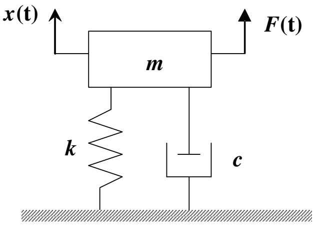
## ΣΥΜΒΟΛΑ

$\omega$ :Φυσική ιδιοσυχνότητα $\omega_n$ :Ιδιοσυχνότητα αποσβενόμενης ταλάντωσης $\Omega$ :Συχνότητα διεγέρτη

## ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $m-c-k$ ΕΝΟΣ ΒΑΘΜΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ (1 Β.Ε.)




$x(t)$: απόκριση συστήματος (μετατόπιση)

$F(t)$: εξωτερική διέγερση συστήματος (δύναμη)

$F(t)=F_o\cos(\Omega t)$: αρμονική διέγερση, πλάτος ταλάντωσης $F_o$ και συχνότητα διέγερσης $\Omega$

$F_o=0 \Rightarrow F(t)=0$: ελεύθερη ταλάντωση

| Όρος | φυσική ιδιοσυχνότητα $[rad/s]$ | λόγος απόσβεσης | ιδιοσυχνότητα $[Hz]$ | ιδιοπερίοδος |
|---|---|---|---|---|
| Ορισμός | $\omega=\sqrt{(k/m)}$ | $\zeta=(c/(2\omega m))$ | $\mathrm{f}=(\omega/(2\pi))$ | $T=(1/f)$ |

### ***Περίπτωση 1<sup></sup>η: $F(t)=0$ (Ελεύθερη ταλάντωση ή Απόκριση συστήματος ΧΩΡΙΣ διέγερση)***

| Συνθήκη | Απόσβεση | Απόκριση $x(t)$ |
|---|---|---|
| $\zeta>1$ | *υπερκρίσιμη* | $x(t)=x_h(t)=\left(\dfrac{1}{s_1-s_2}\right)\left[x_o\left(-s_2e^{s_1t}+s_1e^{s_2t}\right)+v_o\left(e^{s_1t}-e^{s_2t}\right)\right]$ |
| $\zeta=1$ | *κρίσιμη* | $x(t)=\left(x_o+\left(v_o+\omega x_o\right)t\right)e^{-\omega t}$ |
| $1>\zeta>0$ | *Υποκρίσιμη* | $x(t)=x_h(t)=e^{-\zeta\omega t}\left[x_o\cos(\omega_n t)+\left(\dfrac{v_o+\zeta\omega_n x_o}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\right],\ \omega_n=\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}$ <br> *(για $\zeta\to 0$: $\omega_n\approx\omega$ ), μέτρο απόσβεσης:* $Z=\ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+T)}\right)=\dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}$ |
| $(\zeta=0)$ | *μηδενική (χωρίς απόσβεση)* | $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{x_o^2+\dfrac{v_o^2}{\omega^2}}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega x_o}{v_o}\right)\right)$ |

***Αρχικές συνθήκες:*** $x_o$*: αρχική μετατόπιση* $v_o$*:αρχική ταχύτητα*

### ***Περίπτωση 2η: $F(t)=F_o\cos(\Omega t)$ (Απόκριση συστήματος σε αρμονική διέγερση)***

#### ***Περίπτωση 2.Α: $c=0$ (Μηδενική απόσβεση)***

$x(t)=x_h(t)+x_p(t)$, $x(t)$:γενική λύση $x_h(t)$:ομογενής λύση, $x_p(t)$:μερική λύση, $f_o=\left(\dfrac{F_o}{m}\right)$

***Περίπτωση 2.Α.1: $\omega\neq\Omega$ (διέγερση με συχνότητα διαφορετική της ιδιοσυχνότητας του συστήματος)***

$$x_h(t)=\left(\frac{v_o}{\omega}\right)\sin(\omega t)+\left(x_o-\frac{f_o}{\omega^2-\Omega^2}\right)\cos(\omega t) \qquad x_p(t)=\left(\frac{f_o}{\omega^2-\Omega^2}\right)\cos(\Omega t)$$

