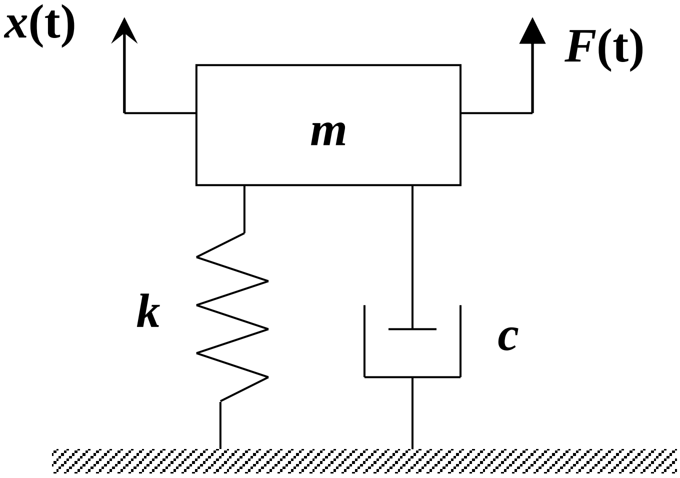
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΩΝ Ι

Μάθημα 1ο: Εισαγωγή
Δυναμικό Σύστημα Ενός Βαθμού Ελευθερίας (1 Β.Ε.)

Ακολουθεί σύντομη επανάληψη του Δυναμικού Συστήματος ενός Βαθμού Ελευθερίας. Έστω το Δυναμικό Σύστημα του Σχήματος 1, όπου μία μάζα στηρίζεται σε ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα.



Σχήμα 1: Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Στο Σχήμα 1 έχει χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος συμβολισμός:

m: μάζα (στοιχείο αδρανείας)
k: ελατήριο (στοιχείο ελαστικότητας)
c: αποσβεστήρας (στοιχείο καταστροφής ενέργειας)
$x(t)$: απόκριση συστήματος (μετατόπιση), χρονικά μεταβαλλόμενη
$F(t)$: εξωτερική διέγερση συστήματος (δύναμη), χρονικά μεταβαλλόμενη.

Θεωρείται ότι το κάτω άκρο των στοιχείων ελαστικότητας και απόσβεσης (k και c, αντίστοιχα) είναι προσδεδεμένο σε ακλόνητη (ακίνητη και απαραμόρφωτη) οριζόντια επιφάνεια, ενώ το άνω άκρο τους είναι ***άκαμπτα*** συνδεδεμένο με τη μάζα m. Συνεπώς, το άνω άκρο των στοιχείων k και c εμφανίζει την ***ίδια*** μετατόπιση με την μάζα m. Το συγκεκριμένο δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας (1 ΒΕ) διότι το εμφανιζόμενο κινηματικό μέγεθος του συστήματος είναι ένα και μοναδικό: η **κοινή μετατόπιση** του κέντρου της μάζας m και των άνω άκρων των στοιχείων k και c. Διευκρινίζεται ότι η βαρύτητα αποτελεί μία μόνιμη, στατική φόρτιση, την οποία δεν λαμβάνουμε υπόψη γιατί θέτουμε ως αρχή της μετατόπισης την παραμορφωμένη από το βάρος κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

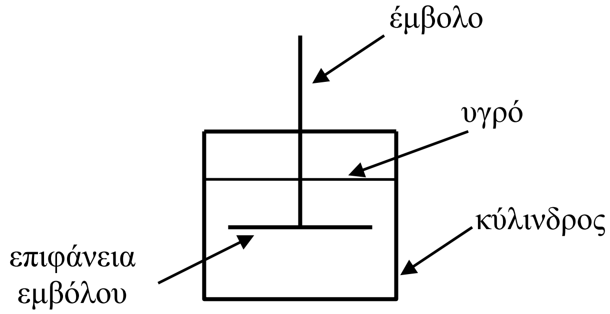
Το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1 εμπλέκει τρία διαφορετικά μεταξύ τους φυσικά στοιχεία, τα οποία χαρακτηρίζουν τις τρεις διαφορετικές φυσικές ιδιότητες ενός δυναμικού συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ένα στοιχείο μάζας, ένα στοιχείο απόσβεσης και ένα στοιχείο ελατηρίου.

Η μάζα m χαρακτηρίζει την αδράνεια του συστήματος. Ως αποτέλεσμα της αδράνειας, αναπτύσσονται αδρανειακές δυνάμεις σύμφωνα με την εξίσωση:

$$F_m = m\ddot{x} \tag{1}$$

Η Εξ.(1) δηλώνει ότι η αδρανειακή δύναμη μίας μάζας m είναι ανάλογη της επιτάχυνσης της μάζας, με σταθερά αναλογίας την ίδια τη μάζα m.

