ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΩΝ

Ι

Εκπαιδευτική Ενότητα 22η
Εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange σε μονοβάθμια και διβάθμια συστήματα m-k

Γενικά

Στην παρούσα Εκπαιδευτική Ενότητα θα παρουσιασθεί η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange σε πέντε τυπικές περιπτώσεις μονοβάθμιων συστημάτων $m-k$. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις, η παραμόρφωση των ελατηρίων και η κίνηση της μάζας λαμβάνει χώρα επί του ιδίου φορέα, στην τρίτη περίπτωση, η μάζα κινείται κάθετα στον φορέα των ελατηρίων, ενώ στην τελευταία περίπτωση η μάζα κινείται επί επιπέδου.

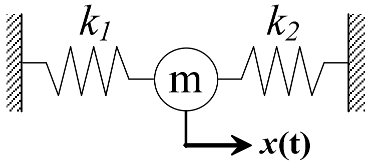
Εφαρμογή #1

Δίδεται το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 1, για το οποίο θεωρούνται γνωστές οι σταθερές k_1, k_2 των ελατηρίων και η μάζα m. Ζητούνται:

Α) Η εξίσωση κίνησης του συστήματος

Β) Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος

Γ) Η χρονική απόκριση του συστήματος για μηδενική αρχική ταχύτητα.



Σχήμα 1: Εξεταζόμενο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Λύση

Το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 1 διαθέτει δύο γραμμικά ελατήρια (με σταθερές ελατηρίου k_1 και k_2) τοποθετημένα επί του αυτού φορέα (οριζόντια). Η μάζα m κινείται επί του εν λόγω φορέα, δηλαδή και αυτή κινείται οριζόντια.

Για το Ερώτημα (Α)

Η εξίσωση κίνησης του συστήματος θα βρεθεί χρησιμοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, η μαθηματική έκφραση της οποίας είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 7/Εξ.(1)):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}}\right)=\left(\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\right) \tag{1}$$

όπου q είναι η ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας) του συστήματος, ως P_C συμβολίζεται η ισχύς του συστήματος, η οποία διαχέεται λόγω απόσβεσης, ως P_t συμβολίζεται η ισχύς που προσφέρεται στο σύστημα από τις εξωτερικές δυνάμεις, ενώ ως L συμβολίζεται η αποκαλούμενη ‘ενεργειακή μεταβλητή Lagrange’. Εξ ορισμού, ισχύει:

$$L = T - U \tag{2}$$

όπου ως T συμβολίζεται η κινητική ενέργεια του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα του συστήματος, ενώ ως U συμβολίζεται η δυναμική ενέργεια, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια του συστήματος. Στο εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα, εμφανίζεται μόνον μία ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας): η οριζόντια μετατόπιση x. Συνεπώς, η Εξ.(1) θα εφαρμοσθεί μόνον μία φορά και για $q = x$. Για την εφαρμογή της Εξ.(1) απαιτείται ο υπολογισμός των ποσοτήτων T, U, P_C, P_t και L. Με βάση τους αντίστοιχους ορισμούς (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01), προκύπτει ότι:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \tag{3}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια σταθεράς $k_1 = k$ και $k_2 = k$, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\Delta x\right)_{k_1}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta x\right)_{k_2}^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)x^2 \tag{4}$$

- Το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία διάχυσης ενέργειας (αποσβεστήρες), συνεπώς ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{5}$$

- Στο σύστημα δεν ασκείται εξωτερική δύναμη, συνεπώς ισχύει:

$$P_t = 0 \tag{6}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, από το συνδυασμό των Εξ.(1,3,4), προκύπτει ίση με:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}\right) m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)x^2 \tag{7}$$

Με βάση τα ανωτέρω, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\dot{x}\right) = m\ddot{x} \tag{9}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \left(k_1 + k_2\right)x \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{12}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(9,10,11,12) στην Εξ.(1), προκύπτει:

$$m\ddot{x} + \left(k_1 + k_2\right)x = 0 \tag{13}$$

Η Εξ.(13) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου συστήματος.

Για το ερώτημα (Β):

Σε ένα πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα, η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης βρίσκεται από την μικρότερη ιδιοτιμή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$\det\left(-\omega^2 \underline{M} + \underline{K}\right) = 0 \tag{14}$$

όπου $\underline{M}$ είναι το μητρώο μάζας και $\underline{K}$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος. Σε ένα μονοβάθμιο σύστημα, τα μητρώα $\underline{M}$ και $\underline{K}$ εκφυλίζονται σε πίνακες-στοιχεία και ισχύει:

$$\det\left(-\omega^2\left[m\right] + \left[k\right]\right) = 0 \Rightarrow -\omega^2 m + k = 0 \tag{15}$$

Επιλύοντας την Εξ.(15) ως προς ω, προκύπτει:

$$\omega^2 = \left(\frac{k}{m}\right) \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \xrightarrow{K:\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\,o\rho\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o} \omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \tag{16}$$

όπου ω είναι η ιδιοσυχνότητα του εξεταζομένου συστήματος. Διευκρινίζεται ότι στην Εξ.(16) έχει διατηρηθεί η θετική τιμή ω διότι το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι θετικά ορισμένο. Όπως προκύπτει από την Εξ.(13), το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου k ίση με:

$$k = \left(k_1 + k_2\right) \tag{17}$$

Από το συνδυασμό των Εξ.(15,16,17), προκύπτει ότι, τελικά, η ιδιοσυχνότητα του εξεταζομένου συστήματος ισούται με:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(k_1 + k_2\right)}{m}} \tag{18}$$