***Περίπτωση 2.Α.2: $\omega=\Omega$ (διέγερση με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος)***

$$x_h(t)=\left(\frac{v_o}{\omega}\right)\sin(\omega t)+x_o\cos(\omega t) \qquad x_p(t)=\left(\frac{f_o}{2\Omega}\right)t\sin(\Omega t)$$

#### ***Περίπτωση 2.Β: $c\neq 0$ (Μη-μηδενική απόσβεση)***

$$x_h(t)=Ae^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t+\varphi) \qquad x_p(t)=X\cos(\Omega t-\vartheta)$$

$$A=\left(\frac{x_o-X\cos\vartheta}{\sin\varphi}\right)\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega_n\left(x_o-X\cos\vartheta\right)}{v_o+\left(x_o-X\cos\vartheta\right)\zeta\omega-\Omega X\sin\vartheta}\right)\quad \vartheta=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right)\quad X=\left(\frac{\omega^2X_{ST}}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}}\right)$$

***Συντελεστής Δυναμικής Ενίσχυσης***

$$\mathbb{H}=\left(\frac{X}{X_{st}}\right)=\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}}\right)\xrightarrow{q=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}\frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2+\left(2\zeta q\right)^2}}$$

***Περίπτωση 3η:*** *Διέγερση με επιβολή κινηματικής συνθήκης στη βάση του συστήματος*

Κινηματική διέγερση: $x_\beta(t) = X_\beta \cos(\Omega t)$ Απόκριση συστήματος: $x(t) = X\cos(\Omega t - \varphi)$

Εξίσωση ισορροπίας: $m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_\beta) + k(x - x_\beta) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_\beta + kx_\beta = F_\mu(t)$

***Για αρμονική κινηματική διέγερση:***

Συντελεστής Μεταδοτικότητος (**TR**ansmissibility factor – $TR$)

$$TR(q,\zeta) = \left(\frac{X}{X_\beta}\right) = \mathbb{H}\left(\sqrt{1+(2\zeta q)^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+(2\zeta q)^2}}{\sqrt{(1-q^2)^2 + (2\zeta q)^2}}\right), q = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$$

**ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΑΡΧΗ LAGRANGE:** $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}}$, όπου $L = T - U$

| Όρος | ***Κινητική*** ενέργεια | ***Δυναμική*** ενέργεια | ***Διάχυση*** ισχύος | ***Προσφερόμενη*** ισχύς |
|---|---|---|---|---|
| Εξίσωση | $T = (1/2) m\dot{x}^2$ | $U = (1/2) k x^2$ | $P_C = (1/2) c\dot{x}^2$ | $P_t = F\dot{x}$ |

Στρεπτική δυσκαμψία άξονα: $k_\theta = (GJ_\theta / L)$, $G$ :μέτρο διάτμησης, $J_\theta$ : πολική ροπή αδρανείας, $L$ : μήκος άξονα

Δυναμική ενέργεια άξονα σε στρέψη: $U = \left(\frac{1}{2}\right)\int_{x=0}^{x=L} GJ_\theta (\theta')^2 dx$, $\theta$: γωνία στροφής

Μαζική ροπή αδρανείας άξονα: $I_\theta = \rho J_\theta$, $\rho$ : πυκνότητα υλικού, $J_\theta$ : πολική ροπή αδρανείας

Γραμμική παρεμβολή μεταξύ $(x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$: $y = N_1(x) y_1 + N_2(x) y_2$, $N_1(x) = 1 - \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$, $N_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$

**ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER:** $f(t) = f(t+T) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$

$$a_o = \left(\frac{1}{T_p}\right)\int_0^{T_p} f(t)\,dt \qquad a_n = \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p} f(t)\cos(n\Omega t)\,dt \qquad b_n = \left(\frac{2}{T_p}\right)\int_0^{T_p} f(t)\sin(n\Omega t)\,dt$$