Διαισθητικά, η απόσβεση σχετίζεται με την τριβή, άρα με καταστροφή ενέργειας. Στη φύση υπάρχουν πολλά παραδείγματα στοιχείων απόσβεσης. Το απλούστερο ***τεχνολογικό*** στοιχείο απόσβεσης είναι εκείνο το οποίο χρησιμοποιείται στις αναρτήσεις του αυτοκινήτου. Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται μία απλοποιημένη μορφή αποσβεστήρα (στην πραγματικότητα, η ανάρτηση ενός αυτοκινήτου αποτελεί μία πολύ πιο σύνθετη τεχνολογική διάταξη).



Σχήμα 2: Μονογραμμική απεικόνιση αποσβεστήρα

Πιο συγκεκριμένα, μέσα στον κύλινδρο υπάρχει υδραυλικό υγρό κατάλληλου ιξώδους. Όταν το έμβολο κινηθεί σχετικά ως προς το τοίχωμα του κυλίνδρου (στην πράξη, όταν ο τροχός ανεβοκατεβαίνει σε σχέση με το σασί του αυτοκινήτου), τότε το υγρό διέρχεται μέσα από κατάλληλες εγκοπές του εμβόλου, αναπτύσσοντας υδραυλική τριβή (ιξώδη τριβή) μεταξύ υγρού και εμβόλου. Ως αποτέλεσμα, ασκείται στην επιφάνεια του εμβόλου μία δύναμη, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση:

$$F_c = c\dot{x} \tag{2}$$

Στην Εξ.(2), η σταθερά c είναι δυνατόν να προσδιορισθεί από τις ιδιότητες του υγρού και τη γεωμετρία της διάταξης και ονομάζεται σταθερά απόσβεσης. Η Εξ.(2) δηλώνει ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας $\dot{x}$ του εμβόλου ως προς το τοίχωμα του κυλίνδρου, με σταθερά αναλογίας την ποσότητα c. Διευκρινίζεται ότι και από το φυσικό πρότυπο (ροή Quette), προκύπτει ότι η δύναμη F_c είναι ανάλογη της ταχύτητας.

Το ελατήριο σταθεράς k αποτελεί στοιχείο ελαστικότητας (παραμορφωσιμότητας) του συστήματος. Μεταβολή του μήκους του ελατηρίου κατά x προκαλεί την εμφάνιση ελαστικής δύναμης, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση:

$$F_k = k\,x \tag{3}$$

Η Εξ.(3) δηλώνει ότι η ελαστική δύναμη F_k είναι ανάλογη της μετατόπισης x του ελευθέρου άκρου του ελατηρίου, με σταθερά αναλογίας την ποσότητα k.

Στον Πίνακα 1 συνοψίζονται οι τρεις βασικοί τύποι δυναμικών στοιχείων (συμβολισμός στοιχείου, φυσική σημασία, είδος αναπτυσσομένων δυνάμεων, εξίσωση υπολογισμού).

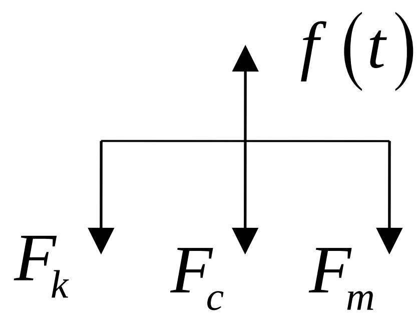
Πίνακας 1: Βασικά στοιχεία δυναμικής

Στοιχείο	Φυσική σημασία	Αναπτυσσόμενες δυνάμεις	Εξίσωση
m	Αδράνεια συστήματος	Αδρανειακές	$F_m = m\ddot{x}$
c	Καταστροφή ενέργειας	Απόσβεσης	$F_c = c\dot{x}$
k	Παραμορφωσιμότητα	Ελαστικές	$F_k = k\,x$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι σε κάθε ένα από τα στοιχεία του δυναμικού συστήματος του Σχήματος 1 αναπτύσσεται διαφορετική μορφή δύναμης, η οποία είναι ***εσωτερική*** δύναμη του συστήματος. Επειδή, δε, τα τρία στοιχεία του συστήματος είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους, από την ***δυναμική*** ισορροπία του συστήματος προκύπτει ότι το σύνολο των εσωτερικών δυνάμεων θα πρέπει να είναι αλγεβρικά ίσο προς την ***εξωτερικά*** ασκούμενη δύναμη (εξωτερική διέγερση), σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση (εξίσωση ***δυναμικής*** ισορροπίας):

