\left(\frac{c_{new}}{2\omega_{new}m}\right)\Rightarrow c_{new}=2\zeta_{new}\omega_{new}m\Rightarrow c_{new}=2\times0.2\times64.456\times3000\,{}^{Ns}\!/_{m}\Rightarrow$$

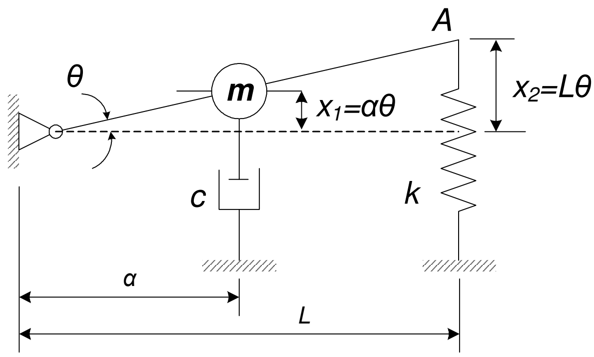
$$\Rightarrow c=7.735\times10^4\,{}^{Ns}\!/_{m} \tag{55}$$

Εφαρμογή #2: Ταλάντωση αβαρούς και άκαμπτης ράβδου φέρουσας ελατήριο, αποσβεστήρα και ανηρτημένη μάζα.

Έστω το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 2, το οποίο αποτελείται από την αβαρή ράβδο (OA), τη μάζα m, το ελατήριο σταθεράς k και τον αποσβεστήρα σταθεράς c. Η ράβδος είναι αρθρωμένη στη θέση O, η μάζα m είναι σταθερά συνδεδεμένη επί της ράβδου, το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου k είναι σταθερά συνδεδεμένο με το ελεύθερο άκρο της ράβδου και ο αποσβεστήρας είναι σταθερά συνδεδεμένος με τη μάζα m. Η θέση μηδενικής εκτροπής του συστήματος από την οριζόντια θέση παρουσιάζεται στο Σχήμα 2α, όπου ως L συμβολίζεται το μήκος της ράβδου και ως a συμβολίζεται η απόσταση του στοιχείου μάζα/αποσβεστήρας από τη θέση O. Στο Σχήμα 2β απεικονίζεται το ίδιο σύστημα σε μία θέση εκτροπής, για μικρή γωνία θ.



(α)



(β)

Σχήμα 2: Εξεταζόμενη διάταξη: (α) θέση μηδενικής εκτροπής από την οριζόντια θέση και (β) θέσης εκτροπής για μικρή γωνία θ.

Ζητούνται:

Α) Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος, η φυσική ιδιοσυχνότητα καθώς και η συχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης του συστήματος.

Β) Η τιμή του μήκους L ώστε το σύστημα οριακά να ταλαντώνεται (ισοδύναμα, οριακά να μην ταλαντώνεται).

Λύση

Για το Ερώτημα Α:

Για την εύρεση των εξισώσεων κίνησης, είναι δυνατή η χρήση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m, ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \tag{56}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία αποθηκεύεται στο ελατήριο σταθεράς k, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k x_2^{\,2} \tag{57}$$

- Η ισχύς P_C, η οποία διαχέεται στον αποσβεστήρα σταθεράς c, ισούται με:

$$P_C = \left(\frac{1}{2}\right) c \dot{x}_1^2 \tag{58}$$

- Επειδή δεν ασκείται εξωτερική δύναμη στο σύστημα, η ισχύς P_t του συστήματος, λόγω άσκησης εξωτερικής διέγερσης, είναι μηδενική:

$$P_t = 0 \tag{59}$$

Σχετικά με τους Βαθμούς Ελευθερίας του συστήματος, διαπιστώνουμε ότι στους προαναεφερθέντες ενεργειακούς όρους εμφανίζονται δύο κινηματικές μεταβλητές: η κατακόρυφη μετατόπιση x_1 και η κατακόρυφη μετατόπιση x_2. Ωστόσο, θεωρώντας ότι η ράβδος είναι άκαμπτη και ότι η εκτροπή της από την οριζόντια θέση αντιστοιχεί σε μικρή γωνία θ, έπεται ότι ισχύει:

$$x_1 = a\theta \quad \text{και} \quad x_2 = L\theta \tag{60}$$

Από την Εξ.(60), προκύπτει ότι οι κινηματικές μεταβλητές x_1 και x_2 είναι δυνατόν να εκφρασθούν συναρτήσει της ελεύθερης μεταβλητής θ (γωνία στροφής). Υπενθυμίζεται ότι τα μήκη a και L θεωρούνται δεδομένα και σταθερά. Συνεπώς, η ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή του συστήματος είναι η γωνία θ (μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$).

Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, ισούται με:

$$L = T - U \tag{61}$$

Συνεπώς, από το συνδυασμό των Εξ.(56,56,60), προκύπτει:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^{\,2} = \frac{1}{2} m \left(a\dot{\theta}\right)^2 - \frac{1}{2} k \left(L\theta\right)^2 \tag{62}$$

Η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, για την ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή θ, είναι (βλ. Εκπαιδευτικές Ενότητες 01, 07):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{\theta}} \tag{63}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(58,59,60,62) στην Εξ.(63), προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2} m \left(a\dot{\theta}\right)^2 - \frac{1}{2} k \left(L\theta\right)^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2} m \left(a\dot{\theta}\right)^2 - \frac{1}{2} k \left(L\theta\right)^2\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\left(\frac{1}{2}\right) c \left(a\dot{\theta}\right)^2\right) = 0 \tag{64}$$

Εκτελώντας πράξεις στην Εξ.(64), καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\,a^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}kL^2\theta^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}m\,a^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}kL^2\theta^2\right)+\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)ca^2\dot{\theta}^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(m\,a^2\dot{\theta}\right)-\left(-kL^2\theta\right)+c\left(a^2\dot{\theta}\right)=0\Rightarrow m\,a^2\ddot{\theta}+kL^2\theta+ca^2\dot{\theta}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\theta=0 \tag{65}$$

Η Εξ.(65), συναρτήσει της μεταβλητής x_1, γράφεται ως εξής:

$$m\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\theta=0\xrightarrow{x_1=a\theta\Rightarrow\theta=\left(\frac{x_1}{a}\right)}m\left(\frac{\ddot{x}_1}{a}\right)+c\left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)+\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\left(\frac{x_1}{a}\right)=0\Rightarrow m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+\underbrace{\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)}_{k_{\iota\sigma}}x_1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+k_{\iota\sigma}x_1=0 \tag{66}$$

όπου $k_{\iota\sigma}$ είναι η ισοδύναμη σταθερά του ελατηρίου. Επίσης, η Εξ.(65), συναρτήσει της μεταβλητής x_2, γράφεται ως εξής:

$$m\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\theta=0\xrightarrow{x_2=L\theta\Rightarrow\theta=\left(\frac{x_2}{L}\right)}m\left(\frac{\ddot{x}_2}{L}\right)+c\left(\frac{\dot{x}_2}{L}\right)+\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\left(\frac{x_2}{L}\right)=0\Rightarrow m\ddot{x}_2+c\dot{x}_2+\underbrace{\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)}_{k_{\iota\sigma}}x_2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_2+c\dot{x}_2+k_{\iota\sigma}x_2=0 \tag{67}$$

Οι ίδιες εκφράσεις προκύπτουν εάν, αντί της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, χρησιμοποιηθεί η ισορροπία ροπών. Πιο συγκεκριμένα, για τη ***στατική*** ισορροπία του συστήματος και λαμβάνοντας τις ροπές ως προς τη θέση O, ισχύει:

$$\sum M=0\Rightarrow LF_{\varepsilon\lambda}+aF_{\alpha\pi}=0\Rightarrow Lkx_2+ac\dot{x}_1=0 \tag{68}$$

Διευκρινίζεται ότι για τη δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$ και αποσβεστήρα $F_{\alpha\pi}$, από το Σχήμα 2, προκύπτει ότι αυτές είναι της ίδιας διεύθυνσης και φοράς, καθώς και οι δύο αντιτίθενται στην εκτροπή της ράβδου από την οριζόντια θέση. Εισάγοντας την Εξ.(60) στην Εξ.(68), προκύπτει:

$$Lk\left(L\theta\right)+ac\left(a\dot{\theta}\right)=0\Rightarrow kL^2\theta+a^2c\dot{\theta}=0\Rightarrow a^2c\dot{\theta}+kL^2\theta=0 \tag{69}$$

Για τη ***δυναμική*** ισορροπία του συστήματος, σύμφωνα με την ***Αρχή D'Alembert***, στην Εξ.(60), δηλαδή στην εξίσωση της ***στατικής*** ισορροπίας του συστήματος, πρέπει να προστεθούν ένας δυναμικό όρος σχετικά με την περιστροφική κίνηση των στοιχείων του συστήαμτος και ένας δυναμικός όρος σχετικά με τη ροπή των δυνάμεων αδρανείας, οι οποίες εμφανίζονται στο σύστημα. Ειδικότερα:

- Για την περιστροφική κίνηση

Το μοναδικό στοιχείο αδρανείας του εξεταζομένου συστήματος είναι η μάζα m, η οποία, επειδή είναι σταθερά συνδεδεμένη στη ράβδο, εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση. Συνεπώς, στην Εξ.(69) δεν προστίθεται δυναμικός όρος σχετικά με περιστροφική κίνηση.