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ**

- Ελεύθερη κίνηση χωρίς απόσβεση $\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}(t) + \underline{K}\,\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{0}$
- Εξαναγκασμένη κίνηση με απόσβεση $\underline{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}}(t) + \underline{C}\,\dot{\underset{\sim}{x}}(t) + \underline{K}\,\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{F}(t)$
- Υπολογισμός ιδιοτιμών $\det(-\omega^2\underline{M} + \underline{K}) = \det(-\lambda\underline{M} + \underline{K}) = 0$
- Υπολογισμός ιδιοανυσμάτων $(-\omega_i^2\underline{M} + \underline{K})\underset{\sim}{\Phi}_i = (-\lambda_i\underline{M} + \underline{K})\underset{\sim}{\Phi}_i = \underset{\sim}{0}$
- Ιδιότητες ορθογωνιότητας ιδιοανυσμάτων $\underset{\sim}{\Phi}_i^T\,\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{\Phi}_i^T\,\underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{0}$
- Γενικευμένη μάζα $m_{ii} = \underset{\sim}{\Phi}_i^T\underline{M}\,\underset{\sim}{\Phi}_i$, Γενικευμένη δυσκαμψία $k_{ii} = \Phi_i^T\,\underline{K}\underset{\sim}{\Phi}_i$
- Συσχέτιση Γενικευμένης δυσκαμψίας - Γενικευμένης μάζας $\omega_i^2 = (k_{ii}/m_{ii})$
- Ιδιοανυσματικός Μετασχηματισμός $\underset{\sim}{x}(t) = \underline{\Phi}\ \underset{\sim}{q}(t) = \sum_{i=1}^{N}\underset{\sim}{\Phi}_i q_i(t) = \underset{\sim}{\Phi}_1 q_1(t) + ... + \underset{\sim}{\Phi}_N q_N(t)$,

  $\underline{\Phi}$ :*πίνακας ιδιοανυσμάτων,* $q_i(t)$:*γενικευμένοι Βαθμοί Ελευθερίας(Β.Ε.)*
- Για κάθε γενικευμένο Β.Ε.: $\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = g_i(t), \quad i = 1,2,...,N$, $g_i(t) = (\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{F}/m_{ii})$
- $\underline{M}$ *: μητρώο μάζας,* $\underline{K}$ *: μητρώο δυσκαμψίας (έχουν μη-αρνητικές ιδιοτιμές, δηλαδή:* $\lambda_i \geq 0$ )
- Συνάρτηση Μεταφοράς $\underline{H} = \begin{bmatrix} -\Omega^2\underline{M} + \underline{K} & j\Omega\underline{C} \\ -j\Omega\underline{C} & -\Omega^2\underline{M} + \underline{K}\end{bmatrix}^{-1}$, $H_{ij}(\Omega) = H_{ji}(\Omega)$

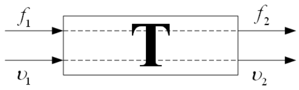
**ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

| Σύστημα | Στοιχείο αδρανείας | Στοιχείο ελαστικότητας | Στοιχείο απόσβεσης | ‘Ροή’ | ‘Σθένος’ | Ισχύς |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Γραμμικό δυναμικό | $m$ (μάζα) | $k$ | $c$ | $\upsilon = \dot{x}$ | $F$ (δύναμη) | $F\,\upsilon$ |
| Στρεφόμενο δυναμικό | $I$ (ροπή αδρανείας) | $k_\varphi$ | $c_\varphi$ | $\omega = \dot{\varphi}$ | $M$ (ροπή) | $M\dot{\varphi}$ |

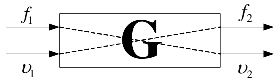
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ηλεκτρικό | $L$ (αυτεπαγωγή) | $\left(1/C_e\right)$ | $R_e$ | $I=\dot{q}$ | $U$ (τάση) | $UI$ |
| Υδραυλικό | $I_\rho$ | $\left(1/C_\rho\right)$ | $R_\rho$ | $Q=\dot{U}_P$ | $P$ (πίεση) | $QP$ |