Για το ερώτημα (Γ):

Η χρονική απόκριση του συστήματος θα βρεθεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace για την επίλυση της Εξ.(13). Ειδικότερα, ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{m\ddot{x} + 2\left(k_1 + k_2\right)x\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{m\ddot{x}\right\} + \mathcal{L}\left\{\left(k_1 + k_2\right)x\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} \Rightarrow m\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\} + \left(k_1 + k_2\right)\mathcal{L}\left\{x\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(s^2 X - s x_o - \dot{x}_o\right) + \left(k_1 + k_2\right)X = 0 \tag{19}$$

Για τη διαμόρφωση της Εξ.(19) χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα της γραμμικότητας και η έκφραση της δευτέρας παραγώγου (βλ. Τυπολόγιο – Χρήσιμοι Μετασχηματισμοί Laplace). Σύμφωνα με την εκφώνηση, η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική, δηλαδή ισχύει:

$$\dot{x}_o = 0 \tag{20}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(18,19,20) δίδει:

$$m\left(s^2 X - s x_o\right) + \left(k_1 + k_2\right) X = 0 \Rightarrow \left(s^2 X - s x_o\right) + \frac{\left(k_1 + k_2\right)}{m} X = 0 \xrightarrow{\omega = \sqrt{\left(\frac{(k_1+k_2)}{m}\right)}}$$

$$\Rightarrow s^2 X - s x_o + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X\left(s^2 + \omega^2\right) = s x_o \Rightarrow X = x_o \left(\frac{s}{\left(s^2 + \omega^2\right)}\right) \tag{21}$$

Η Εξ.(21) είναι εκφρασμένη στο πεδίο συχνοτήτων. Για τον υπολογισμό της ζητούμενης χρονικής απόκρισης $x(t)$ από την Εξ.(21), απαιτείται η μετάβαση από το πεδίο συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, σύμφωνα με τον οποίο ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{X\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{x_o \left(\frac{s}{\left(s^2 + \omega^2\right)}\right)\right\} \Rightarrow x(t) = x_o \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{\left(s^2 + \omega^2\right)}\right)\right\} \tag{22}$$

Από τυπολόγιο (βλ. Τυπολόγιο – Χρήσιμοι Μετασχηματισμοί Laplace – έκφραση No. (4)), ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{\left(s^2 + \omega^2\right)}\right)\right\} = \cos\left(\omega t\right) \tag{23}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(18,22,23) δίδει:

$$x(t) = x_o \cos\left(\omega t\right) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(k_1 + k_2\right)}{m}}\right) t\right) \tag{24}$$

Η Εξ.(24) αποτελεί τη χρονική απόκριση του εξεταζομένου συστήματος.

Παρατήρηση

Εάν, επιπροσθέτως, τα δύο ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά, δηλαδή ισχύει $k_1 = k_2 = k$, τότε η ιδιοσυχνότητα του εξεταζομένου συστήματος καθίσταται ίση με $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, ενώ η χρονική απόκριση αυτού του συστήματος λαμβάνει τη μορφή $x(t) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\left(\frac{2k}{m}\right)}\right) t\right)$.

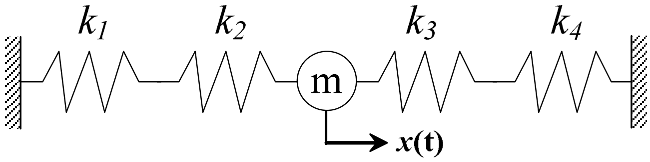
Εφαρμογή #2

Δίδεται το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 1, για το οποίο θεωρούνται γνωστές οι σταθερές k_1, k_2, k_3, k_4 των ελατηρίων και η μάζα m. Ζητούνται:

Α) Η εξίσωση κίνησης του συστήματος

Β) Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος

Γ) Η χρονική απόκριση του συστήματος για μηδενική αρχική ταχύτητα.



Σχήμα 2: Εξεταζόμενο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Λύση

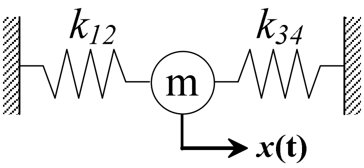
Το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 1 διαθέτει τέσσερα γραμμικά ελατήρια (με σταθερές ελατηρίου k_1, k_2, k_3, k_4) τοποθετημένα επί του αυτού φορέα (οριζόντια). Η μάζα m κινείται επί του εν λόγω φορέα, δηλαδή και αυτή κινείται οριζόντια. Επίσης, αναγνωρίζεται ότι τα ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Συνεπώς, σε αντικατάσταση των ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2, είναι δυνατόν να ορισθεί ένα ισοδύναμο ελατήριο με σταθερά:

$$k_{12} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \tag{25}$$

Ομοίως, τα ελατήρια με σταθερές k_3 και k_4 είναι συνδεδεμένα σε σειρά, οπότε και αυτά είναι δυνατόν να αντικατασταθούν με ένα ισοδύναμο ελατήριο σταθεράς ίσης με:

$$k_{34} = \left(\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} \right)^{-1} \tag{26}$$

Με βάση τις Εξ.(25,26), το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 2 είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με το ισοδύναμο δυναμικό σύστημα του Σχήματος 3.