$$F_m + F_c + F_k = f(t) \tag{4}$$

Σχηματικά, η δυναμική ισορροπία απεικονίζεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Ισορροπία δυνάμεων για το σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(4) τις εσωτερικές δυνάμεις με τις Εξ.(1,2,3), οι οποίες, κατά κάποιο τρόπο, αποτελούν τις 'καταστατικές εξισώσεις' των δυνάμεων, προκύπτει:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{5}$$

Η Εξ.(5) είναι μία Γραμμική Διαφορική Εξίσωση δευτέρας τάξεως. Η Εξ.(5) αποτελεί αυτό που καλείται ‘μοντέλο του συστήματος’, ενώ η διαδικασία μέσω της οποίας από το Σχήμα 1 καταλήγουμε στην Εξ.(5) καλείται ‘μοντελοποίηση’. Για το δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1, η ‘μοντελοποίηση’ είναι εξαιρετικά απλή και οδηγεί στην Εξ.(5) άμεσα. Ωστόσο, για πιο σύνθετες κατασκευές όπως είναι ένα αεροσκάφος, τόσο η μετάβαση από τα τεχνολογικά σχέδια στις εξισώσεις που περιγράφουν το δυναμικό σύστημα, όσο και η επίλυση του αντίστοιχου συστήματος εξισώσεων, είναι αρκετά πιο σύνθετες διαδικασίες (αποτελούν, δε, μέρος του μαθήματος ‘Δυναμική Μηχανών Ι’).

Εισαγωγή στην ενεργειακή αρχή Lagrange

Εναλλακτικά, για τον σχηματισμό των εξισώσεων δυναμικής ισορροπίας είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η ενεργειακή αρχή Lagrange (θα παρουσιασθεί αναλυτικά σε επόμενο κύκλο μαθημάτων). Για το απλό μονοβάθμιο δυναμικό σύστημα του Σχήματος 1, η ενεργειακή αρχή Lagrange εφαρμόζεται ως εξής:

- Καταγραφή της ***κινητικής*** ενέργειας T, η οποία συσσωρεύεται στη μάζα m:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{6}$$

- Καταγραφή της ***δυναμικής*** ενέργειας U, η οποία συσσωρεύεται στο ελατήριο σταθεράς k:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \tag{7}$$

- Καταγραφή της ενέργειας P_C, η οποία ***διαχέεται*** στον αποσβεστήρα σταθεράς c:

$$P_C = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \tag{8}$$

- Καταγραφή της ισχύος P_t που ***προσφέρεται*** στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη *F(t)*:

$$P_t = F\dot{x} \tag{9}$$

Σύμφωνα με την ενεργειακή αρχή Lagrange, ορίζεται η ποσότητα L, η οποία καλείται ενεργειακή μεταβλητή Lagrange, ως εξής:

$$L = T - U \tag{10}$$

Στην Εξ.(10), οι ποσότητες T και U είναι εκείνες που ορίσθηκαν στην Εξ.(6) και στην Εξ.(7), αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με την ενεργειακή αρχή Lagrange, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial P_C}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial P_t}{\partial \dot{x}} \tag{11}$$

Εκτελώντας πράξεις, καταλήγουμε στην Εξ.(5) δηλαδή το μοντέλο του δυναμικού συστήματος μπορεί να επιτευχτεί χρησιμοποιώντας είτε εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων είτε την ενεργειακή αρχή Lagrange. Το όφελος από αυτήν την 2^{η} προσέγγιση καθίσταται φανερό όταν το δυναμικό σύστημα εμπλέκει πολλούς βαθμούς ελευθερίας και η εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων είναι αδύνατη. Έτσι, όπως θα δούμε στην συνέχεια του μαθήματος, ο υπολογισμός της καταστατικής εξίσωσης για πολλούς βαθμούς ελευθερίας, θα προκύπτει με εφαρμογή της ενεργειακής αρχής Lagrange.

Δυναμική συμπεριφορά συστήματος 1^{ος} Β.Ε.