- Για τις ροπές των δυνάμεων αδρανείας

  Στη μάζα m, δηλαδή στο μοναδικό στοιχείο αδρανείας του εξεταζομένου συστήματος, ασκείται αδρανειακή δύναμη ίση με:

$$F_{\alpha\delta} = m\ddot{x}_1 \tag{70}$$

Για μικρές γωνίες θ, ισχύει $x_1 = a\theta$ (βλ. Σχήμα 2). Στην Εξ.(69) έχουν ληφθεί ροπές ως προς το σημείο O. Κατ' αντιστοιχία, υπολογίζεται η ροπή της αδρανειακής δύναμης ως προς το ίδιο σημείο, η οποία ισούται με:

$$T_m = aF_{\alpha\delta} = am\ddot{x}_1 = ama\ddot{\theta} = ma^2\ddot{\theta} \tag{71}$$

Ο δυναμικός όρος T_m της Εξ.(71) θα προστεθεί στην Εξ.(69). Το πρόσημο του όρου T_m προκύπτει άμεσα από το Σχήμα 2. Καθώς μετακινείται το άκρο A της ράβδου προς τα άνω, η μάζα m κινείται προς τα άνω, άρα η επιτάχυνση έχει φορά προς τα άνω. Σύμφωνα με την αρχή D'Alembert, η φορά της αδρανειακής δύναμης, η οποία θα χρησιμοποιηθεί, είναι αντίθετη από τη φορά της επιτάχυνση, άρα η δύναμη $F_{\alpha\delta}$ έχει φορά προς τα κάτω. Την ίδια φορά έχουν και οι δυνάμεις ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$ και αποσβεστήρα $F_{\alpha\pi}$, οι οποίες τείνουν να αναιρέσουν την κίνηση της ράβδου. Με βάση τα στοιχεία αυτά, η εξίσωση της ***δυναμικής*** ισορροπίας του σώματος είναι:

$$ma^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + kL^2\theta = 0 \Rightarrow m\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\left(\frac{L}{a}\right)^2\theta = 0 \tag{72}$$

Η Εξ.(72) είναι ίδια με την Εξ.(65), όπως, άλλωστε ήταν αναμενόμενο.

Σχετικά με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, από την Εξ.(66), προκύπτει:

$$\omega^2 = \left(\frac{k_{\iota\sigma}}{m}\right) \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\left(\frac{1}{m}\right) \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{kL^2}{ma^2}\right) \tag{73}$$

Επίσης, από τον ορισμό του λόγου απόσβεσης, ισχύει:

$$\zeta = \frac{c}{2\omega m} \tag{74}$$

Εισάγοντας την Εξ.(73) στην Εξ.(74), προκύπτει:

$$\zeta = \left(\frac{c}{2\omega m}\right) = \frac{c}{2\left(\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\cancel{\left(\frac{1}{m}\right)}\right)\cancel{m}} = \frac{c}{2\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2 c}{2kL^2} \Rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{c}{k}\right) \tag{75}$$

Η συχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης ισούται με (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 03):

$$\omega_n = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{76}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(73,75,76) δίδει:

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{kL^2}{a^2}\right)\left(\frac{1}{m}\right)}\sqrt{1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{c}{k}\right)\right)^2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\left(\frac{kL^2}{ma^2}\right)\left(1-\left(\frac{ca^2}{2kL^2}\right)^2\right)} \tag{77}$$

Για το Ερώτημα Β:

Από την Εξ.(65), προκύπτει ότι το εξεταζόμενο σύστημα είναι ένα μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα $m-c-k$. Για τέτοια συστήματα, η οριακή κατάσταση μεταξύ ταλάντωσης και μη-ταλάντωσης αντιστοιχεί στην κρίσιμη ταλάντωση, η οποία χαρακτηρίζεται από μοναδιαίο λόγο απόσβεσης (βλ Εκπαιδευτική Ενότητα 03). Συνεπώς, ισχύει:

$$\zeta = 1 \tag{78}$$

Από την Εξ.(75) και για μοναδιαίο λόγο απόσβεσης, προκύπτει:

$$\zeta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{c}{k}\right) \xrightarrow{\zeta=1} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{c}{k}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{L}\right)^2 = \left(\frac{2k}{c}\right) \Rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{2k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = a\sqrt{\left(\frac{c}{2k}\right)} \tag{79}$$

Συνεπώς, η κρίσιμη απόσβεση του εξεταζομένου συστήματος εμφανίζεται για μήκος ράβδου ίσο με $L = a\sqrt{\left(\frac{c}{2k}\right)}$.