Σχήμα 3: Ισοδύναμο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Ωστόσο, αναγνωρίζεται ότι το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 3 είναι όμοιο με αυτό της προηγούμενης Εφαρμογής (Εφαρμογή #1). Συνεπώς, ισχύει:

Προσαρμόζοντας κατάλληλα την Εξ.(13), η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι:

$$m\ddot{x} + \left(k_{12} + k_{34} \right) x = 0 \tag{27}$$

Προσαρμόζοντας κατάλληλα την Εξ.(18), η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος καθίσταται ίση προς:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(k_{12} + k_{34}\right)}{m}} \tag{28}$$

Τέλος, προσαρμόζοντας κατάλληλα την Εξ.(24), η χρονική απόκριση του συστήματος, για μηδενική αρχική ταχύτητα, καθίσταται ίση με:

$$x\left(t\right) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(k_{12} + k_{34}\right)}{m}}\right)t\right) \tag{29}$$

Παρατήρηση

Εάν, επιπροσθέτως, τα τέσσερα ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά, δηλαδή ισχύει $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, τότε οι ισοδύναμες σταθερές k_{12} και k_{34} καθίστανται ίσες με:

$$k_{12} = k_{34} = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{k}\right)^{-1} = \left(\frac{k}{2}\right) \tag{30}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Εξίσωση κίνησης συστήματος:

$$m\ddot{x} + \left(k_{12} + k_{34}\right)x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2}\right)x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \tag{31}$$

- Ιδιοσυχνότητα συστήματος:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(k_{12} + k_{34}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{\left(k/2 + k/2\right)}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{32}$$

- Χρονική απόκριση του συστήματος:

$$x\left(t\right) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(k_{12} + k_{34}\right)}{m}}\right)t\right) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(k/2 + k/2\right)}{m}}\right)t\right) \Rightarrow x\left(t\right) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right) \tag{33}$$

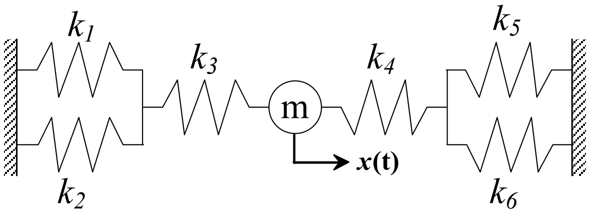
Εφαρμογή #3

Δίδεται το μονοβάθμιο σύστημα $m - k$ του Σχήματος 4, για το οποίο θεωρούνται γνωστές οι σταθερές k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 των ελατηρίων και η μάζα m. Ζητούνται:

Α) Η εξίσωση κίνησης του συστήματος

Β) Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος

Γ) Η χρονική απόκριση του συστήματος για μηδενική αρχική ταχύτητα.



Σχήμα 4: Εξεταζόμενο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 4 διαθέτει έξι γραμμικά ελατήρια, με σταθερές ελατηρίου k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 και k_6, αντίστοιχα, ενώ η μάζα m κινείται οριζόντια. Επίσης, αναγνωρίζεται η ακόλουθη συνδεσμολογία ελατηρίων:

- Τα ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα, άρα είναι δυνατή η αντικατάστασή τους από ένα ισοδύναμο ελατήριο με σταθερά:

$$k_{12} = k_1 + k_2 \tag{34}$$

- Τα ελατήρια με σταθερές k_{12} και k_3 είναι συνδεδεμένα σε σειρά, άρα είναι δυνατή η αντικατάστασή τους από ένα ισοδύναμο ελατήριο με σταθερά:

$$k_{123} = \left(\frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \tag{35}$$

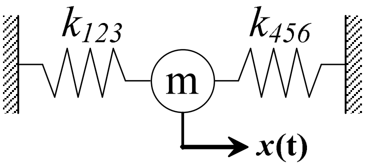
- Τα ελατήρια με σταθερές k_5 και k_6 είναι συνδεδεμένα παράλληλα, άρα είναι δυνατή η αντικατάστασή τους από ένα ισοδύναμο ελατήριο με σταθερά:

$$k_{56} = k_5 + k_6 \tag{36}$$

- Τα ελατήρια με σταθερές k_{56} και k_4 είναι συνδεδεμένα σε σειρά, άρα είναι δυνατή η αντικατάστασή τους από ένα ισοδύναμο ελατήριο με σταθερά:

$$k_{456} = \left(\frac{1}{k_{45}} + \frac{1}{k_6} \right)^{-1} \tag{37}$$

Με βάση τις Εξ.(34,35,36,37), το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 4 είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με το ισοδύναμο δυναμικό σύστημα του Σχήματος 5.



Σχήμα 5: Ισοδύναμο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Ωστόσο, αναγνωρίζεται ότι το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 5 είναι όμοιο με αυτό της Εφαρμογής #1 (βλ. ανωτέρω). Συνεπώς, προσαρμόζοντας κατάλληλα τις Εξ.(13,18,24), προκύπτουν τα ζητούμενα μεγέθη. Ειδικότερα:
Η εξίσωση κίνησης του συστήματος, με κατάλληλη προσαρμογή της Εξ.(13), είναι:

$$m\ddot{x} + \left(k_{123} + k_{456}\right)x = 0 \tag{38}$$

Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος, με κατάλληλη προσαρμογή της Εξ.(18), είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(k_{123} + k_{456}\right)}{m}} \tag{39}$$

Τέλος, η χρονική απόκριση του συστήματος, για μηδενική αρχική ταχύτητα και κατάλληλη προσαρμογή της Εξ.(24), είναι:

$$x(t) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(k_{123} + k_{456}\right)}{m}}\right)t\right) \tag{40}$$

Παρατήρηση

Εάν, επιπροσθέτως, τα έξι ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά, δηλαδή ισχύει $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k$, τότε η ισοδύναμη σταθερά k_{123} καθίσταται ίση με:

$$k_{123} = \left(\frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{k + k} + \frac{1}{k}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{k}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2k} + \frac{2}{2k}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2k}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{123} = \left(\frac{2k}{3}\right) \tag{41}$$