Συνεχίζοντας στη διερεύνηση του μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος του Σχήματος 1, ανακύπτει το ερώτημα: ‘εάν ξέρω το μοντέλο του συστήματος, δηλαδή ξέρω την Εξ.(5), πώς είναι δυνατόν να βρω την απόκριση *x(t)* του συστήματος;’ Η απάντηση είναι προφανής: λύνοντας την Εξ.(5), δηλαδή επιλύοντας μία Γραμμική Δ.Ε 2^{ας} τάξεως (υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου, υπολογισμός ομογενούς λύσεως, υπολογισμός μερικής λύσεως).

Διαιρώντας την Εξ.(5) δια της μάζας m, είναι δυνατόν να καταλήξουμε στην ακόλουθη έκφραση:

$$\ddot{x}+2\zeta\omega\,\dot{x}+\omega^2\,x=\left(\frac{F(t)}{m}\right) \tag{12}$$

Η Εξ.(12) καλείται αδιαστατοποιημένη μορφή της Εξ.(5) και για την διατύπωσή της έχουν ορισθεί οι ακόλουθες ποσότητες αδιάστατες ποσότητες, οι οποίες είναι εξαιρετικά σημαντικές έννοιες για τον προσδιορισμό της δυναμικής συμπεριφοράς ενός συστήματος:

$$\omega^2=\left(\frac{k}{m}\right) \quad \text{και} \quad \zeta=\left(\frac{c}{2\omega m}\right) \tag{13}$$

Η ποσότητα ω καλείται κυκλική ιδιοσυχνότητα ή κυκλική φυσική συχνότητα του δυναμικού συστήματος και σύμφωνα με την Εξ.(13), το τετράγωνο της ιδιοσυχνότητας ω ισούται με τον λόγο της σταθεράς του ελατηρίου προς τη μάζα. Η ιδιοσυχνότητα ω παριστάνει το σημείο της μέγιστης απορρόφησης ενέργειας (συντονισμός) του συστήματος. Καλείται, δε, ***φυσική*** συχνότητα (ή **ιδιοσυχνότητα**) διότι χαρακτηρίζει την συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος, όταν δεν ασκούνται σε αυτό εξωτερικές διεγέρσεις (συχνότητα με την οποία το σύστημα «ταλαντώνεται από μόνο του», «ταλαντώνεται από τη φύση του»). Συνεπώς, η ιδιοσυχνότητα αποτελεί την πρώτη σημαντική ιδιότητα ενός δυναμικού συστήματος. Όπως θα δειχθεί σε επόμενο μάθημα, ένα σύστημα έχει τόσες ιδιοσυχνότητες όσους και Βαθμούς Ελευθερίας. Η κυκλική ιδιοσυχνότητα εκφράζεται σε $\left({rad}/{\sec}\right)$. Ισχύει επίσης:

$$\mathrm{f} = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{14}$$

όπου η ιδιοσυχνότητα f εκφράζεται σε (Hz). Επίσης, ορίζεται:

$$T = \left(\frac{1}{\mathrm{f}}\right) \tag{15}$$

Η ποσότητα T καλείται ιδιοπερίοδος του συστήματος. Όπως θα δειχθεί σε επόμενο μάθημα, οι χρονικές κλίμακες των εξωτερικών διεγέρσεων σε σχέση με τις εσωτερικές περιόδους (ιδιοπεριόδους) του συστήματος καθορίζουν σημαντικά την δυναμική απόκριση ενός συστήματος.

Η δε, ποσότητα ζ καλείται λόγος απόσβεσης και εκφράζει την ικανότητα καταστροφής των εξωτερικών διεγέρσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας ικανότητας αποτελούν τα «αμορτισέρ» στα οχήματα. Εαν ένα όχημα χωρίς «αμορτισέρ» (στα γαλλικά αμορτισέρ σημαίνει ‘απόσβεση’) πέσει σε μία λακκούβα, τότε θα συνεχίσει να ταλαντώνεται μετά τη διάβαση της λακκούβας. Αντιθέτως, τα «αμορτισέρ» καταστρέφουν την ενέργεια η οποία συσσωρεύεται στο σύστημα και με τον τρόπο αυτό μειώνονται οι ταλαντώσεις.

Το επόμενο βήμα στην πορεία του μαθήματος είναι ο υπολογισμός της απόκρισης του μονοβάθμιου συστήματος του Σχήματος 1, όταν σε αυτό ασκούνται διάφορα είδη διεγέρσεων. Επίσης, για τις διεγέρσεις που θα εξετασθούν, θα εξηγηθεί με ποιόν τρόπο τα χαρακτηριστικά του συστήματος επηρεάζουν την απόκρισή του.