$\omega$ :γωνιακή ταχύτητα, $\varphi$ :περιστροφή, $C_e$ :χωρητικότητα πυκνωτή, $R_e$ :ηλεκτρική αντίσταση, $I$ :ένταση, $q$ :φορτίο, $I_\rho$ :αδράνεια ρευστού, $R_\rho$ :υδραυλική αντίσταση, $C_\rho$ : από συμπιεστότητα ρευστού, $Q$ :παροχή, $U_P$ :μεταβολή όγκου ρευστού

## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΣ (ΕΝΙΣΧΥΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΡΟΦΕΙΣ)

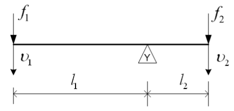



$F_2=\mathrm{T}\,F_1 \quad \upsilon_2=\left(\dfrac{1}{T}\right)\upsilon_1$



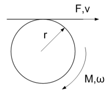

$F_2=G\,\upsilon_1 \quad \upsilon_2=\left(\dfrac{1}{G}\right)F_1$

Σύστημα μοχλού



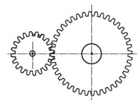

$\mathrm{T}=\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right) \quad F_2=\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)F_1 \quad \upsilon_2=\left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)\upsilon_1$

Σύστημα ατέρμονα κοχλία – κορώνας



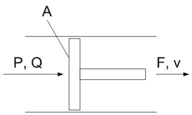

$\mathrm{T}=r \quad M=r\,F \quad \omega=\left(\dfrac{1}{r}\right)\upsilon$

Ζεύγος οδοντωτών τροχών



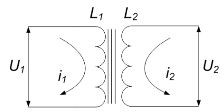
$\mathrm{T}=\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) \quad M_2=\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)M_1 \quad \omega_2=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)\omega_1$

Υδραυλικό έμβολο



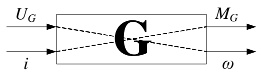

$\mathrm{T}=A \quad F=A\,P \quad \upsilon=\left(\dfrac{1}{A}\right)Q$

Ηλεκτρικός μετασχηματιστής




$T=\left(\dfrac{N_1}{N_2}\right) \quad U_2=\left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)U_1$

Ηλεκτροκινητήρας




$G=\left(\dfrac{U_G}{\omega}\right) \quad U_G=G\,\omega \quad i=\left(\dfrac{1}{G}\right)M_G$

## ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

- Ιδιότητα γραμμικότητας: $\mathcal{L}\left\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right\}=a_1\mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}+a_2\mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\}$
- Πρώτη παράγωγος: $\mathcal{L}\left\{\dot{\underset{\sim}{x}}\right\}=s\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{x}_o$, Δεύτερη παράγωγος: $\mathcal{L}\left\{\ddot{\underset{\sim}{x}}\right\}=s^2\underset{\sim}{X}-s\underset{\sim}{x}_o-\dot{\underset{\sim}{x}}_o$

| | $F(s)$ | $f(t)$ |
|---|---|---|
| (1) | $\left(\dfrac{1}{s}\right)$ | 1: μοναδιαία βηματική συνάρτηση |
| (2) | $\left(\dfrac{1}{s+a}\right)\left(\dfrac{1}{s+b}\right)$ | $\left(\dfrac{1}{b-a}\right)\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$ |
| (3) | $\left(\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$ | $\sin(\omega t)$ |
| (4) | $\left(\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right)$ | $\cos(\omega t)$ |
| (5) | $\left(\dfrac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}\right)$ | $\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right)\left(1-\cos(\omega t)\right)$ |
| (6) | $\left(\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)$ | $\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t),\ \zeta<1,\ \omega_n=\omega\sqrt{1-\zeta^2}$ |
| (7) | $\left(\dfrac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)$ | $e^{-\zeta\omega}\left(\cos(\omega_n t)-\left(\dfrac{\zeta\omega}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)\right),\quad \zeta<1,\quad \omega_n=\omega\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}$ |
| (8) | $\left(\dfrac{\omega^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2\right)}\right)$ | $1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_n t+\phi),\ \zeta<1,\ \phi=\cos^{-1}(\zeta)$ |
| (9) | $\left(\dfrac{1}{s(s+\omega)}\right)$ | $\left(\dfrac{1}{\omega}\right)\left(1-e^{\omega t}\right)$ |