Κατ' αντιστοιχία, ισχύει:

$$\Rightarrow k_{456} = \left(\frac{2k}{3}\right) \tag{42}$$

Συνεπώς, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Εξίσωση κίνησης συστήματος:

$$m\ddot{x} + \left(k_{123} + k_{456}\right)x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \left(\frac{2k}{3} + \frac{2k}{3}\right)x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \left(\frac{4}{3}\right)k\,x = 0 \tag{43}$$

- Ιδιοσυχνότητα συστήματος:

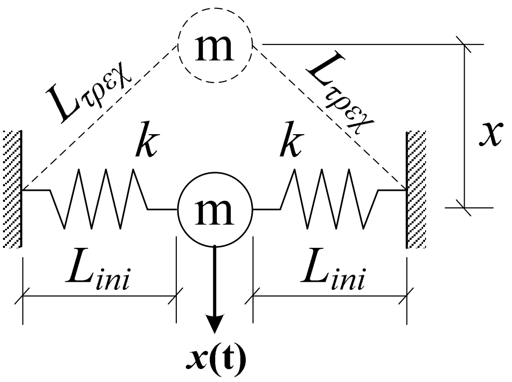
$$\omega = \sqrt{\frac{\left(k_{123} + k_{445}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{\left(2k/3 + 2k/3\right)}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4k}{3m}} \tag{44}$$

- Χρονική απόκριση του συστήματος:

$$x(t) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(k_{123} + k_{456}\right)}{m}}\right)t\right) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{\left(2k/3 + 2k/3\right)}{m}}\right)t\right) \Rightarrow x(t) = x_o \cos\left(\left(\sqrt{\frac{4k}{3m}}\right)t\right) \tag{45}$$

Εφαρμογή #4

Δίδεται το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 6, για το οποίο θεωρούνται γνωστές η σταθερά k των ελατηρίων και η μάζα m. Επίσης, έστω ότι αμφότερα τα ελατήρια έχουν αρχικό μήκος L_{ini}. Η μάζα m εκτρέπεται κατά x_o από τη θέση ισορροπίας της και κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Ζητείται η εξίσωση κίνησης του συστήματος (να αμεληθεί η επίδραση της βαρύτητας).



Σχήμα 6: Εξεταζόμενο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Λύση

Το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 6 διαθέτει δύο ίδια γραμμικά ελατήρια (με σταθερά ελατηρίου k και αρχικού μήκους L_{ini}) τοποθετημένα επί του αυτού φορέα (οριζόντια). Επίσης, δίδεται ότι η μάζα m εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας της κατά x_o και κατά την κατακόρυφη διεύθυνση (δηλαδή κάθετα ως προς τον προαναφερθέντα φορέα). Παρατηρούμε ότι η διάταξη του Σχήματος 6 εμφανίζει γεωμετρική συμμετρία ως προς το κατακόρυφο επίπεδο (τα ελατήρια είναι του ιδίου αρχικού μήκους), τα ελατήρια είναι της ίδιας σταθεράς k (συμμετρική δυσκαμψία του συστήματος ως προς το κατακόρυφο επίπεδο) και η αρχική εκτροπή x_o επιβάλλεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Ως αποτέλεσμα του συνδυασμού αυτών των τριών δεδομένων, η μάζα θα εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση (στο Σχήμα 6, με διακεκομμένη γραμμή, απεικονίζεται μία τυχαία θέση της μάζας m). Η εξίσωση κίνησης του συστήματος θα βρεθεί χρησιμοποιώντας την Ενεργειακή Αρχή Lagrange, η μαθηματική έκφραση της οποίας είναι (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 7/Εξ.(1)):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}}\right)=\left(\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\right) \tag{46}$$

Τα σύμβολα q, P_C, P_t καθώς και η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L ερμηνεύονται στην Εφαρμογή #1 της παρούσης Εκπαιδευτικής Ενότητας.

Στο εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα, εμφανίζεται μόνον μία ανεξάρτητη κινηματική μεταβλητή (Βαθμός Ελευθερίας): η ***κατακόρυφη*** μετατόπιση x. Συνεπώς, η Εξ.(46) θα εφαρμοσθεί μόνον μία φορά και για $q=x$. Κατά τα γνωστά, για την εφαρμογή της Εξ.(46) απαιτείται ο υπολογισμός των ποσοτήτων T, U, P_C, P_t και L. Με βάση τους αντίστοιχους ορισμούς (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 01), προκύπτει ότι:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 \tag{47}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια σταθεράς k, ισούται με (αμελώντας την επίδραση της βαρύτητας):

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\Delta l\right)_{k_1}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta l\right)_{k_2}^2 = \frac{1}{2} k \left(\Delta l\right)_{k_1}^2 + \frac{1}{2} k \left(\Delta l\right)_{k_2}^2 \Rightarrow U = \frac{k}{2}\left(\left(\Delta l\right)_{k_1}^2 + \left(\Delta l\right)_{k_2}^2\right) \tag{48}$$

Για τον υπολογισμό της δυναμικής δυναμική ενέργεια U απαιτείται ο υπολογισμός των μεταβολών μήκους $\left(\Delta l\right)_{k_1}$ και $\left(\Delta l\right)_{k_2}$ των ελατηρίων. Εξ ορισμού, η μεταβολή μήκους ενός ελατηρίου ισούται με το τρέχον μήκος του $L_{\tau\rho\varepsilon\chi}$ μείον το αρχικό μήκος του L_{ini}, δηλαδή ισχύει:

$$\Delta l = L_{\tau\rho\varepsilon\chi} - L_{ini} \tag{49}$$

Όπως αιτιολογήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η μάζα θα κινηθεί κατακόρυφα. Αυτή η κίνηση, σε συνδυασμό με τη συμμετρία δυσκαμψίας της κατασκευής ως προς το κατακόρυφο επίπεδο, έχει ως αποτέλεσμα την ίση παραμόρφωση των δύο ελατηρίων του συστήματος, άρα ισχύει:

$$\Delta l_{k_1} = \Delta l_{k_2} = L_{\tau\rho\varepsilon\chi} - L_{ini} \Rightarrow \Delta l_{k_1} = \Delta l_{k_2} = \left(L_{\tau\rho\varepsilon\chi} - L_{ini}\right) = \left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right) \tag{50}$$

Με βάση την Εξ.(50), ισχύει η ακόλουθη παραγώγιση ως προς την ελεύθερη κινηματική μεταβλητή x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_{k_1}^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2 = 2\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_{k_1}^2\right) = 2\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(L_{ini}^2 + x^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_{k_1}^2\right) = 2\frac{\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)}{\sqrt{L_{ini}^2 + x^2}} x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_{k_1}^2\right) = 2\left(1 - \frac{L_{ini}}{\sqrt{L_{ini}^2 + x^2}}\right) x \tag{51}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(48,49,50) δίδει:

$$U = \frac{k}{2}\left(\left(\Delta l\right)_{k_1}^2 + \left(\Delta l\right)_{k_2}^2\right) = \left(\frac{k}{2}\right)\left(\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2 + \left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = k\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2 \tag{52}$$

- Το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία διάχυσης ενέργειας (αποσβεστήρες), συνεπώς ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{53}$$

- Στο σύστημα δεν ασκείται εξωτερική δύναμη, συνεπώς ισχύει:

$$P_t = 0 \tag{54}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, από το συνδυασμό των Εξ.(47,48,52), προκύπτει ίση με:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2}\right) m\,\dot{x}^2 - k\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2 \tag{55}$$

Με βάση τα ανωτέρω, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\dot{x}\right) = m\,\ddot{x} \tag{57}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(T - U\right)\right) = -\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = k\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\sqrt{L_{ini}^2 + x^2} - L_{ini}\right)^2\right) \tag{58}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(51,58) δίδει:

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 2k\left(1 - \frac{L_{ini}}{\sqrt{L_{ini}^2 + x^2}}\right)x \tag{59}$$

Επίσης, ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{60}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{61}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(57,59,60,61) στην Εξ.(46), προκύπτει:

$$m\,\ddot{x} + 2k\left(1 - \frac{L_{ini}}{\sqrt{L_{ini}^2 + x^2}}\right)x = 0 \tag{62}$$

Η Εξ.(62) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου συστήματος. Ισοδύναμα, η Εξ.(62) γράφεται και ως εξής:

$$\underbrace{m\,\ddot{x} + 2kx}_{\text{γραμμικός όρος}} \underbrace{- 2k\,\frac{L_{ini}}{\sqrt{L_{ini}^2 + x^2}}\,x}_{\text{μη-γραμμικός όρος}} = 0 \tag{63}$$

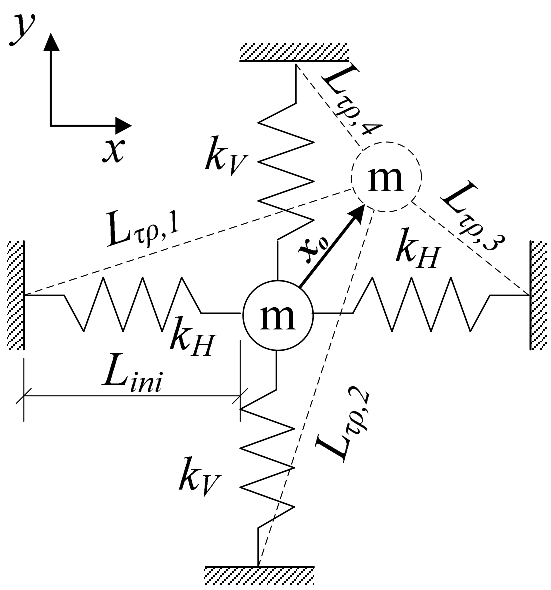
Καθίσταται φανερό ότι η Εξ.(63) διαθέτει έναν γραμμικό όρο αλλά και έναν μη-γραμμικό όρο. Συνεπώς, η Εξ.(63) είναι μία μη-γραμμική διαφορική εξίσωση, περιγράφει ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα και η αντιμετώπισή της εμπίπτει στο πεδίο της μη-γραμμικής δυναμικής ανάλυσης (αντικείμενο το οποίο εκφεύγει από τους σκοπούς του μαθήματος 'Δυναμική Μηχανών Ι').

Εφαρμογή #5

Δίδεται το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 7, για το οποίο θεωρούνται γνωστές οι σταθερές των ελατηρίων k_V, k_H καθώς και η μάζα m. Επίσης, έστω ότι όλα τα ελατήρια έχουν αρχικό μήκος L_{ini}. Η μάζα m εκτρέπεται κατά x_o από τη θέση ισορροπίας της και κατά τυχαία διεύθυνση εντός του $xy-$επιπέδου. Ζητείται η εξίσωση κίνησης του συστήματος, αμελώντας την επίδραση της βαρύτητας, όταν:

(Α) θεωρείται ότι η εκτροπή x_o είναι πολύ μικρή και

(Β) θεωρείται ότι η εκτροπή x_o δεν είναι πολύ μικρή.



Σχήμα 7: Εξεταζόμενο μονοβάθμιο σύστημα $m-k$

Λύση

Το μονοβάθμιο σύστημα $m-k$ του Σχήματος 7 διαθέτει τέσσερα γραμμικά ελατήρια, ίδιου αρχικού μήκος L_{ini} (στο Σχήμα 7, για λόγους ευκρίνειας, απεικονίζεται το αρχικό μήκος μόνον ενός ελατηρίου). Τα οριζόντια ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά ελατηρίου k_H, ενώ τα κατακόρυφα ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά ελατηρίου k_V. Αρχικά, η μάζα εκτρέπεται κατά $\vec{x}_o = (x_o, y_o)$ (τυχαίο διάνυσμα επί του $xy-$επιπέδου). Για την εύρεση της εξίσωση κίνησης του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος, θα χρησιμοποιηθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange.

Για το Ερώτημα (Α)

Η έκφραση '*θεωρείται ότι η εκτροπή* $\vec{x}_o$ *είναι πολύ μικρή*' σημαίνει ότι η παραμόρφωση κάθε ελατηρίου είναι δυνατόν να θεωρηθεί (παραδοχή) ότι λαμβάνει χώρα μόνον κατά την αρχική διεύθυνση του φορέα του. Υπό αυτήν την παραδοχή, για την παραμόρφωση των οριζοντίων ελατηρίων λαμβάνεται υπόψη μόνον η x-μετατόπισης της μάζας, ενώ για την παραμόρφωση των κατακορύφων ελατηρίων λαμβάνεται υπόψη μόνον η y-μετατόπισης της μάζας. Συνεπώς, υπό την ανωτέρω παραδοχή, η Ενεργειακή Αρχής Lagrange εφαρμόζεται ως εξής:

- Κατά τα γνωστά (βλ. Εκπαιδευτική Ενότητα 7/Εξ.(1)), η μαθηματική έκφραση της Ενεργειακής Αρχής Lagrange είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}}\right)=\left(\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}}\right) \tag{64}$$

  Τα σύμβολα q, P_C, P_t καθώς και η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L ερμηνεύονται στην Εφαρμογή #1 της παρούσης Εκπαιδευτικής Ενότητας. Για το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα, οι ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας) είναι δύο: η οριζόντια μετατόπιση ($x-$μετατόπιση) της μάζας και η κατακόρυφη μετατόπιση ($y-$μετατόπιση) της μάζας. Συνεπώς, η Εξ.(64) πρέπει να εφαρμοσθεί μία φορά για $q = x$ και μία φορά για $q = y$.

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m ισούται με:

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\upsilon_x^2+\frac{1}{2}m\upsilon_y^2 \Rightarrow T=\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\,\dot{y}^2 \tag{65}$$

  Διευκρινίζεται ότι η μάζα είναι δυνατόν να κινείται στο $xy-$επίπεδο, συνεπώς η ταχύτητά της εμφανίζει δύο συνιστώσες: την οριζόντια συνιστώσα υ_x και την κατακόρυφη συνιστώσα υ_y.

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια σταθεράς k_H και k_V, ισούται με:

$$U=\underbrace{\frac{1}{2}k_H\left(\Delta x\right)_{k_H}^2+\frac{1}{2}k_H\left(\Delta x\right)_{k_H}^2}_{\delta\acute{\upsilon}o\ o\rho\iota\zeta\acute{o}\nu\tau\iota\alpha\ \varepsilon\lambda\alpha\tau\acute{\eta}\rho\iota\alpha}+\underbrace{\frac{1}{2}k_V\left(\Delta x\right)_{k_V}^2+\frac{1}{2}k_V\left(\Delta x\right)_{k_V}^2}_{\delta\acute{\upsilon}o\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa\acute{o}\rho\upsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\lambda\alpha\tau\acute{\eta}\rho\iota\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U=k_H\left(\Delta x\right)_{k_H}^2+k_V\left(\Delta x\right)_{k_V}^2 \tag{66}$$

  Βάσει της παραδοχής περί πολύ μικρής εκτροπής, όπως αναπτύχθηκε στην αρχή της παραγράφου, ισχύει:

$$\left(\Delta x\right)_{k_H}=x \quad \text{και} \quad \left(\Delta x\right)_{k_V}=y \tag{67}$$

  Ο συνδυασμός των Εξ.(66,67) δίδει:

$$U=k_H\,x^2+k_V\,y^2 \tag{68}$$

- Το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία διάχυσης ενέργειας (αποσβεστήρες), συνεπώς ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{69}$$

- Στο σύστημα δεν ασκείται εξωτερική δύναμη, συνεπώς ισχύει:

$$P_t = 0 \tag{70}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, από το συνδυασμό των Εξ.(65,68), προκύπτει ίση με:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\,\dot{y}^2 \right) - \left(k_H\, x^2 + k_V\, y^2 \right) \tag{71}$$

Με βάση τα ανωτέρω, η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για $q = x$ δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} \tag{72}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\dot{x} \right) = m\,\ddot{x} \tag{73}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 2k_H\, x \tag{74}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{75}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{76}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(72,74,75,76) στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$m\,\ddot{x} + 2k_H\, x = 0 \tag{77}$$

Επίσης, η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για $q = y$ δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\,\dot{y} \tag{78}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\dot{y} \right) = m\,\ddot{y} \tag{79}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) = 2k_V\, y \tag{80}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_C}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{81}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{82}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(79,80,81,82) στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$m\,\ddot{y} + 2k_V\,y = 0 \tag{83}$$

Οι Εξ.(77,83) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του εξεταζομένου συστήματος, υπό την παραδοχή της πολύ μικρής αρχικής εκτροπής $\vec{x}_o$. Σε μητρωϊκή μορφή, το ανωτέρω σύστημα των εξισώσεων γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_H & 0 \\ 0 & 2k_V \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

Για το Ερώτημα (Β)

Η έκφραση '*θεωρείται ότι η εκτροπή $\vec{x}_o$ δεν είναι πολύ μικρή*' σημαίνει ότι για την παραμόρφωση κάθε ελατηρίου λαμβάνεται υπόψη και η οριζόντια κίνηση αλλά και η κατακόρυφη κίνηση της μάζας m. Συνεπώς, η μεταβολή του μήκους ***κάθε ελατηρίου*** πρέπει να αντιμετωπισθεί με τον τρόπο που περιγράφηκε στην Εφαρμογή #4 της παρούσης Εκπαιδευτικής Ενότητας, δηλαδή:

$$\Delta l_i = L_{\tau\rho,i} - L_{ini} \tag{85}$$

όπου ως Δl_i συμβολίζεται η μεταβολή του μήκους του $i-$ελατηρίου, ως $L_{\tau\rho,i}$ συμβολίζεται το τρέχον μήκος του $i-$ελατηρίου, ενώ ως L_{ini} συμβολίζεται το αρχικό μήκος του $i-$ελατηρίου (σύμφωνα με την εκφώνηση, θεωρείται ότι όλα τα ελατήρια έχουν το ίδιο αρχικό μήκος L_{ini}). Το τρέχον μήκος $L_{\tau\rho,i}$ του $i-$ελατηρίου υπολογίζεται βάσει του Πυθαγορείου θεωρήματος. Σύμφωνα με το Σχήμα 7, ισχύει:

- Για το ελατήριο #1:

$$\Delta l_1 = L_{\tau\rho,1} - L_{ini} = \sqrt{\left(L_{ini} + x\right)^2 + y^2} - L_{ini} \tag{86}$$

- Για το ελατήριο #2:

$$\Delta l_2 = L_{\tau\rho,2} - L_{ini} = \sqrt{x^2 + \left(L_{ini} + y\right)^2} - L_{ini} \tag{87}$$

- Για το ελατήριο #3:

$$\Delta l_3 = L_{\tau\rho,3} - L_{ini} = \sqrt{\left(L_{ini} - x\right)^2 + y^2} - L_{ini} \tag{88}$$

- Για το ελατήριο #4:

$$\Delta l_4 = L_{\tau\rho,4} - L_{ini} = \sqrt{x^2 + \left(L_{ini} - y\right)^2} - L_{ini} \tag{89}$$

Η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange, κατά τα γνωστά, δίδει:

- Η κινητική ενέργεια T του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m ισούται με:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_x^2 + \frac{1}{2} m\upsilon_y^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\,\dot{y}^2 \tag{90}$$

- Η δυναμική ενέργεια U του συστήματος, η οποία συσσωρεύεται στα ελατήρια σταθεράς k_H και k_V, ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} k_H \left(\Delta l_1\right)^2 + \frac{1}{2} k_V \left(\Delta l_2\right)^2 + \frac{1}{2} k_H \left(\Delta l_3\right)^2 + \frac{1}{2} k_V \left(\Delta l_4\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} k_H \left(\left(\Delta l_1\right)^2 + \left(\Delta l_3\right)^2 \right) + \frac{1}{2} k_V \left(\left(\Delta l_2\right)^2 + \left(\Delta l_4\right)^2 \right) \tag{91}$$

- Το σύστημα δεν διαθέτει στοιχεία διάχυσης ενέργειας (αποσβεστήρες), συνεπώς ισχύει:

$$P_C = 0 \tag{92}$$

- Στο σύστημα δεν ασκείται εξωτερική δύναμη, συνεπώς ισχύει:

$$P_t = 0 \tag{93}$$

- Η ενεργειακή μεταβλητή Lagrange L του συστήματος, από το συνδυασμό των Εξ.(90,91), προκύπτει ίση με:

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\,\dot{y}^2 \right) - \left(\frac{1}{2} k_H \left(\left(\Delta l_1\right)^2 + \left(\Delta l_3\right)^2 \right) + \frac{1}{2} k_V \left(\left(\Delta l_2\right)^2 + \left(\Delta l_4\right)^2 \right) \right) \tag{94}$$

Δεδομένου ότι το εξεταζόμενο δυναμικό σύστημα έχει δύο ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές (Βαθμοί Ελευθερίας), θα εφαρμοσθεί η Ενεργειακή Αρχή Lagrange δύο φορές, δηλαδή για $q = x$ και $q = y$.

Εφαρμογή Ενεργειακής Αρχής Lagrange για $q = x$

Η πρώτη παράγωγος της μεταβλητής Lagrange L ως προς την ελεύθερη μεταβλητή $q = x$ ισούται με:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} k_H \left(\left(\Delta l_1\right)^2 + \left(\Delta l_3\right)^2 \right) + \frac{1}{2} k_V \left(\left(\Delta l_2\right)^2 + \left(\Delta l_4\right)^2 \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -\left(\frac{1}{2}\right) k_H \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\Delta l_1\right)^2 + \left(\Delta l_3\right)^2 \right) - \left(\frac{1}{2}\right) k_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\Delta l_2\right)^2 + \left(\Delta l_4\right)^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -\left(\frac{1}{2}\right) k_H \left(2\left(\Delta l_1\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_1\right) + 2\left(\Delta l_3\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_3\right) \right) - \left(\frac{1}{2}\right) k_V \left(2\left(\Delta l_2\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_2\right) + 2\left(\Delta l_4\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_4\right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -k_H \left(\left(\Delta l_1\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_1\right) + \left(\Delta l_3\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_3\right) \right) - k_V \left(\left(\Delta l_2\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_2\right) + \left(\Delta l_4\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_4\right) \right) \tag{95}$$

Στην Εξ.(95), οι επί μέρους μερικές παράγωγοι ισούνται με:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_1\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2\left(L_{ini}+x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_1\right)=\frac{L_{ini}+x}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}} \tag{96}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_2\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}} \tag{97}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_3\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2\left(L_{ini}-x\right)\left(-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_3\right)=\frac{-\left(L_{ini}-x\right)}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}} \tag{98}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_4\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_4\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}} \tag{99}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(95,96,97,98,99) δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-k_H\left(\left(\frac{\left(L_{ini}+x\right)\left(\sqrt{\left(L_{ini}^2+x^2\right)+y^2}-L_{ini}\right)}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)+\left(\frac{-\left(L_{ini}-x\right)\left(\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right)$$
$$-k_V\left(\frac{x\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}-L_{ini}\right)}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}+\frac{x\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}-L_{ini}\right)}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial x}=-k_H\left(\left(L_{ini}+x\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)-\left(L_{ini}-x\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right)$$
$$-k_V\left(x\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)+x\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right)\Rightarrow \tag{100}$$

Με βάση τα ανωτέρω, η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για $q=x$ δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} \tag{101}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\dot{x}\right) = m\,\ddot{x} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = k_H &\left(\left(L_{ini}+x\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)-\left(L_{ini}-x\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right) \\ +k_V &\left(x\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)+x\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right) \end{aligned} \tag{103}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{104}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{105}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(102,103,104,105) στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}+k_H &\left(\left(L_{ini}+x\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)-\left(L_{ini}-x\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right) \\ +k_V &\left(x\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)+x\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right)=0 \end{aligned} \tag{106}$$

Εφαρμογή Ενεργειακής Αρχής Lagrange για $q = y$

Η πρώτη παράγωγος της μεταβλητής Lagrange L ως προς την ελεύθερη μεταβλητή $q = y$ ισούται με:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}k_H\left(\left(\Delta l_1\right)^2+\left(\Delta l_3\right)^2\right)+\frac{1}{2}k_V\left(\left(\Delta l_2\right)^2+\left(\Delta l_4\right)^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = -\left(\frac{1}{2}\right)k_H\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\Delta l_1\right)^2+\left(\Delta l_3\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)k_V\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\Delta l_2\right)^2+\left(\Delta l_4\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = -\left(\frac{1}{2}\right)k_H\left(2\left(\Delta l_1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_1\right)+2\left(\Delta l_3\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_3\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\right)k_V\left(2\left(\Delta l_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_2\right)+2\left(\Delta l_4\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_4\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = -k_H\left(\left(\Delta l_1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_1\right)+\left(\Delta l_3\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_3\right)\right)-k_V\left(\left(\Delta l_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_2\right)+\left(\Delta l_4\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_4\right)\right) \tag{107}$$

Στην Εξ.(101), οι επί μέρους μερικές παράγωγοι ισούνται με:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_1\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_1\right)=\frac{y}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}} \tag{108}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_2\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2\left(L_{ini}+y\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_2\right)=\frac{\left(L_{ini}+y\right)}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}} \tag{109}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_3\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta l_3\right)=\frac{y}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}} \tag{110}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_4\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}-L_{ini}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-L_{ini}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}2\left(L_{ini}-y\right)\left(-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta l_4\right)=\frac{-\left(L_{ini}-y\right)}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}} \tag{111}$$

Ο συνδυασμός των Εξ.(107,108,109,110,111) δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial y}=-k_H\left(\left(\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)+\left(\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}-L_{ini}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right)$$
$$-k_V\left(\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}-L_{ini}\right)\left(\frac{\left(L_{ini}+y\right)}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)+\left(\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}-L_{ini}\right)\left(\frac{-\left(L_{ini}-y\right)}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y}=&-k_H\left(y\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)+y\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right)\\&-k_V\left(\left(L_{ini}+y\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)-\left(L_{ini}-y\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right)\Rightarrow\end{aligned} \tag{112}$$

Με βάση τα ανωτέρω, η εφαρμογή της Ενεργειακής Αρχής Lagrange για $q=y$ δίδει:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\,\dot{y} \tag{113}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\dot{y}\right) = m\,\ddot{y} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = &-k_H\left(y\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)+y\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right)\\ &-k_V\left(\left(L_{ini}+y\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)-\left(L_{ini}-y\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right)\end{aligned} \tag{115}$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_C}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{116}$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{117}$$

Εισάγοντας τις Εξ.(114,115,116,117) στην Εξ.(64), προκύπτει:

$$\begin{aligned}m\,\ddot{y} &+ k_H\left(y\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}+x\right)^2+y^2}}\right)+y\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{\left(L_{ini}-x\right)^2+y^2}}\right)\right)\\ &+k_V\left(\left(L_{ini}+y\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}+y\right)^2}}\right)-\left(L_{ini}-y\right)\left(1-\frac{L_{ini}}{\sqrt{x^2+\left(L_{ini}-y\right)^2}}\right)\right)=0\end{aligned} \tag{118}$$

Οι Εξ.(106,118) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του εξεταζομένου δυναμικού συστήματος, οι οποίες, προφανώς, είναι μη-γραμμικές.
